
ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre — 2007

Práctica 5: Módulos, II

1. Localización de módulos

1.1. Localización de módulos. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y sea M un A -módulo a izquierda.

- (a) Muestre que existe un A -módulo M_S y un homomorfismo de A -módulos $j_M : M \rightarrow M_S$ que satisfacen la siguiente propiedad:

Para cada homomorfismo $f : M \rightarrow N$ con codominio en un A -módulo N para el cual todas las aplicaciones $n \in N \mapsto sn \in N$ con $s \in S$ son isomorfismos, existe un único homomorfismo $\tilde{f} : M_S \rightarrow N$ tal que $f = \tilde{f} \circ j_M$.

- (b) El par (M_S, j_M) está determinados a menos de un isomorfismo canónico.
(c) El A -módulo M_S es de forma natural un A_S -módulo.
(d) Si M es un A -módulo tal que para todo $s \in S$ la aplicación $m \in M \mapsto sm \in M$ es biyectiva, entonces $j_M : M \rightarrow M_S$ es un isomorfismo.
(e) Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo de A -módulos, entonces existe un único morfismo $f_S : M_S \rightarrow N_S$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ j_M \downarrow & & \downarrow j_N \\ M_S & \xrightarrow{f_S} & N_S \end{array}$$

Si $S = A \setminus \mathfrak{p}$ para un ideal primo $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, entonces escribimos $M_{\mathfrak{p}}$ en vez de M_S .

1.2. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y sea M un A -módulo a izquierda finitamente generado. Entonces $M_S = 0$ sii existe $s \in S$ tal que $sM = 0$.

De un contraejemplo para esta equivalencia cuando M no es finitamente generado.

1.3. Exactitud de la localización.

- (a) Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado. Si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A -módulos, entonces

$$0 \longrightarrow M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

(b) En particular, si $M' \subset M$ es un submódulo de un A -módulo M , entonces M'_S puede ser considerado un submódulo de M_S .

1.4. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y M un A -módulo.

(a) Si P y Q son submódulos de M , entonces $(P + Q)_S = P_S + Q_S$.

(b) Si P y Q son submódulos de M , entonces $(P \cap Q)_S = P_S \cap Q_S$.

(c) Si $P \subset M$ es un submódulo, entonces hay un isomorfismo canónico $(M/P)_S \cong M_S/P_S$.

1.5. Propiedades locales. Sea A un anillo conmutativo.

(a) Sea M un A -módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $M = 0$;

(ii) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$; y

(iii) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(b) Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de A -módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es inyectivo;

(ii) $f_{\mathfrak{p}}$ es inyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$; y

(iii) $f_{\mathfrak{m}}$ es inyectivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(c) Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de A -módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es sobreyectivo;

(ii) $f_{\mathfrak{p}}$ es sobreyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$; y

(iii) $f_{\mathfrak{m}}$ es sobreyectivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(d) Consideremos una sucesión de A -módulos y morfismos de A -módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \quad (1)$$

tales que $gf = 0$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) La sucesión (1) es exacta.

(ii) Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \triangleleft A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} M''_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en \mathfrak{p} , es exacta.

(iii) Para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \triangleleft A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{m}}} M''_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en \mathfrak{m} , es exacta.

1.6. Soporte de un módulo. Sea A un anillo conmutativo. Si M es un A -módulo, el soporte de M es el conjunto

$$\text{supp } M = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Muestre que si M es finitamente generado, es

$$\text{supp } M = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : \mathfrak{p} \subset \text{ann } M\}.$$

2. Módulos libres, proyectivos e inyectivos

2.1. \mathbb{Q} no es un \mathbb{Z} -módulo libre.

2.2. Muestre que el grupo abeliano $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es proyectivo.

Sugerencia. Sea $M \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ el subgrupo de todos los elementos $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\{i \in \mathbb{N} : 2^n \nmid x_i\}| < \infty$. Entonces si $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es libre, M es libre de rango no numerable. Analice ahora el grupo abeliano $M/2M$.

2.3. *Bases duales.* Sea A un anillo y P un A -módulo a izquierda. Una *base dual* para P es un par $((x_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I})$ tal que $x_i \in P$ para todo $i \in I$, $f_i \in \text{hom}_A(P, A)$ para todo $i \in I$ y se tiene que

- (i) para todo $x \in P$, $|\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}| < \infty$, y
- (ii) para todo $x \in P$, es $x = \sum_{i \in I} f_i(x)x_i$.

Nótese que en la segunda condición la suma tiene sentido por la primera condición.

- (a) Muestre que un A -módulo P es proyectivo sii posee una base dual.
- (b) Muestre que un A módulo P es proyectivo y finitamente generado sii posee una base dual finita.

2.4. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y sea M un A -módulo a izquierda.

- (a) Si M es libre, entonces M_S es libre como A_S -módulo.
- (b) Si M es proyectivo, entonces M_S es proyectivo como A_S -módulo.
- (c) Si M es finitamente generado, entonces M_S es finitamente generado como A_S -módulo.

2.5. *Resoluciones proyectivas.* Sea A un anillo.

- (a) Para cada A -módulo M existe un diagrama

$$\cdots \rightarrow P_p \rightarrow P_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

de A -módulos y homomorfismos de A -módulos que es exacto y en el que cada P_p , $p \geq 0$, es proyectivo. Llamamos a este diagrama una *resolución proyectiva* de M .

