Complementos / Matemática 2
Matemática 3
Primer Cuatrimestre — 2008

Práctica 1: Espacios vectoriales, generación, independencia lineal

Espacios vectoriales

1. Sea V un espacio vectorial sobre k. Mostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $0 \cdot v = 0, \quad \forall v \in V;$

(b) $\lambda \cdot 0 = 0, \quad \forall \lambda \in k;$

(c) $(-1) \cdot v = -v, \quad \forall v \in V;$

(d) $-(-v) = v, \quad \forall v \in V;$

(e) $\lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = 0;$

(f) $-0 = 0.$

2. *(a)* Sea X un conjunto no vacío. Sea $k^X = \{f : X \to k\}$ el conjunto de todas las funciones de X a k. Mostrar que las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

hacen de k^X un espacio vectorial sobre k.

(b) ¿Bajo que condiciones es k^X de dimensión finita? Cuando se cumplen, encuentre una base.

3. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un abierto no vacío. Muestre que los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^X$ sobre $\mathbb{R}$.

(a) $C^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es infinitamente diferenciable}\};$

(b) $\mathbb{R}^X;$

(c) $C^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\};$

(d) $L = \{f \in C^1(X) : \forall x \in X, f'(x) = f(x)\};$

(e) $C^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es derivable}\};$

(f) $V(x_0) = \{f \in C^1(X) : \forall x \in X, f(x_0) = 3f'(x_0)\}$ para $x_0 \in X$.

Determine todas las inclusiones entre estos espacios.

4. Sea X un conjunto no vacío, V un espacio vectorial sobre k y consideremos el conjunto $V^X = \{f : X \to V\}$ de todas las funciones de X en V.

(a) Mostrar que es posible definir sobre V^X, imitando lo hecho en el ejercicio **2**, operaciones de suma y de producto por elementos de k de forma natural, de manera de que V^X resulte, con respecto a esas operaciones, un espacio vectorial sobre k.

(b) Si $Y \subset X$ es un subconjunto no vacío, ¿puede verse a V^Y como subespacio de V^X?

(c) Si $W \subset V$ es un subespacio vectorial, ¿puede verse a W^X como subespacio de V^X?

5. Sea $A \in M_{n,m}(k)$ una matrix $n \times m$ con coeficientes en k y sea

$$S = \{x \in k^m : Ax = 0\}$$

el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo asociado a A. Muestre que S es un subespacio vectorial de k^m.

6. Sean S y T subespacios de un k-espacio vectorial V.

(a) $S \cap T$ es un subespacio de V.

†*(b)* Si $S \cup T$ es un subespacio de V entonces $S \subset T$ ó $T \subset S$.

7. Decidir cuales de los siguientes subconjuntos S son sub-k-espacios de V

(a) $S = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (1,1,1),\ \text{con } a, b \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$, $k = \mathbb{R}$;

(b) $S = \{ai : a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $k = \mathbb{R}$;

(c) $S = \{ai : a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $k = \mathbb{C}$;

(d) $S = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \geq 2\}$, $V = k[X]$;

(e) $S = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \leq 5\}$, $V = k[X]$;

(f) $S = \{M \in M_{4,4}(k) : M^t = M\}$, $V = M_{4,4}(k)$;

(g) $S = \{M \in M_{4,4}(k) : \operatorname{tr} M = 0\}$, $V = M_{4,4}(k)$;

(h) $S = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''(1) = f(2)\}$, $V = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, $k = \mathbb{R}$.

8. Mostrar que los siguientes conjuntos no son sub-$\mathbb{R}$-espacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$.

(d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$.

9. Sea $V = \mathbb{R}^+$, y consideremos la operación $+$ definida sobre V por

$$+ : (u,v) \in V \times V \mapsto uv \in V,$$

donde uv es el *producto* usual calculado en $\mathbb{R}^+$, y la acción de $\mathbb{R}$ sobre V dada por

$$\cdot : (\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V \mapsto v^\lambda \in V.$$

Muestre que $(V, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Conjuntos generadores

10. *(a)* Encontrar al menos tres sistemas de generadores del subespacio

$$S = \langle (1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

(b) ¿$(2,1,3,5)$ está en S?

(c) ¿Es $S \subset \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$?

(d) ¿Es $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subset S$?

