Complementos / Matemática 2
Matemática 3
Primer Cuatrimestre — 2008

Primer parcial

Apellido y nombre: ....
Comisión: .... L.U.: .... Páginas: ....

1. Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Mostrar que A es diagonalizable y encontrar una matriz inversible $C \in \mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ tal que CAC^{-1} sea diagonal.

b) Considere la transformación lineal

$$f : X \in \mathsf{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto AX \in \mathsf{M}_2(\mathbb{C}).$$

¿Es diagonalizable? En caso de serlo, encuentre explícitamente una base de $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ de autovectores de f.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $h : \mathsf{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ la aplicación lineal tal que

$$h(A) = 4A - 2\,\mathsf{tr}(A)\mathsf{Id}_n$$

para cada $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$. Muestre que:

a) Si $n = 2$, entonces $\mathsf{M}_2(\mathbb{C}) = \ker h \oplus \operatorname{im} h$.

b) Si $n \geq 3$, entonces h es un isomorfismo. Determinar, en ese caso, la aplicación inversa h^{-1}.

3. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un k-espacio vectorial V. Supongamos que f es una *involución*, esto es, que $f \circ f = \mathsf{Id}_V$. Muestre que:

a) f es un isomorfismo.

b) $V = \operatorname{im}(\mathsf{Id}_V + f) \oplus \operatorname{im}(\mathsf{Id}_V - f)$ y f es diagonalizable.

c) Si $g = (f + \mathsf{Id}_V)/2$, entonces g es un proyector de V. Determinar el núcleo y la imágen de g.

d) Recíprocamente, mostrar que si $g : V \to V$ es un proyector, entonces existe una involución $f : V \to V$ tal que $g = (f + \mathsf{Id}_V)/2$.

4. Calcule el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$