
ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre — 2007

Práctica 3: Localización

1. Localización

En estos ejercicios los anillos son conmutativos.

1.1. Sea A un anillo y sea $S \subset A^\times$ un subconjunto multiplicativamente cerrado de unidades de A . Entonces $A_S \cong A$.

1.2. Sea A un anillo y sea $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Si $0 \in S$, entonces $A_S \cong 0$.

1.3. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado e $I \subset A$ un ideal. Sea \bar{S} la imagen de S por la aplicación canónica $A \rightarrow A/I$. Entonces $(A/I)_{\bar{S}} \cong A_S/IA_S$.

1.4. Sea A un anillo, $S, T \subset A$ subconjuntos multiplicativamente cerrados de A y sea T' la imagen de T por la aplicación canónica $A \rightarrow A_S$. Sea $U = ST = \{st : s \in S, t \in T\}$.

Muestre que U es un conjunto multiplicativamente cerrado en A y que $(A_S)_T \cong A_U$.

1.5. (a) Sea X un espacio topológico y sea $A = C_{\mathbb{R}}(X)$ el anillo de las funciones reales continuas sobre X . Sea $x_0 \in X$ y pongamos $S = \{f \in A : f(x_0) \neq 0\}$. Muestre que S es multiplicativamente cerrado. ¿Es inyectiva la aplicación canónica $A \rightarrow A_S$? De no serlo, describa su núcleo.

(b) Supongamos que A es un dominio de interidad y $S \subset A$ es multiplicativamente cerrado. Muestre que la aplicación canónica $A \rightarrow A_S$ es inyectiva.

(c) Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Dé condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación canónica $A \rightarrow A_S$ sea inyectiva.

1.6. Sea A un anillo y $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. Muestre que $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativamente cerrado. En general, escribimos $A_{\mathfrak{p}}$ en lugar de $A_{A \setminus \mathfrak{p}}$.

1.7. Sea $A = C(\mathbb{R})$, $U = (0, 1)$ y $S = \{f \in A : \forall t \in U, f(t) \neq 0\}$.

(a) S es multiplicativamente cerrado en A .

(b) Sea $r : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(U)$ la restricción de funciones. Muestre que existe $\bar{r} : C(\mathbb{R})_S \rightarrow C(U)$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C(\mathbb{R}) & \xrightarrow{r} & C(U) \\ \text{can} \downarrow & \nearrow \bar{r} & \\ C(\mathbb{R})_S & & \end{array}$$

- [2] Además, verifique que \bar{r} es inyectiva.
 (c) Muestre que \bar{r} es sobreyectiva.

1.8. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y sea $f : A \rightarrow A_S$ la aplicación canónica.

- (a) Muestre que si $I \subset A_S$ es un ideal, entonces $f^{-1}(I)$ es un ideal de A .
 (b) De esta forma, se obtiene una aplicación $f^* : \text{Id}(A_S) \rightarrow \text{Id}(A)$ del conjunto de ideales de A_S al conjunto de ideales de A . Muestre que f^* preserva inclusiones e intersecciones y que es inyectiva.
 (c) Si $J \subset A$ es un ideal, entonces J está en la imagen de f^* sii $J = f^{-1}(JA_S)$ sii ningún elemento de S es un divisor de cero en A/J .
 (d) Muestre que $f^*(\text{Spec } A_S) \subset \text{Spec } A$ de manera que, por restricción, obtenemos una inyección $f^* : \text{Spec } A_S \rightarrow \text{Spec } A$. La imagen de esta aplicación es exactamente $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$.

1.9. Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado.

- (a) Si $I \subset A$ es un ideal maximal entre los que no intersecan a S , entonces I es primo.
 (b) Describa el nilradical de A_S .

1.10. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo y $\mathfrak{p} = (p)$ el ideal primo de \mathbb{Z} correspondiente. Muestre que si $I \subset \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ es un ideal no nulo, entonces existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que $I = p^r \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$.

1.11. Sea A un anillo y $T \subset A$ un subconjunto. Sea $X = \{x_t : t \in T\}$ un conjunto de variables indexadas por T y sea $A[X]$ en anillo de polinomios con variables en X . Sea $S \subset A$ el menor subconjunto multiplicativamente cerrado de A que contiene a T . Muestre que ay un isomorfismo

$$A_S \cong A[X] / \langle tx_t - 1 : t \in T \rangle.$$

[†]**1.12.** Sea A un anillo. Muestre que $S \subset A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado maximal sii $A \setminus S$ es un ideal primo minimal.

[†]**1.13.** Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Decimo que S es *saturado* si

$$ab \in S \iff a \in S \text{ y } b \in S.$$

Muestre que S es saturado sii $A \setminus S$ es unión de ideales primos.

1.14. Sea A un anillo. Describa el subconjunto $S \subset A$ multiplicativamente cerrado maximal tal que $A \rightarrow A_S$ es inyectivo.



Claude Chevalley
1909–1984, Francia

Chevalley fue uno de los primeros en considerar la construcción de la localización de anillos conmutativos arbitrarios, en 1944. Sus trabajos más importantes fueron en la teoría de cuerpos de clases, la geometría algebraica y la teoría algebraica de grupos Lie. Fue miembro del grupo Bourbaki desde su fundación, en 1934, y era—en ese momento—el miembro más joven.