Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2007

Práctica 4: Módulos

1. Módulos y morfismos

1.1. Sea A un anillo, $n \geq 1$ y $M \in M_{m,n}(A)$. Muestre que la multiplicación matricial da un morfismo de A-módulos

$$f : x \in A^n \mapsto Mx \in A^m.$$

1.2. Sea A un anillo.

(a) Sea M un A-módulo a izquierda. Si definimos un producto $M \times A^{\mathrm{op}} \to M$ poniendo $m \cdot a = am$, podemos dotar a M de una estructura de A^{op}-módulo a derecha. Lo notamos M^{op}.

(b) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos a izquierda, entonces $f : M^{\mathrm{op}} \to N^{\mathrm{op}}$ es un morfismo de A^{op}-módulos a derecha.

(c) Recíprocamente, todo A^{op}-módulo a derecha es de la forma M^{op} para algún A-módulo a izquierda M y todo morfismo de A^{op}-módulos está inducido como en la parte anterior.

1.3. Sean N y M dos $\mathbb{Q}$-módulos. Muestre que una función $f : N \to M$ es un morfismo de $\mathbb{Q}$-módulos sii es un morfism de grups abelianos.

1.4. Sea A un anillo y N, M dos A-módulos.

(a) Muestre que $\mathsf{hom}_A(M, N)$ es un grupo abeliano con suma dada por

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m), \qquad \forall f, g \in \mathsf{hom}_A(M, N), \ \forall m \in M.$$

(b) Sea $\mathsf{Z}(A)$ el centro de A. Definimos una operación

$$\mathsf{Z}(A) \times \mathsf{hom}_A(M, N) \to \mathsf{hom}_A(M, N)$$

poniendo

$$(a \cdot f)(m) = f(am), \qquad \forall f \in \mathsf{hom}_A(M, N), \ \forall a \in \mathsf{Z}(A), \ \forall m \in M.$$

Muestre que esto hace de $\mathsf{hom}_A(M, N)$ un $\mathsf{Z}(A)$-módulo.

(c) Muestre que para todo A-módulo M existe un isomorfismo de $\mathsf{Z}(A)$-módulos $\mathsf{hom}_A(A, M) \to M$.

1.5. *(a)* Sean A, B y C anillos y sean M un (A, B)-bimódulo y N un (A, C)-bimódulo. Muestre que el grupo abeliano $\mathsf{hom}_A(M, N)$ posee una única estructura de (B, C)-bimódulo tal que

$$(b \cdot f \cdot c)(m) = f(mb)c, \qquad \forall b \in B, \forall c \in C, \forall m \in M.$$

(b) Sea A un anillo y M un A-módulo a izquierda. Considerando a A como (A, A)-bimódulo, muestre que hay un isomorfismo de A-módulos a izquierda $\mathsf{hom}_A(A, M) \cong M$.

1.6. *Cambios de anillo.* Sea $\phi : A \to B$ un morfismo de anillos.

(a) Muestre que si definimos un porducto $A \times B \to B$ poniendo

$$a \cdot b = \phi(a)b$$

dotamos a B de una estructura de A-módulo a izquierda sobre B. De forma similar podemos obtener una estructura de A-módulo a derecha y de A-bimódulo sobre B.

(b) Sea M un B-módulo a izquierda. Muestre que el producto $A \times M \to M$ dado por $a \cdot m = \phi(a)m$ hace de M un A-módulo a izquierda. Lo notamos $\phi^*(M)$.

(c) Si $f : M \to N$ es un morfismo de B-módulos a izquierda, entonces $f : \phi^*(M) \to \phi^*(N)$ es un morfismo de A-módulos a izquieda. Lo notamos $\phi^*(f)$.

(d) Si M y N son B-módulos a izquierda, la aplicación

$$\phi^* : f \in \mathsf{hom}_B(M, N) \mapsto \phi^*(f) \in \mathsf{hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

(e) Si M, N y P son B-módulos a izquierda y $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son morfismos de B-módulos, entonces

$$\phi^*(g \circ f) = \phi^*(g) \circ \phi^*(f).$$

En particular, la aplicación $\phi^* : \mathsf{End}_B(M) \to \mathsf{End}_A(\phi^*(M))$ es un morfismo de anillos.

(f) De condiciones sobre ϕ que impliquen que la aplicación

$$\phi^* : \mathsf{hom}_B(M, N) \to \mathsf{hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

sea inyectiva (sobreyectiva) cualesquiera sean los B-módulos M y N.

1.7. Sea A un anillo, M un A-módulo a izquierda y sea $B = \mathsf{End}_A(M)$ el anillo de endomorfismos de M.

(a) Muestre que M es un B-módulo a derecha de manera natural y que con esa estructura resulta de hecho un (A, B)-bimódulo.

(b) ¿Qué relación hay entre A y $\mathsf{End}_B(M)$?

1.8. Sea A un anillo.

(a) Sea $f : M \to M'$ un morfismo de A-módulos a izquierda. Para cada A-módulo a izquierda definimos un aplicaciones

$$f_P^* : h \in \mathsf{hom}_A(M', P) \mapsto h \circ f \in \mathsf{hom}_A(M, P)$$

y

$$f_*^P : h \in \mathsf{hom}_A(P, M) \mapsto f \circ h \in \mathsf{hom}_A(P, M').$$

Se trata de morfismos de grupos abelianos.

