
ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre — 2007

Práctica 1: Grupos

1. Definiciones

1.1. *Exponentes pequeños.* El *exponente* de un grupo G es el menor número e tal que para todo $g \in G$ se tiene $g^e = 1$.

[1] (a) Mostrar que un grupo G tal que $g^2 = 1$ para todo $g \in G$ es abeliano.

[3] [†](b) ¿Qué puede decir si se tiene en cambio que $g^3 = 1$?

[1] **1.2.** Encontrar todos los grupos de orden a lo sumo 6.

[2] [†]**1.3.** Mostrar que los tres axiomas de grupo—la asociatividad, la existencia de elemento neutro y la existencia de inversos—son independientes.

2. Ejemplos

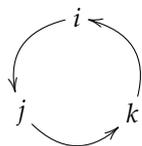
[1] **2.1.** (a) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbb{G}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Mostrar que \mathbb{G}_n , con respecto al producto de \mathbb{C} es un grupo abeliano cíclico.

[1] (b) Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Mostrar que S^1 , con respecto al producto de \mathbb{C} , es un grupo abeliano. ¿Es cíclico?

[1] **2.2.** Sea \mathbb{H} el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por la siguiente ecuaciones:

$$\begin{aligned}i \cdot j &= k, & j \cdot k &= i, & k \cdot i &= j, \\j \cdot i &= -k, & k \cdot j &= -i, & i \cdot k &= -j, \\i \cdot i &= j \cdot j = k \cdot k &= -1,\end{aligned}$$

y la regla usual de los signos. Mostrar que (\mathbb{H}, \cdot) es un grupo no abeliano. Llamamos a \mathbb{H} el *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de \mathbb{H} .



[1] **2.3.** Sea k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Ponemos

$$\mathrm{GL}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A \neq 0\}$$

y

$$\mathrm{SL}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A = 1\}.$$

Mostrar que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. Descríbalos para $n = 1$. ¿Cuándo son abelianos?

- [1] **2.4. Grupo opuesto.** Sea G un grupo. Sea (G^{op}, \cdot) tal que $G^{\text{op}} = G$ como conjunto, y el producto es

$$\cdot : (g, h) \in G^{\text{op}} \times G^{\text{op}} \mapsto hg \in G^{\text{op}}.$$

Mostrar que (G^{op}, \cdot) es un grupo.

2.5. Sea G un grupo y X un conjunto.

- [1] (a) Sea $G^X = \{f : X \rightarrow G\}$ dotado del producto $\cdot : G^X \times G^X \rightarrow G^X$ dado por

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \quad \forall f, g \in G^X, \forall x \in X.$$

Mostrar que G^X es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

- [1] (b) Sea $x_0 \in X$ y sea $H_{x_0} = \{f \in G^X : f(x_0) = 1\}$. Mostrar que H_{x_0} es un subgrupo de G . ¿Es normal?

- [1] **2.6. Producto directo.** Sean G y H dos grupos. Consideremos la operación \cdot sobre el conjunto $K = G \times H$ dada por

$$\cdot : ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \in K \times K \mapsto (g_1g_2, h_1h_2) \in K.$$

Mostrar que K es un grupo. Llamamos a K el *producto directo de G y H* y lo notamos $G \times H$.

2.7. \mathbb{F}_p -espacios vectoriales.

- [2] (a) Sea G un grupo abeliano y sea p un número primo. Supongamos que todo elemento de G tiene orden p . Mostrar que es posible definir una multiplicación $\cdot : \mathbb{F}_p \times G \rightarrow G$ por escalares de \mathbb{F}_p de manera que $(G, +, \cdot)$ resulte un \mathbb{F}_p -espacio vectorial.
- [2] (b) Supongamos además que G es finito. Mostrar que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{n \text{ veces}}.$$

3. Subgrupos

- [1] **3.1.** Sea G un grupo y $H \subset G$ un subconjunto. Mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) H es un subgrupo de G .
 (ii) H es no vacío y cualesquiera sean $x, y \in H$, es $xy^{-1} \in H$.

Si además G es finito, estas afirmaciones son equivalentes a:

- c) H es no vacío y cualesquiera sean $x, y \in H$, es $xy \in H$.

Dar un contraejemplo para esta última equivalencia cuando G es infinito.

3.2. Sea G un grupo y H_1 y H_2 subgrupos de G .

- [1] (a) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G .

- [1] (b) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G sii $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.
- [2] 3.3. Dado un grupo G , ¿es el subconjunto de elementos de orden finito un subgrupo de G ?
- 3.4. Sea G un grupo.
- [1] (a) Sea \mathcal{H} una familia de subgrupos de G . Mostrar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo de G .
- [1+] (b) Sea ahora $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo de G que contiene a X . Describirlo en término de los elementos de X .

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo de G generado por X* y se denota $\langle X \rangle$. Si $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, escribimos $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ en lugar de $\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$.

- [1] 3.5. Sea G un grupo, $X \subset G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$ y sea N un subgrupo de G . Mostrar que N es normal en G sii $xNx^{-1} \subset N$ para todo $x \in X$.
- [1+] 3.6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in \mathbb{G}_{2^n}$ una raíz primitiva 2^n -ésima. Consideremos las matrices

$$R = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea $\mathbb{H}_n = \langle R, S \rangle$ el subgrupo generado por R y S en $\text{GL}_2(\mathbb{C})$. Llamamos a \mathbb{H}_n el n -ésimo grupo de cuaterniones generalizados.

Determinar el orden de \mathbb{H}_n y listar sus elementos.

- [1] 3.7. (a) Sea $G = \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ y sean $\alpha, \beta \in G$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Muestre que $\alpha^4 = \beta^3$, pero que $\alpha\beta$ tiene orden infinito. Así, $\langle \alpha, \beta \rangle$ es infinito.

Este ejemplo muestra que finitos elementos de orden finito pueden generar un subgrupo infinito.

- (b) Determine $\langle \alpha, \beta \rangle$.

3.8. Generación de S_n .

- [1] (a) Mostrar que
- (i) $S_n = \langle \{(ij) : 1 \leq i < j \leq n\} \rangle$;
 - (ii) $S_n = \langle \{(1i) : 1 \leq i \leq n\} \rangle$;
 - (iii) $S_n = \langle \{(i \ i+1) : 1 \leq i < n\} \rangle$;
 - (iv) $S_n = \langle (12), (123 \dots n) \rangle$;
- [1+] †(b) Sea $\mathcal{T} = \{(ij) : 1 \leq i < j \leq n\}$ el conjunto de todas las transposiciones. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $T \subset \mathcal{T}$ para que $S_n = \langle T \rangle$.