- (b) De hecho, los A -módulos P_p , $p \geq 0$, pueden elegirse libres.
- (c) Si A es noetheriano a izquierda y M es finitamente generado, entonces los A -módulos P_p , $p \geq 0$, pueden elegirse finitamente generados.
- (d) Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo de A -módulos y

$$\cdots \rightarrow P_p \rightarrow P_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

y

$$\cdots \rightarrow Q_p \rightarrow Q_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow N \rightarrow 0$$

son resoluciones proyectivas de M y N , respectivamente, entonces existen morfismos $f_p : P_p \rightarrow Q_p$ para cada $p \geq 0$ que hacen conmutar el siguiente

diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_p & \longrightarrow & P_{p-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \\
 \cdots & \longrightarrow & Q_p & \longrightarrow & Q_{p-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

- (e) Encuentre resoluciones proyectivas para
- (i) un A -módulo proyectivo;
 - (ii) el \mathbb{Z} -módulo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$;
 - (iii) el $k[X]$ -módulo $S = k[X]/(X)$.

2.6. Para cada A -módulo a izquierda M , sea $M^* = \text{hom}_A(M, A)$ con su estructura de A -módulo a derecha obtenida de la estructura de A -bimódulo de A . Muestre que M es un proyectivo finitamente generado sii M^* lo es.

2.7. \mathbb{Z} no es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo.

2.8. Si A es un dominio de integridad y K es su cuerpo de fracciones, entonces K es un A -módulo inyectivo.

2.9. Sea G un grupo finito y k un cuerpo tal que $|G|$ es inversible en k . Muestre que todo $k[G]$ -módulo es proyectivo e inyectivo. ¿Todo $k[G]$ -módulo es necesariamente libre?

2.10. Si A un un anillo de división, todo A -modulo es inyectivo y proyectivo.

3. Condiciones de cadena

3.1. *Anillos de matrices.* Sea $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Un anillo A es ntheriano a izquierda sii $M_n(A)$ es ntheriano a izquierda.
- (b) Un anillo A es ntheriano a izquierda sii $M_n(A)$ es ntheriano a izquierda.

3.2. Un dominio integro artinianiano es un cuerpo.

- 3.3. (a) Un grupo abeliano artinianiano es de torsin.
- (b) Un grupo abeliano es artinianiano y ntheriano sii es finito.

3.4. *Extensiones finitas de anillos.* Sea B un subanillo de un anillo A tal que A es finitamente generado como B -mdulo a izquierda. Si B es ntheriano a izquierda, entonces A es ntheriano a izquierda.

3.5. *Algebras de matrices.* Sean A y B anillos y M y N un A - B -bimdulo y un B - A -bimdulo, respectivamente. Sea

$$T = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$$

el lgebra de matrices. Entonces T es ntheriana a derecha sii A y B son anillos ntherianos a derecha y M es un B -mdulo ntheriano y N es un A -mdulo ntheriano.

3.6. Polinomios de Laurent. Sea k un cuerpo y sea $A = k[X, X^{-1}]$ el anillo de polinomios de Laurent con coeficientes en k . Muestre que A es notheriano.

Sugerencia. Imite la demostracion del teorema de Hilbert para $k[X]$.

3.7. Extensiones de Ore. Sea A un anillo y sea $\sigma : A \rightarrow A$ un homomorfismo de anillos.

- (a) Muestre que existe exactamente una estructura de anillo sobre el grupo abeliano $B = A[X]$ de polinomios con coeficientes a izquierda en A en una variable X tal que

$$Xa = \sigma(a)X, \quad \forall a \in A.$$

Escribimos $A[X; \sigma]$ al anillo correspondiente.

- (b) Si σ es inyectivo y A es un dominio, entonces $A[X; \sigma]$ es un dominio.
 (c) Si σ es inyectivo y A es un anillo de division, entonces $A[X; \sigma]$ es un dominio de ideales principales.
 (d) Si σ es automorfismo y A es notheriano a izquierda (derecha), entonces $A[X; \sigma]$ es notheriano a izquierda (derecha).

3.8. Extensiones de Ore, II. Sea A un anillo y sea $\sigma : A \rightarrow A$ un homomorfismo de anillos. Una σ -derivacion de A es un homomorfismo de grupos $\delta : A \rightarrow A$ que satisface

$$\delta(ab) = \delta(a)\sigma(b) + a\delta(b), \quad \forall a, b \in A.$$

Si $\sigma = \text{id}_A$, decimos simplemente que δ es una derivacion de A .

- (a) Muestre que existe exactamente una estructura de anillo sobre el grupo abeliano $B = A[X]$ de polinomios con coeficientes a izquierda en A en una variable X tal que

$$Xa = \sigma(a)X + \delta(a), \quad \forall a \in A.$$

Escribimos $A[X; \sigma, \delta]$ al anillo correspondiente.

- (b) Si σ es inyectivo y A es un dominio, entonces $A[X; \sigma, \delta]$ es un dominio.
 (c) Si σ es inyectivo y A es un anillo de division, entonces $A[X; \sigma, \delta]$ es un dominio de ideales principales.
 (d) Si σ es automorfismo y A es notheriano a izquierda (derecha), entonces $A[X; \sigma, \delta]$ es notheriano a izquierda (derecha).

3.9. Sea $A = k[X]$, $\sigma = \text{id}_A : A \rightarrow A$ y $\delta = \frac{\partial}{\partial X} : A \rightarrow A$.

- (a) Muestre que δ es una derivacion de A .
 (b) Muestre que el álgebra de Weyl A_1 es isomorfa a $A[X; \sigma, \delta]$. En particular, concluya que A_1 es notheriana.



Reinhold Baer
1902–1979, Alemania y Suiza

Los trabajos más importantes de Baer fueron en teoría de grupos. En 1940 introdujo el concepto de módulo inyectivo.