Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2007

Práctica 6: Productos tensoriales

1. Productos tensoriales

1.1. Muestre que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

1.2. Sea A un anillo y M_A y ${}_AM$ A-módulos. Muestre que $M \otimes_A N$ es un $\mathsf{End}_A(M)$-$\mathsf{End}_A(N)$-bimódulo.

1.3. Sean A y B anillos y M_A, ${}_AN_B$ y ${}_BP$ módulos. Muestre que hay un isomorfismo natural

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P.$$

1.4. Sea A un anillo conmutativo, $\mathfrak{a} \subset A$ un ideal y M un A-módulo. Muestre que hay un isomorfismo natural $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.

1.5. Sea A un anillo, M_A y ${}_AN$ módulos y supongamos que $M = \sum_{i \in I} M_i$ es suma de una familia de submódulos $\{M_i\}_{i \in I}$. Si $M_i \otimes_A N = 0$ ara todo $i \in I$, entonces $M \otimes_A N = 0$.

1.6. Sea A un anillo y M un A-módulo playo. Si $N \subset M$ es un sumando directo, entonces N es playo.

1.7. Si A es un anillo conmutativo y M, N son A-módulos playos, entonces $M \otimes_A N$ es un A-módulo playo.

1.8. Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado.

(a) Si M es un A-módulo izquierdo, entonces hay un isomorfismo $A_S \otimes_A M \cong M_S$.

(b) El A-módulo derecho A_S es playo.

†**1.9.** Sea A un anillo y M un A-módulo izquierdo. Entonces M es playo sii para todo ideal $\mathfrak{a} \subset A$ finitamente generado, la aplicación

$$a \otimes m \in \mathfrak{a} \otimes_A M \mapsto am \in \mathfrak{a}M$$

es un isomorfismo.

1.10. Sea A un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Todo A-módulo a izquierda es playo.
(ii) Todo A-módulo a derecha es playo.
(iii) Para todo $a \in A$, existe $x \in A$ tal que $a = axa$.
(iv) Todo ideal izquierdo principal está generado por un idempotente.
(v) Todo ideal derecho principal está generado por un idempotente.

1.11. *Criterio local de platitud.* Sea A un anillo conmutativo y M un A-modulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) M es playo;

(ii) para cada $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ A$, $M_{\mathfrak{p}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo playo;

(iii) para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, $M_{\mathfrak{m}}$ es un $A_{\mathfrak{m}}$-módulo playo.

1.12. Un anillo conmutativo A es *absolutamente playo* si todos sus módulos son playos.

(a) Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) A es absolutamente playo.
- ii) Todo ideal principal de A es idempotente.
- iii) Todo ideal finitamente generado de A es un sumando directo de A.

(b) Muestre que un anillo booleano es absolutamente playo.

(c) Si A es un anillo conmutativo absolutamente playo y $S \subset A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado, entonces A_S es absolutamente playo.

1.13. *Producto tensorial de álgebras.* Sea k un cuerpo y sean A y B k-álgebras. Muestre que $A \otimes_k B$ es un álgebra de forma tal que el producto está dado por

$$a \otimes b \cdot a' \otimes b = (aa') \otimes (bb').$$

1.14. Sea k un cuerpo, A una k-álgebra y $n, m \in \mathbb{N}$. Muestre que hay isomorfismos naturales de álgebras

$$A[X] \cong k[X] \otimes_k A,$$
$$\mathsf{M}_n(A) \cong \mathsf{M}_n(k) \otimes_k A,$$

y

$$\mathsf{M}_{nm}(A) \cong \mathsf{M}_n(A) \otimes_k \mathsf{M}_m(A).$$

2. Productos de torsión

2.1. Sean M y N grupos abelianos. Consideremos el conjunto

$$G(M,N) = \{(m,k,n) \in M \times \mathbb{Z} \times N : km = 0, kn = 0\},$$

sea $L(M,N)$ el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por $G(M,N)$ y sea $R(M,N)$ el subgrupo de $L(M,N)$ generado por los elementos