3.9. Sea G un grupo.

- [1] (a) Sea \mathcal{H} una familia de subgrupos normales de G . Mostrar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo normal de G .
- [1] (b) Sea $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo normal de G que contiene a X . Describirlo en término de los elementos de X .

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo normal de G generado por X* . En general, este subgrupo no coincide con el subgrupo generado por X , construido en 3.4.

- [1] (c) Supongamos que $X \subset G$ es un conjunto tal que, cualquiera sea $g \in G$, es $gXg^{-1} \subset X$. Mostrar que entonces el subgrupo normal generado por X coincide con el subgrupo generado por X .

3.10. (a) Sea G un grupo y sea $N \subset G$ un subgrupo tal que $gNg^{-1} \subset N$ para todo $g \in G$. Muestre que N es normal.

(b) Sea $G = \text{GL}_2(\mathbb{Q})$ y $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\} \subset G$. Entonces H es un subgrupo de G . Sea ahora $g = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Muestre que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

3.11. Si G es un grupo y $A, B \subset G$ son subconjuntos, definimos

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Consideremos un grupo G y $A, B \subset G$ dos subconjuntos arbitrarios.

- [1] (a) AB es un subgrupo de G sii $AB = BA$.
- [1] (b) $G = AB$ sii $G = \langle A, B \rangle$ y $AB = BA$.
- [1] (c) Si $AB = BA$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $AB \cap C = A(B \cap C)$.
- [1] (d) Si $G = AB$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $C = A(B \cap C)$.

3.12. Sea G un grupo. Si $a, b \in G$, escribimos $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$; $[a, b]$ es el *conmutador de a y b* . Claramente $[a, b] = 1$ sii a y b conmutan, así que en cierta forma $[a, b]$ mide la no-conmutatividad de a y b .

- [1] (a) Sea $X = \{[a, b] : a, b \in G\}$ y sea $G' = \langle X \rangle$ el subgrupo generado por X en G . Mostrar que G' es normal en G . Llamamos a G' es *subgrupo derivado de G* y lo escribimos $[G, G]$.
- [1] (b) G es abeliano sii $[G, G] = 1$.
- [1] (c) Determinar $[G, G]$ cuando G es \mathbb{H} o un grupo diedral D_n .

Un grupo es *perfecto* si coincide con su subgrupo derivado.

- [3] [†](d) Sea k un cuerpo finito. Mostrar que $[\text{GL}_n(k), \text{GL}_n(k)] = \text{SL}_n(k)$ con la excepción de $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. Mostrar que $\text{SL}_n(k)$ es perfecto con la excepción de $\text{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ y $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$. ¿Qué sucede en los casos excepcionales?
- [1] **3.13.** (a) Sea G un grupo y sea $Z(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$. Mostrar que $Z(G)$ es un subgrupo normal de G . Llamamos a $Z(G)$ el *centro de G* y decimos que los elementos de $Z(G)$ son *centrales* en G .
- [1] (b) Sea G un grupo y $X \subset G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Mostrar que es

$$Z(G) = \{g \in G : gx = gx \text{ para todo } x \in X\}.$$

- [1+] (c) Encontrar el centro de un grupo abeliano, de D_n para cada $n \geq 1$, de \mathbb{H} , de S_n para cada $n \geq 1$, de $GL_n(R)$ para cada $n \geq 1$ y $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p\}$.
- [1] (d) Sea G un grupo y X un conjunto. Determinar el centro de G^X .
- [1] **3.14.** Sea G un grupo y H un subgrupo abeliano de G . Mostrar que $HZ(G)$ es un subgrupo abeliano de G .
- 3.15.** Sea G un grupo.
- [1] (a) Sea $g \in G$. El *centralizador de g en G* es el subconjunto $C(g) = \{h \in G : gh = hg\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G y que es, en efecto, el subgrupo más grande de G que contiene a g y en el que g es central.
- [1] (b) Sea $N \subset G$ un subconjunto. El *centralizador de N en G* es el subconjunto $C(N) = \{h \in G : nh = hn \text{ para cada } n \in N\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G .
- [1] (c) Muestre que si $N \subset G$ es un subconjunto, $C(\langle N \rangle) = C(N)$.
- [1] (d) Sea $H \subset G$ un subgrupo de G . El *normalizador de H en G* es el subconjunto $N(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G . Mostrar, más aún, que H es un subgrupo normal de $N(H)$.
- [1] (e) Si $N \subset G$ es un subconjunto normal (es decir, si para cada $g \in G$, gNg^{-1}), entonces $Z(N)$ es un subgrupo normal de G .
- [1+] **3.16.** Si $g = (i_1 i_2 \cdots i_{k-1} i_k) \in S_n$ es un ciclo de orden k , determinar $C(g)$.
- 3.17.** Sea G un grupo y S y T subconjuntos de G tales que $S \subset T$. Entonces:
- [1] (a) $C(S) \supset C(T)$;
- [1] (b) $C(C(S)) \supset S$; y
- [1+] (c) $C(C(C(S))) = C(S)$.
- 3.18.** Sea G un grupo y $g \in G$. Entonces:
- [1] (a) $g \in C(g)$;
- [1] (b) $C(C(g)) = Z(C(g))$;
- [1+] (c) $C(g) \subset C(h)$ sii $h \in Z(C(g))$; y
- [1+] (d) $C(g) \subset C(h)$ sii $Z(C(g)) \supset Z(C(h))$.
- 3.19.** Sean G un grupo y H y K subgrupos de G .
- [1] (a) Si alguno de H o K es normal en G entonces HK es un subgrupo.
- [1] (b) Si los dos son normales, entonces $HK = KH$ y se trata de un subgrupo normal de G .
- [1] **3.20.** Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G . Mostrar que $[N, G] \subset N$.
- [†]**3.21.** El objetivo de este ejercicio es dar un ejemplo de que la normalidad de subgrupos no es transitiva.
- [1] (a) Sea G el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ con $ad - bc \neq 0$. Mostrar que G , con respecto a la composición de funciones, es un grupo.

