Complementos / Matemática 2
Matemática 3
Primer Cuatrimestre — 2008

Segundo parcial

Apellido y nombre: ....

Comisión: .... L.U.: .... Páginas: ....

1. Sea $V = \mathbb{R}^4$ dotado de su producto interno usual y

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 - x_4 = x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

a) Encuentre $S^\perp$.

b) Determine la proyección ortogonal $p : V \to V$ con imagen S, dando la matriz de p con respecto a la base canónica.

c) Encuentre una base ortonormal de V que diagonalice a p.

2. Encuentre la forma normal de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Sea V un espacio euclídeo Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal autoadjunta. Mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\langle f(v), v\rangle \geq 0$ para todo $v \in V$;

(ii) existe $g : V \to V$ tal que $f = g^*g$;

(iii) existe $h : V \to V$ tal que $h^* = h$ y $f = h^2$.

4. Sea $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dotado del producto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg\,\mathrm{d}x.$$

a) Usando el procedimiento de Gram-Schmidt obtener a partir de la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ una base ortonormal para V.

b) Sea $f : p \in V \mapsto p - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x}p \in V$. Determine la matriz de f^* en la base $\mathcal{B}$.