11. Determine dos sistemas de generadores para cada uno de los siguientes espacios vectoriales:

(a) k^n sobre k;

(b) $k[X]_n = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \leq n\}$ sobre k;

(c) $k[X]$ sobre k;

(d) $\mathbb{C}^n$, con $k = \mathbb{R}$;

(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x - y = 0\}$, con $k = \mathbb{R}$;

(f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x - y = 0\}$, con k arbitrario;

(g) $\{f \in k[X]_4 : f(1) = 0, f(2) = f(3)\}$, con $k = \mathbb{Q}$;

(h) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''' = 0\}$, con $k = \mathbb{R}$.

12. Sea X un conjunto no vacío.

(a) Si X es finito, determine un sistema de generadores para k^X.

(b) Sea

$$k_0^X = \{f \in k^X : \text{existe } Y \subset X \text{ finito tal que } f|_{X \setminus Y} \text{ es constante}\},$$

el conjunto de las funciones sobre X que son constantes fuera de un conjunto finito.

Encuentre un sistema de generadores para k_0^X.

†*(c)* Si X es finito, y V es un k-espacio vectorial, determine un sistema de generadores para V^X.

†*(d)* ¿Puede encontrar un sistema de generadores para $k^{\mathbb{N}}$?

Dependencia lineal y bases

13. En este ejercicio todos los espacios vectoriales son reales. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o no. En caso no serlo, determine que elementos pueden eliminarse de manera que el conjunto residual sea linealmente independientes y genere el mismo subespacio que el conjunto original. Finalmente, complete cada conjunto a una base del espacio ambiente.

(a) $\{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(1,0,-1),(1,1,2),(0,1,1)\}$ en $\mathbb{C}^3$.

(c) $\{(1,1,2),(1,4,3),(3,3,3),(e,\pi,\sqrt{2})\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(d) $\{(1,1,1),(1,\alpha,\alpha^2),(1,\beta,\beta^2)\}$ en $\mathbb{R}^3$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(e) $\{(1,1,1,1),(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3),(1,\beta,\beta^2,\beta^3)\}$ en $\mathbb{R}^4$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(f) $\{(\frac{1}{2}(X-1)(X-2),(X-1)(X-3),(X-2)(X-3)\}$ en $\mathbb{R}[X]_2$.

(g) $\{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&i\\1&i\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&i\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ en $M_4(\mathbb{C})$.

14. Determinar todos los $\lambda \in k$ de manera que los siguientes conjuntos resulten linealmente independientes:

(a) $\{(1,2,\lambda),(1,1,1),(0,1,1-\lambda)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{\lambda X^2 + X, -X^2 + \lambda, \lambda^2 X\}$ en $\mathbb{R}[X]_4$.

(c) $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 2\lambda \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ en $M_4(\mathbb{C})$.

15. Encuentre bases para los siguientes espacios vectoriales

(a) $V = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(b) $V = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : A = \bar{A}^t\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(c) $V = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : \operatorname{tr} A = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(d) $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \forall n \in \mathbb{N}_0, a_{n+1} = 2a_n\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(e) $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \forall n \in \mathbb{N}_0, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(f) $V = \{p \in \mathbb{R}[X]_n : p(0) = p(1) = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(g) $V = \{p \in \mathbb{R}[X]_n : p(0) = p'(1) = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

†**16.** Sea $v_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ si $1 \le i \le n$, y supongamos que $a_{ij} \le 0$ si $i \neq j$, y que $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$. Mostrar que $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

17. Sea $F = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}[X]$ tal que $\deg f_i = i$ si $i \in \mathbb{N}_0$. Mostrar que F es una base de $\mathbb{R}[X]$.

18. Sea $\alpha_i \in k$ para $1 \le i \le n$, y sea

$$v_i = (1, \alpha_i, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^{n-1}) \in k^n.$$

Determinar cuando $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente en k^n.

19. Sea V un espacio vectorial sobre k.

(a) $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente sii el conjunto $\{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

(b) Si $\lambda \in k \setminus \{0\}$, $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente sii el conjunto $\{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

(c) Si $\lambda \in k$, $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente sii el conjunto $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\}$

Giuseppe Peano
1858 - 1932, Italia

Giuseppe Peano fue el primero, en 1888, en dar una definición de espacio vectorial como la que usamos hoy, apoyándose en ideas introducidas en 1844 por Hermann Günter Grassmann que habían permanecido prácticamente ignoradas hasta entonces debido a la obscuridad de la exposición hecha por Grassmann.
Es muy conocido, además, por la axiomatización de la aritmética elemental que presentó en su artículo *Arithmetices principia, nova methodo exposita* de 1889, por su descubrimiento de 1890 de curvas que cubren el plano.