- [1] (b) Sea T el subconjunto de G formado por las funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + e \\ y + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $e, f \in \mathbb{R}$. Mostrar que T es un subgrupo *normal* en G .

- [1] (c) Sea L el subconjunto de T formado por las funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + e \\ y + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $e, f \in \mathbb{Z}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de T ; como T es abeliano, L es normal en T .

- [1] (d) Mostrar que L no es normal en G .

- [1+] 3.22. Encontrar todos los subgrupos de D_4 . Clasifíquelos bajo isomorfismo y determinar cuáles son normales.

- [2-] 3.23. Sea \mathbb{H} el grupo de los cuaterniones. Mostrar que posee un único elemento de orden 2 y que éste es central. Deducir que $H \not\cong D_4$ y que todo subgrupo de H es normal.

Un grupo no abeliano con esta propiedad se dice *Hamiltoniano*. El siguiente teorema de Reinhold Baer (1902–1979) describe completamente esta clase de grupos:

Teorema. (R. Baer, *Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe*, S. B. Heidelberg. Akad. Wiss. 2 (1933), 12-17) *Un grupo finito es hamiltoniano sii es isomorfo a $\mathbb{H} \times A$ para algún grupo abeliano que no tiene elementos de orden 4.*

- [2-] 3.24. Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G de índice finito n . Mostrar que si $g \in G$, entonces $g^n \in N$. Dar un ejemplo para mostrar que esto puede ser falso si N no es normal.

- [2-] 3.25. (a) Mostrar que un grupo no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

- [2-] (b) Sea G un grupo cíclico y $g \in G$ un generador. Sea $n = |G|$ y sea p un número primo tal que $p \mid n$. Entonces $\langle g^p \rangle$ es un subgrupo maximal de G .

- [2] (c) Mostrar que un grupo finito que posee un solo subgrupo maximal es cíclico que tiene como orden una potencia de un número primo.

- [2] †3.26. Sea G un grupo finito y H el subgrupo de G generado por los elementos de orden impar. Entonces H es normal y tiene índice una potencia de 2.

†3.27. *Subgrupo de Frattini.* Sea G un grupo. Sea \mathcal{M} el conjunto de subgrupos propios maximales de G . Si $\mathcal{M} \neq \emptyset$, ponemos $\Phi(G) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$; si, en cambio, $\mathcal{M} = \emptyset$, ponemos $\Phi(G) = G$. $\Phi(G)$ es el *subgrupo de Frattini*, en honor de Giovanni Frattini (1852–1925, Italia).

- [1] (a) Determinar el subgrupo de Frattini de \mathbb{Z}_{p^2} si p es primo.

Un elemento $g \in G$ es un *no-generador* si siempre que $X \subset G$ es un conjunto generador de G y $g \in X$, entonces $X \setminus \{g\}$ también genera a G .

- [3] (b) Mostrar que $\Phi(G)$ es el conjunto de elementos no-generadores de G .
- [1] (c) Mostrar que $\Phi(G)$ es normal.
- [2] **3.28.** Sea G un grupo y H un subgrupo propio de G . Entonces $\langle G \setminus H \rangle = G$.
- [2-] **3.29.** Sea $G \subset \mathbb{C}^\times$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo \mathbb{C}^\times . Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = \mathbb{G}_n$ es el grupo de las raíces n -ésimas de la unidad.

4. Homomorfismos

- [1] **4.1.** Sea G un grupo y X un conjunto. Sea $x_0 \in X$ y sea

$$\text{ev}_{x_0} : f \in G^X \mapsto f(x_0) \in G.$$

Mostrar que se trata de un homomorfismo de grupos. Determinar su núcleo e imagen.

- [1+] **4.2.** Mostrar que cualquiera sea el grupo G , existe un isomorfismo $G \cong G^{\text{op}}$ entre G y su grupo opuesto.
- [1] **4.3.** Sean G y H grupos, y sea $\text{hom}_{\text{Grp}}(G, H)$ el conjunto de todos los homomorfismos $f : G \rightarrow H$. ¿Se trata en general de un subgrupo de H^G ? Encuentre condiciones sobre H que garanticen que lo sea.
- [1] **4.4.** Muestre que el grupo \mathbb{H} del ejercicio 2.2 y el grupo \mathbb{H}_1 del ejercicio 3.6 son isomorfos.
- 4.5.** Sea G un grupo.
- [1] (a) Sea $g \in G$ e $\text{inn}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$. Mostrar que $\text{inn}_g \in \text{Aut}(G)$.
- [1] (b) Mostrar que la aplicación $\text{inn} : g \in G \mapsto \text{inn}_g \in \text{Aut}(G)$ es un homomorfismo de grupos.
- [1] (c) Describir el núcleo de inn . Los automorfismos que están en la imagen de G se llaman *automorfismos interiores* y la imagen misma se denota $\text{Inn}(G)$.
- [1] (d) Mostrar que $\text{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\text{Aut}(G)$.
- [2] **4.6.** Sea G un grupo finito. Supongamos que existe $f \in \text{Aut}(G)$ tal que $f^2 = 1$ y f no deja fijo ningún elemento de G aparte de 1. Entonces cada $g \in G$ es $f(g) = g^{-1}$ y G es abeliano de orden impar.
- Sugerencia.* Muestre la aplicación $\phi : g \in G \mapsto g^{-1}f(g) \in G$ es biyectiva y muestre que $f(g) = g^{-1}$ escribiendo a g en la forma $h^{-1}f(h)$ para algún elemento h de G .
- 4.7.** Sea G un grupo. Un subgrupo H de G se dice *característico* si cualquiera sea $f \in \text{Aut}(G)$, $f(H) \subset H$.
- [1] (a) Muestre que si $H \subset G$ es un subgrupo característico, entonces para cada $f \in \text{Aut}(G)$ es $f(H) = H$.
- [1] (b) Muestre que $Z(G)$ y $[G, G]$ son característicos.
- [1] (c) $\Phi(G)$ es un subgrupo característico de G .
- [1] (d) Si H es un subgrupo característico de G , entonces H es normal en G .
- [1] (e) Si un grupo G posee un único subgrupo H de un orden dado, éste es característico.