$$\begin{aligned}
&(m+m',k,n) - (m,k,n) - (m',k,n), && \text{si } km = km' = 0 \text{ y } km = 0;\\
&(m,k,n+n') - (m,k,n) - (m,k,n'), && \text{si } km = 0 \text{ y } kn = kn' = 0;\\
&(m,kk',n) - (mk,k',n), && \text{si } kk'm = 0 \text{ y } k'n = 0;\\
&(m,kk',n) - (m,k,k'n), && \text{si } km = 0 \text{ y } kk'n = 0.
\end{aligned}$$

Definimos $M \odot N = L(M,N)/G(M,N)$.

(a) Si M ó N no posee elementos de orden finito, $M \odot N = 0$

(b) Hay un isomorfismo $M \odot N \cong N \odot M$.

(c) Dados $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ son morfismos de grupos abelianos, es posible construir un morfismo de grupos abelianos $f \odot g : M \odot N \to M' \odot N'$ de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

(i) Si $f : M \to M'$, $f' : M' \to M''$, $g : N \to N'$ y $g : N' \to N''$ son morfismos de grupos abelianos, entonces

$$(f' \odot g') \circ (f \odot g) = (f' \circ f) \odot (g' \odot g).$$

(ii) Si $f, f' : M \to M'$ y $g, g' : N \to N'$ son morfismos de grupos abelianos, entonces

$$(f + f') \odot g = f \odot g + f' \odot g$$

y

$$f \odot (g + g') = f \odot g + f \odot g'.$$

(iii) Si M y N son grupos abelianos, es $\mathsf{id}_M \odot \mathsf{id}_N = \mathsf{id}_{M \odot N}$.

(d) Si $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ son isomorfismos, entonces el morfismo $f \odot g : M \odot N \to M' \odot N'$ es un isomorfismo.

(e) Si M, M', N y N' son grupos abelianos, entonces hay isomorfismos naturales

$$(M \oplus M') \odot N \cong (M \odot N) \oplus (M' \odot N)$$

y

$$M \odot (N \oplus N') \cong (M \odot N) \oplus M \odot (M \odot N').$$

(f) Sea

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de grupos abelianos y sea N un grupo abeliano. Entonces hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \odot N \xrightarrow{f \odot \mathsf{id}_N} M \odot N \xrightarrow{g \odot \mathsf{id}_N} M'' \odot N \xrightarrow{\partial}$$
$$\longrightarrow M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes \mathsf{id}_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes \mathsf{id}_N} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

para un cierto morfismo $\partial : M'' \odot N \to M' \otimes N$.

(g) Si M es un grupo abeliano y $n \in \mathbb{N}$, calcule $M \odot \mathbb{Z}_n$.

(h) Si M es un grupo abeliano, sea $T(M) \subset M$ el subgrupo de los elementos de torsión. Muestre que hay un isomorfismo $M \odot \mathbb{Q}/ZZ \cong T(M)$.

(i) Sea p un número primo y $S = \{p^i : i \in \mathbb{N}_0\}$. Se trata de un conjunto multiplicativamente cerrado en $\mathbb{Z}$, así que podemos considerar la localización $\mathbb{Z}_S$. Si M es un grupo abeliano, describa el grupo $M \odot \mathbb{Z}_S$.

(j) Sean M y N grupos abelianos tales que si $m \in M$ tiene orden finito k y $n \in N$ tiene orden finito l, entonces $(k, l) = 1$. Muestre que $M \odot N = 0$.

(k) Muestre que si M y N son grupos abelianos finitos, entonces $M \otimes N \cong M \odot N$.

Hassler Whitney
1907–1989, Estados Unidos-Suiza.

Whitney fue el primero en introducir explícitamente el producto tensorial de grupos abelianos, en *Tensor Products of Abelian Groups*, Duke Math. J. **4**, 495–528 (1938).