(b) Sean $f : M \to M'$ y $g : M' \to M''$ morfismos de A-módulos. Entonces para cada A-módulo a izquierda P vale que

$$f_P^* \circ g_P^* = (g \circ f)_P^*$$

y

$$g_*^P \circ f_*^P = (g \circ f)_*^P.$$

(c) Una sucesión de A-módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

es exacta sii la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathsf{hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \mathsf{hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \mathsf{hom}_A(N, M'')$$

es exacta para todo A-módulo a izquierda N. ¿Hay un enunciado similar que involcre a los morfismos f_N^* y g_N^*?

(d) ¿Es cierto que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos a izquierda entonces

$$0 \longrightarrow \mathsf{hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \mathsf{hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \mathsf{hom}_A(N, M'') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos?

1.9. Un A-módulo M es simple sii para todo $m \in M \setminus 0$, $Am = M$.

1.10. *(a)* *Lema de Schur.* Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos.

i) Si M es simple, entonces f es o bien nula o bien inyectva.

ii) Si N es simple, entonces f es o bien nula o bien sobreyectiva.

iii) Si M y M son simples, entonces f es o bien nula o bien un isomorfismo.

(b) Si M es un A-módulo simple, $\mathsf{End}_A(M)$ es un anillo de división.

1.11. Sea A un dominio íntegro y sean $v_1, \dots, v_n \in A^n$. Sea $M \in M_n(A)$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$.

(a) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si $\det M \neq 0$.

(b) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores si $\det M \in A^\times$.

1.12. *(a)* Todo módulo de tipo finito posee un conjunto generador minimal.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto generador minimal de $\mathbb{Z}$ de cardinal n.

1.13. Sea k un cuerpo y V un k-espacio vectorial. Sea $f \in \mathsf{End}_k(V)$. Muestre que existe exactamente una estructura de $k[X]$-módulo a izquierda sobre V para la cual $k \subset k[X]$ actúa por multiplicación escalar y

$$X \cdot v = f(v), \qquad \forall v \in V.$$

1.14. Sea A un anillo y M un A-módulo a izquierda.

(a) El conjunto $\operatorname{ann} M = \{a \in A : am = 0, \ \forall m \in M\}$ es un ideal a izquierda de A. Si $\operatorname{ann} M = 0$, decimos que M es un A-módulo *fiel*.

(b) De ejemplos de módulos fieles.

2. Condiciones de cadena

2.15. Un A-módulo es finitamente generado si es isomorfo a un cociente de A^n para algún $n \in \mathbb{N}$-

2.16. Si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos a izquierda y M' y M'' son finitamente generados, entonces M es finitamente generados.

2.17. Sea A un anillo, M un A-módulo a izquierda finitamente generado y sea $f : M \to A^n$ un morfismo sobreyectivo de A-módulos. Muestre que $\ker f$ es finitamente generado.

2.18. Muestre que existen módulos finitamente generados y no Nötherianos y módulos tales que todos sus submódulos propios son finitamente generados pero que no son Nötherianos.

2.19. Un k-espacio vectorial V es nötheriano sii $\dim_k V < \infty$.

2.20. Un anillo principal a izquierda es Nötheriano a izquierda.

2.21. Sean A un anillo, M un A-módulo a izquierda y $f \in \operatorname{End}_A(M)$. Si $n \in \mathbb{N}_0$, pongamos $K_n = \ker f^n$ y $I_n = \operatorname{im} f^n$. Entonces

(a) $K_1 = K_2 \implies K_1 \cap I_1 = 0$;

(b) $I_1 = I_2 \implies K_1 + I_1 = M$;

(c) si M es Nötheriano, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $K_n \cap I_n = 0$;

(d) si M es Nötheriano y f es sobreyectivo, entonces f es un automorfismo.

2.22. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\sqrt{d} \in \mathbb{C}$ una raíz cuadrada de d. Muestre que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es nötheriano.

2.23. Sea k un cuerpo, V un k-espacio vectorial de dimensión infinita y $A = \operatorname{End}_k(V)$ el anillo de endomorfismos de V. Muestre que existe un A-módulo M no nulo tal que $M \cong M \oplus M$.

3. Algunos lemas usuales

3.24. *(a)* Sea

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos izquierdos en el que las filas son exactas. Entonces existe exactamente un morfismo $f'' : M'' \to N''$ que completa el diagrama preservando la conmutatividad.

(b) Si f' y f son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

3.25. *Lema de los cinco.* Consideremos un diagrama conmutativo de A-módulos izquierdos

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

y supongamos que las dos filas son exactas.

(a) Si α_1, α_2, α_4 y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 es un isomorfismo.

(b) Si α_1 es sobreyectivo y α_2 y α_4 son inyectivos, entonces α_3 es inyectivo.

(c) Si α_5 es inyectivo y α_2 y α_4 son sobreyectivos, entonces α_3 es sobreyectivo.

3.26. *Lema de los nueve.* Consideremos un diagrama de A-módulos izquierdos

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

en el que las tres columnas y las dos primeras (o las dos últimas) filas son exactas. Entonces la tercera fila también es exacta.

Bartel Leendert van der Waerden
1903–1996, Bélgica y Suiza.

van der Waerden publicó en 1930 su obra más conocida, el libro *Algebra*, basado en parte en notas de Emmy Nöther y Émil Artin, en el que que dio forma a lo que hoy entendemos por álgebra.