- [1] (f) Si H es un subgrupo característico en G y K es un subgrupo característico en H , entonces H es un subgrupo característico de G . Comparar con 3.21.
- [1] (g) Si $N \subset G$ es un subconjunto característico (es decir, si para cada $f \in \text{Aut}(G)$, $f(N) \subset N$), entonces $\langle N \rangle$ y $C(N)$ son subgrupos característicos de G .

Un subgrupo H de G se dice *totalmente característico* si $f(H) \subset H$ siempre que $f \in \text{End}(G)$.

- [1] (h) Un subgrupo totalmente característico es característico.
- [2] (i) Dar ejemplos de un subgrupo totalmente característico y de un subgrupo característico pero no totalmente característico.
- [1+] (j) Todos los subgrupos de un grupo cíclico son totalmente invariantes. ¿Vale la recíproca?

- [1+] [†]4.8. (a) Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G de índice finito. Entonces $L = H \cap K$ también tiene índice finito.

Sugerencia. Para verlo muestre que es posible definir una aplicación $\phi : G/L \rightarrow G/H \times G/K$ de manera que $\phi(xL) = (xH, xK)$ y muestre que ésta es inyectiva.

- [1+] (b) El conjunto de elementos de un grupo que poseen un número finito de conjugados es un subgrupo característico.

4.9. Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos.

- [1] (a) Si H es abeliano, entonces $[G, G] \subset \ker f$.
- [1] (b) Mostrar que $f([G, G]) \subset [H, H]$. En particular, concluya que $[G, G]$ es un subgrupo característico de G .

4.10. Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. ¿Es cierto en general que $f(Z(G)) \subset Z(H)$? En caso negativo, de condiciones suficientes que garanticen esta inclusión. Bajo esas condiciones, ¿es $f(Z(G)) = Z(H)$?

4.11. Sea G un grupo.

- [1] (a) Mostrar que la función $\text{ev}_1 : f \in \text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$ es una biyección.
- [1] (b) Describir $\text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}^2, G)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}_n, G)$.

- [1] 4.12. (a) Determinar $\text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ y $\text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Q}, G)$ para un grupo finito G .
- [1] (b) Describir la imagen $D(G)$ de $\text{ev}_1 : f \in \text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Q}, G) \mapsto f(1) \in G$.
- [1] (c) Mostrar que cuando G es abeliano, $D(G)$ es un subgrupo característico de G .

4.13. Sea G un grupo.

- [1] (a) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.
- [1] (b) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.
- [1] (c) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $g \in G \mapsto g^2 \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

- [1+] 4.14. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Si $(m, n) = 1$, entonces $\text{hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ es trivial. ¿Qué sucede en general?

4.15. Sea G un grupo finito y $\phi : G \rightarrow G$ un endomorfismo de G .

- [1+] (a) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$, entonces $\phi^m(G) = \phi^n(G)$. Sea $\alpha = \phi^n$.
- [2] (b) Mostrar que $\text{im } \alpha$ es normal o dar un contraejemplo.
- [1+] **4.16.** Usando el hecho que $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ permuta los elementos no nulos de \mathbb{F}_2^2 , encuentre un isomorfismo $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.
- [1] **4.17.** (a) Sea G un grupo y sea $X \subset G$ un subconjunto tal que $\langle X \rangle = G$. Sea $f \in \text{End}(G)$ tal que $f(x) = x$ para todo elemento $x \in X$. Entonces $f = \text{id}_G$.
- [1+] (b) Sea X el conjunto de los elementos de orden 2 de S_3 . Muestre que cada automorfismo de S_3 induce una permutación de X y deduzca que $\text{Aut}(S_3) \cong S_3$.

4.18. Sea $n \geq 2$. Consideramos el polinomio *discriminante*

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

Si $\pi \in S_n$ es una permutación de $\{1, \dots, n\}$, definimos

$$\varepsilon(\pi) = \frac{\Delta(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})}{\Delta(x_1, \dots, x_n)}.$$

- [1] (a) Mostrar que cualquiera sea $\pi \in S_n$, es $\varepsilon(\pi) \in \{\pm 1\}$.
- [1] (b) Mostrar que $\varepsilon : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ es un homomorfismo de grupo si dotamos a $\{\pm 1\}$ del producto usual.

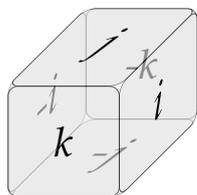
El subgrupo $A_n = \ker \varepsilon$ es el n -ésimo grupo *alternante*.

- [1] (c) Describir A_2 y A_3 .
- [1] (d) Sea $\tau = (ij) \in S_n$ una transposición. Determinar el valor de $\varepsilon(\tau)$.
- [2-] (e) Recordemos que todo elemento $\pi \in S_n$ puede ser escrito—de muchas maneras—como producto de transposiciones. Muestre que la paridad del número de transposiciones empleadas depende solamente de π .

Una permutación que puede escribirse de alguna forma como un producto de un número par de transposiciones se dice *par*.

4.19. *Automorfismos de \mathbb{H} .*

- [1] (a) Determine todos los automorfismos interiores de \mathbb{H} .
- [2] (b) De ejemplos de automorfismos de \mathbb{H} no interiores.
- [2] (c) Muestre que $\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong S_4$.



[†]**4.20.** *Automorfismos de S_n .*

- (a) Sea $\phi \in \text{Aut}(S_n)$ y sea $g = (123)$. Mostrar que $\phi(g)$ es un producto de 3-ciclos disjuntos, que $\phi(\text{cl}(g)) \subset \text{cl}(\phi(g))$ y que, de hecho, la restricción $\phi : \text{cl}(g) \rightarrow \text{cl}(\phi(g))$ es una biyección.

(b) Mostrar que

$$|\text{cl}(g)| = \frac{n!}{3(n-3)!}$$

y que si $\phi(g)$ es producto de r 3-ciclos disjuntos,

$$|\text{cl}(\phi(g))| = \frac{n!}{3^r r!(n-3r)!}.$$

(c) Mostrar que o bien $r = 1$ o bien $r = 2$ y $n = 6$.

Supongamos desde ahora que $n \neq 6$.

(d) La imagen de todo 3-ciclo por ϕ es un 3-ciclo.

(e) Sea $3 \leq i \leq n$ y supongamos que $\phi((123)) = (\alpha\beta\gamma)$ y $\phi((12i)) = (\alpha'\beta'\gamma')$. Muestre que $(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma')$ tiene orden dos y use esto para concluir que $|\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'\}| = 4$.

(f) Muestre que existen $\alpha, \beta, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ distintos de manera que para cada $3 \leq i \leq n$ es $\phi((12i)) = (\alpha\beta\gamma_i)$.

(g) Sea $\pi \in S_n$ tal que $\pi(1) = \alpha$, $\pi(2) = \beta$ y $\pi(i) = \gamma_i$ para cada $3 \leq i \leq n$. Muestre que $\phi(x) = \pi x \pi^{-1}$.

(h) Muestre que $\text{inn} : S_n \rightarrow \text{Aut}(S_n)$ es un isomorfismo.

(i) Determine $\text{Aut}(S_6)$.

5. Cocientes

5.1. Mostrar que

(a) $\mathbb{C}^\times / \mathbb{R}^+ \cong S^1$;

(b) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$ cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$;

(c) $\text{GL}_n(k) / \text{SL}_n(k) \cong k^\times$ si k es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$;

(d) $S^1 / \mathbb{G}_n \cong S^1$ si $n \in \mathbb{N}$;

(e) si $m|n$, $\mathbb{G}_n / \mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_{n/m}$.

5.2. Si G es un grupo no abeliano, entonces $G/Z(G)$ no es cíclico.

Sugerencia. Use 3.14.

5.3. Muestre que $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$.

5.4. Si G es un grupo y H y K son subgrupos normales de G , muestre que $G/(H \cap K)$ es isomorfo a un subgrupo de $G/H \times G/L$.

5.5. Dado un grupo G , el grupo $\text{Out}(G)$ de automorfismos exteriores de G es el cociente $\text{Aut}(G) / \text{Inn}(G)$; recordemos que en el ejercicio 4.5(d) vimos que $\text{Inn}(G)$ es normal en $\text{Aut}(G)$. Es importante observar que los elementos de $\text{Out}(G)$ no son automorfismos de G .

Determinar $\text{Out}(G)$ cuando $G \in \{S_3, S_4, \mathbb{H}\}$.

5.6. Sea G un grupo y sea H un subgrupo no normal. Mostrar que el conjunto de coclases izquierdas de H en G no forma un grupo bajo la multiplicación usual.

6. Productos

6.1. Sean U y V dos grupos. Sean además $f : U \rightarrow W$ y $g : V \rightarrow W$ dos homomorfismos de grupos. Entonces la aplicación $h : (u, v) \in U \times V \mapsto f(u)g(v) \in K$ es un homomorfismo de grupos sii todo elemento de $f(U)$ conmuta con todo elemento de $h(V)$.

6.2. Si G y H son grupos, determine $Z(G \times H)$.

6.3. *Producto directo interno.* Sea G un grupo.

(a) Sean N y M dos subgrupos normales de G y supongamos que $N \cap M = 1$ y $G = NM$. Mostrar que entonces es $G \cong N \times M$.

(b) Supongamos que G es grupo finito de orden mn con $(m, n) = 1$. Si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m , entonces G es isomorfo al producto directo de N y M .

†(c) Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(N_i)_{i=1}^k$ una familia de subgrupos normales de G tales que $G = \langle \bigcup_{i=1}^k N_i \rangle$ y para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que

$$N_j \cap \left\langle \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq j}} N_i \right\rangle = 1.$$

Mostrar que entonces $G \cong N_1 \times \dots \times N_k$.

†(d) Otra vez, supongamos que G es finito y sean N_1, \dots, N_k subgrupos normales de G de órdenes r_1, \dots, r_k tales que $(r_i, r_j) = 1$ si $1 \leq i, j \leq k$ y $|G| = r_1 \dots r_k$. Entonces $G \cong N_1 \times \dots \times N_k$.

6.4. *Producto semi-directo.*

(a) Sean G y N grupos y sea $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(N)$ un homomorfismo de grupos. Sea $K = N \rtimes G$ y consideremos el producto en K dado por

$$(n, g) \cdot (n', g') = (n\theta(g)(n'), gg'), \quad \forall (n, g), (n', g') \in K.$$

Mostrar que, con respecto a este producto, K es un grupo.

Llamamos al grupo K construido el *producto semi-directo (o cruzado) de N por G con respecto a θ* y lo notamos $N \rtimes_{\theta} G$.

(b) Encontrar homomorfismos ‘naturales’ de grupo $\iota : N \rightarrow N \rtimes_{\theta} G$ y $\pi : N \rtimes_{\theta} G \rightarrow N$ tales que ι sea inyectivo, π sea sobreyectivo e $\text{im } \iota = \ker \pi$.

(c) Mostrar que si $\theta = 1$ es el homomorfismo trivial, $N \rtimes_{\theta} G \cong N \times G$ es simplemente el producto directo.

6.5. *Producto semi-directo interno.* Sea K un grupo y sean G y N subgrupos de K con N normal en K . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $K = NG$ y $N \cap G = \{1\}$;

(b) $K = GN$ y $N \cap G = \{1\}$;

(c) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de N por uno de G .

- (d) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de G por uno de N .
- (e) La composición de la inclusión $\text{incl} : G \hookrightarrow K$ con la proyección canónica $\text{can} : K \twoheadrightarrow K/N$ es un isomorfismo $\tau : G \cong K/N$.
- (f) Existe un homomorfismo $\sigma : K \rightarrow N$ que se restringe a la identidad de N y cuyo núcleo es N .

Además, cuando estas afirmaciones valen, existe un homomorfismo de grupos $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(N)$ y un isomorfismo de grupos $\xi : N \rtimes_{\theta} G \rightarrow K$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{\iota} & N \rtimes_{\theta} G & \xrightarrow{\pi} & G \\
 \downarrow & & \downarrow \xi & & \downarrow \tau \\
 N & \xrightarrow{\text{incl}} & K & \xrightarrow{\text{can}} & K/N
 \end{array}$$

Los homomorfismos ι y π del diagrama fueron construidos en el ejercicio 6.4.

6.6. Mostrar que $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}_2$ para un homomorfismo $\theta : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ apropiado.

6.7. Mostrar que S_n es el producto semi-directo de A_n y $\langle(12)\rangle$.

†6.8. Mostrar que \mathbb{H} no puede ser escrito como un producto semi-directo de forma no trivial.

†6.9. Sea G un grupo finito y $\phi : G \rightarrow G$ un endomorfismo de G y α el endomorfismo de G construido en el ejercicio 4.15. Mostrar que G es el producto semi-directo de $\ker \alpha$ e $\text{im } \alpha$.

7. Acciones

7.1. Si un grupo G actúa sobre un conjunto finito X , el *carácter* de X es la aplicación $\chi_X : G \rightarrow \mathbb{N}_0$ dada por

$$\chi_X(g) = |\{x \in X : gx = x\}|, \quad \forall g \in G.$$

Si no hay ambigüedad sobre X , escribimos simplemente χ .

(a) Si G actúa transitivamente sobre X , es muestre que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = 1.$$

Sugerencia. Considere el conjunto $S = \{(g, x) \in G \times X : gx = x\}$ y cuente sus elementos de dos formas distintas.

(b) En general, si la acción no es necesariamente transitiva, es

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = |X/G|.$$

Aquí, X/G es el conjunto de órbitas de G en X .

- †(c) Si G actúa transitivamente sobre X y $x_0 \in X$, entonces, si G_{x_0} es el estabilizador de x_0 en G , es

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)^2 = |X/G_{x_0}|.$$

Sugerencia. Una forma de hacer esto consiste en contar los elementos del conjunto $S = \{(g, x, y) \in G \times X \times X : gx = x, gy = y\}$ de dos formas distintas.

7.2. Grupos lineales finitos. Sea k un cuerpo finito de q elementos.

- (a) Sea $V = k^2$ el k -espacio vectorial de vectores columna y sea X el conjunto de vectores no nulos de V . Mostrar que la acción de $\text{GL}_2(k)$ sobre V por multiplicación a izquierda preserva a X y que la acción de $\text{GL}_2(k)$ sobre X es transitiva.
- (b) Sea $v_0 = (1, 0)^t \in X$. Determinar el estabilizador $\text{GL}_2(k)_{v_0}$ de v_0 en $\text{GL}_2(k)$.
- (c) Mostrar que $|\text{GL}_2(k)| = (q^2 - 1)(q^2 - q)$.
- †(d) Más generalmente, mostrar que si $n \in \mathbb{N}$, es

$$|\text{GL}_n(k)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

- †(e) Sea $n \in \mathbb{N}$. Muestre que el morfismo $\det : \text{GL}_n(k) \rightarrow k^\times$ es sobreyectivo y concluya que

$$|\text{SL}_n(k)| = \frac{1}{q-1} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

7.3. Subgrupos grandes.

- (a) Sea G un grupo finito y H un subgrupo de índice 2. Construya explícitamente un homomorfismo de grupos $f : G \rightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $\ker f = H$, mostrando en particular que H es normal.

El objetivo de lo que sigue es obtener una prueba de la siguiente proposición que generaliza a este resultado:

Proposición. Sea G un grupo finito, sea p el menor número primo que divide a $|G|$ y sea H un subgrupo de G de índice p . Entonces H es normal.

Notemos que, en las condiciones de este enunciado G no puede poseer subgrupos de índice menor que p .

- (b) Sea $X = G/H = \{gH : g \in G\}$ el conjunto de coclases a izquierda de H en G ; así, $|X| = p$. Consideramos sobre X la acción usual de G por multiplicación, dada por

$$(g, hH) \in G \times X \mapsto ghH \in X.$$

y sea $\theta : G \rightarrow S(X)$ el homomorfismo de grupos correspondiente. Mostrar que si $K = \ker \theta$, se tiene que $H \supset K$ y, como $\text{im } \theta$ es un subgrupo de $S(X)$, que $|G : K|$ divide a $p!$.

- (c) Muestre que $|G : K| = |G : H|$, para concluir que $H = K$ y, así, que H es normal.

Sugerencia. Para hacerlo, observe primero que $p = |G : H| \leq |G : K|$, de manera que $|G : K| \neq 1$. Si q es un primo que divide a $|G : K|$, lo hecho en la parte anterior implica que $q \leq p$; esto junto con la elección de p implica que $|G : K| = p^r$ para algún $r \geq 1$. Muestre para terminar que debe ser $r = 1$.

8. Teoremas de Sylow

- [1] **8.1.** Sea p un número primo. Un grupo abeliano finito de exponente p^r con $r > 0$ posee elementos de orden p .
- [2] **8.2.** Sea p un número primo y G un grupo de orden $p^r > 1$. Entonces $Z(G)$ no es trivial.
- [2+] **8.3.** Sea G un grupo finito de orden $|G| = p^r m$ con p primo y $(p, m) = 1$. Entonces G posee subgrupos de orden p^r .

Definición. Sea p un número primo. Un elemento g de G es p -primario si su orden es una potencia de p . Un grupo G es un p -grupo si el orden de todo elemento de G es una potencia de p .

8.4. Sea p un número primo.

- (a) Si G es un p -grupo y H es un subgrupo de G , entonces H es un p -grupo.
- (b) Si G es un p -grupo y $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo sobreyectivo, H es un p -grupo.
- (c) Si G es un grupo, H un subgrupo normal de G y tanto H como G/H son p -grupos, entonces G es un p -grupo.

- [2] **8.5.** Un grupo finito G es un p -grupo sii $|G| = p^r$ para algún $r \geq 1$.

Definición. Sea p un número primo y G un grupo. Un p -subgrupo de Sylow de G es un p -subgrupo maximal de G . Escribimos $\text{Syl}_p(G)$ al conjunto de los p -subgrupos de Sylow de G .

8.6. Sea G un grupo finito y p un número primo.

- [1+] (a) Si $|G| = p^r m$ con $(p, m) = 1$ y $H \subset G$ es un subgrupo tal que $|H| = p^r$, entonces $H \in \text{Syl}_p(G)$.
- [1] (b) Si $p \mid |G|$, entonces $\text{Syl}_p(G) \neq \emptyset$.

- [1+] **8.7.** Si G es un grupo y $H \in \text{Syl}_p(G)$ y $x \in G \setminus H$ tiene orden $|x| = p^n$, entonces $x \notin N(H)$.

Sugerencia. Suponga lo contrario y considere el orden del elemento xH en $\langle H \cup \{x\} \rangle / H$.

8.8. Sea G un grupo finito y $K \in \text{Syl}_p(G)$. Sea \mathcal{C} el conjunto de subgrupos de G conjugados de K .

- [1] (a) Sea $H \in \text{Syl}_p(G)$ y sea \sim la relación en \mathcal{C} tal que

$$L \sim L' \text{ sii existe } h \in H \text{ tal que } hLh^{-1} = L.$$

Muestre que se trata de una relación de equivalencia.

- [1+] (b) Sea $L \in \mathcal{C}$ y notemos $[L]$ a la clase de equivalencia de L . Entonces $|[L]| = [H : H \cap N(L)]$. Además, si $L \neq H$ es $|[L]| > 1$ y es divisible por p . Si, por el contrario, $L = H$, entonces $|[H]| = 1$.

(c) Muestre que

$$|\mathcal{C}| \equiv \begin{cases} 0 & (\text{mód } p), \text{ si } H \notin \mathcal{C}; \\ 1 & (\text{mód } p), \text{ si } H \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

(d) Concluya que H es conjugado de K y que $|\mathcal{C}| \equiv 1 \pmod{p}$.

8.9. Pruebe el siguiente teorema de Peter Ludwig Mejdell Sylow (1832–1918, Noruega) que es, probablemente, el teorema más importante de la teoría de grupos finitos.

Teorema. (M. L. Sylow, *Théorèmes sur les groupes de substitutions*, Math. Ann. 5 (1872), no. 4, 584–594.) Sea p un número primo. Sea G un grupo finito de orden $p^r m$ con $(p, m) = 1$. Entonces

- (a) Un subgrupo H de G es un p -subgrupo de Sylow sii $|H| = p^r$.
- (b) Todos los p -subgrupos de Sylow de G son conjugados.
- (c) Sea n_p el número de p -subgrupos de Sylow de G . Entonces $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.
- (d) $n_p \mid m$.

8.10. Muestre que no hay grupos simples de orden 28 ó 312.

8.11. Muestre que un grupo de orden 12 ó 56 no es simple.

8.12. Si p y q son primos distintos, un grupo de orden pq no es simple.

8.13. Sea G un grupo de orden $p^r m$ con p primo, $r \geq 1$ y $p > m$. Entonces G no es simple.

8.14. Sea G un grupo de orden $p^2 q$ con p y q primos distintos. Entonces G no es simple.

8.15. Muestre que un grupo de orden menor que 60 no es simple.

8.16. Mostrar que si G es un grupo y P es un subgrupo de Sylow de G , entonces P es un subgrupo característico de $N(P)$.

8.17. Si todos los subgrupos de Sylow de un grupo finito G son normales, entonces $G \cong \prod_{p \text{ primo}} P_p$. En particular, un grupo abeliano finito es producto de sus subgrupos de Sylow.

9. Varia

9.1. Grupos múltiplemente transitivos

Sea G un grupo y supongamos que G actúa fielmente sobre un conjunto X . Sea $k \geq 1$.

9.1.1. Mostrar que obtenemos una acción de G sobre X^k si definimos

$$g \cdot (x_1, \dots, x_k) = (gx_1, \dots, gx_k), \quad \text{si } g \in G \text{ y } (x_1, \dots, x_k) \in X^k.$$

Mostrar que si $|X| > 1$, la acción de G sobre X^k no es transitiva.

Definición. Pongamos $X^{(k)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^k : x_i \neq x_j \text{ si } 1 \leq i < j \leq k\}$. Diremos que la acción de G sobre X es k -transitiva si G actúa transitivamente sobre $X^{(k)}$.

- 9.1.2. Mostrar que la acción canónica de S_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es n -transitiva.
- 9.1.3. Mostrar que la acción canónica de A_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es $(n - 2)$ -transitiva pero no $(n - 1)$ -transitiva.
- 9.1.4. Sea K un cuerpo, V un K -espacio vectorial. Mostrar que $\text{Aut}_K(V)$ actúa 1-transitivamente sobre $V \setminus \{0\}$ pero no 2-transitivamente.
- 9.1.5. Sea otra vez K un cuerpo, V un K -espacio vectorial con $\dim_K \geq 2$, y sea X el conjunto de todos los subespacios de V de dimensión 1. Mostrar que la acción de $\text{Aut}_K(V)$ sobre V induce una acción natural sobre X , que es 2-transitiva pero no 3-transitiva.
- 9.1.6. Mostrar que la acción sobre el conjunto de vértices de un tetraedro regular del grupo de rotaciones del sólido es 2- pero no 3-transitiva.
- 9.1.7. Sea A un grupo finito no trivial y $A' = A \setminus \{1\}$. Claramente $\text{Aut}(A)$ actúa sobre A' .
 - (a) Si $\text{Aut}(A)$ actúa 1-transitivamente en A' , entonces existe un número primo p tal que todo elemento de A' es de orden p . Esto implica que A es un p -grupo, así que su centro no es trivial. Concluir que A es abeliano y entonces, usando el ejercicio 2.7, que $G \cong \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$.
 - (b) Determinar todos los grupos A tales que $\text{Aut}(A)$ actúa 2-transitivamente sobre A' .

Definición. Diremos que la acción de G sobre X es finamente k -transitiva si es k -transitiva y además, para cada $\forall (x_1, \dots, x_k) \in X^{(k)}$ y cada $g_1, g_2 \in G$, es

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, g_1(x_i) = g_2(x_i) \implies g_1 = g_2.$$

En otras palabras, esta condición dice que dos elementos de G que actúan de la misma forma sobre k elementos de X deben coincidir.

- 9.1.8. Si la acción de G es finamente k -transitiva sobre X y $n = |X|$, entonces

$$|G| = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

- 9.1.9. La acción de S_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es finamente n -transitiva, finamente $(n - 1)$ -transitiva pero no finamente $(n - 2)$ -transitiva.
- 9.1.10. La acción de A_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es finamente $(n - 2)$ -transitiva.
- 9.1.11. Acciones finamente 1-transitivas. Este ejercicio describe todas las acciones finamente 1-transitivas.
 - (a) Sea G un grupo finito. Pongamos $R = G$ y consideremos la acción regular a izquierda $G \times R \rightarrow R$; recordemos que

$$g \cdot r = gr, \quad \forall g \in G, r \in R.$$

Mostrar que la acción de G sobre R es finamente 1-transitiva.

- (b) Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto X no vacío de forma finamente 1-transitiva. Mostrar que existe una función biyectiva $\phi : R \rightarrow X$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times R & \longrightarrow & R \\ \text{id}_G \times \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ G \times X & \longrightarrow & X \end{array}$$

conmuta, si las flechas verticales están dadas por las acciones de G .

9.1.12. Sea K un cuerpo finito de q elementos.

- (a) Consideremos el conjunto $\text{AGL}(1, K) = K^\times \times K$ y dotémoslo de un producto dado por

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', b + ab'), \quad \forall (a, b), (a', b') \in \text{AGL}(1, K).$$

Muestre que $(\text{AGL}(1, K), \cdot)$ es un grupo.

- (b) Consideremos ahora el conjunto $X = K$ y la aplicación $\text{AGL}(1, K) \times K \rightarrow K$ dada por

$$(a, b) \cdot x = ax + b, \quad \forall (a, b) \in \text{AGL}(1, K), \forall x \in X.$$

Muestre que esto da una acción de $\text{AGL}(1, K)$ sobre X .

- (c) Muestre que esta acción es finamente 2-transitiva.

9.1.13. Sea G un grupo finito y sea X un conjunto no vacío sobre el que G actúa de forma finamente 2-transitiva.

- (a) Sea $x_0 \in X$ y $H = G_{x_0}$. Pongamos $X' = X \setminus \{x_0\}$. Entonces H actúa de forma finamente 1-transitiva sobre X' y es un subgrupo maximal de G .
- (b) $H \cap gHg^{-1} \neq 1$ sii $g \in H$. En particular, $N(H) = H$ y $C(h) \subset H$ para cada $h \in H \setminus \{1\}$.
- (c) G posee involuciones y son todas conjugadas. Notemos I al conjunto de las involuciones de G .
- (d) Sea $N' = \{g \in G : \text{para cada } x \in X, gx \neq x\}$ y $N = N' \cup \{1\}$. Entonces es $|N'| = n - 1$. Además, N es un subconjunto normal de G .
- (e) La acción de N sobre X es simplemente transitiva.
- (f) H posee a lo sumo una involución. Si H posee una involución, $|I| = n$; en caso contrario, $|I| = n - 1$.
- (g) Si $s, t \in I$ y $s \neq t$, entonces st no tiene puntos fijos en X .
- (h) Sea $j \in G \setminus H$ una involución. Si $H \cap I \neq \emptyset$, sea además i la única involución de H . Entonces

$$I = \begin{cases} j^H, & \text{si } H \cap I = \emptyset; \\ j^H \cup \{i\}, & \text{si } H \cap I \neq \emptyset. \end{cases}$$

Aquí $j^H = \{hjh^{-1} : h \in H\}$.

- (i) Es $I^2 \setminus \{1\} = N'$ y N es un subgrupo normal abeliano de G . De hecho, si $H \cap I = \emptyset$, se tiene que $I = N'$. Más precisamente, existe un número primo p tal que $N \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, y $p = 2$ sii $H \cap I = \emptyset$.

- (j) Si T es un subgrupo normal de G con $Z(T) \neq 1$, entonces $G = Z(T) \rtimes H$.
- (k) $G \cong N \rtimes H$ con respecto a la acción por conjugación de H sobre N .
- (l) Fijemos $x_1 \in X'$. Definimos una aplicación $\xi : N' \rightarrow H$ de la siguiente manera: si $n \in N'$, entonces $nx_0 \in X'$ porque n no deja fijo ningún elemento de X , así que como la acción de H sobre X' es simplemente transitiva, existe exactamente un elemento $\xi(n) \in H$ tal que $\xi(n)x_1 = nx_0$. Mostrar que ξ es una biyección.
- (m) Fijemos $x_1 \in X'$. Definimos en X dos operaciones \cdot y $+$ en X de la siguiente manera.
Sean $x, y \in X$. Si $x = x_0$, ponemos $x \cdot y = x_0$. Si $x \neq x_0$, existe exactamente un elemento $h \in H$ tal que $hx_1 = x$, y ponemos $x \cdot y = hy$. Por otro lado, sabemos que existe exactamente un elemento $n \in N$ tal que $nx_0 = x$; ponemos $x + y = ny$.
Mostrar que $(X, +)$ es un grupo abeliano isomorfo a N y que (X', \cdot) es un grupo isomorfo a H .
- (n) Mostrar que si H es abeliano, entonces $(X, +, \cdot)$ es un cuerpo K y que $G \cong \text{AGL}(1, K)$.

9.2. Grupos nilpotentes

Sea G un grupo. Definimos una sucesión creciente

$$1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n \subset \dots$$

de subgrupos normales de G inductivamente de la siguiente manera, empezando por $Z_0 = 1$: sea $i \in \mathbb{N}_0$ y supongamos que ha hemos contruido Z_i . Como Z_i es normal, podemos considerar el homomorfismo canónico $\pi : G \rightarrow G/Z_i$. Ponemos entonces $Z_{i+1} = \pi^{-1}(Z(G/Z_i))$; se trata claramente de un subgrupo normal de G , y es $Z_{i+1}/Z_i \cong Z(G/Z_i)$. La sucesión de subgrupos $(Z_i)_{i \geq 0}$ se llama la *cadena central superior* de G .

Definición. Si existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $Z_n = G$, decimos que G es nilpotente. El menor tal n es la longitud nilpotente de G .

9.2.1. Un grupo abeliano es nilpotente. ¿Es nilpotente S_3 ? Dé un ejemplo de un grupo nilpotente y no abeliano.

Definición. Una sucesión creciente $(N_i)_{i \geq 0}$ de subgrupos normales de un grupo G tal que $N_0 = 1$ y $N_{i+1}/N_i \subset Z(G/N_i)$ para cada $i \geq 0$ es una *cadena central ascendente*. Si existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $N_n = G$ entonces decimos que la *cadena termina* o que *llega a G* .

9.2.2. Si G es un grupo y $(N_i)_{i \geq 0}$ es una cadena central ascendente en G , muestre que para cada $i \geq 0$ se tiene que $[N_{i+1}, G] \subset N_i$.

9.2.3. Si G es un grupo y $(Z_i)_{i \geq 0}$ es su cadena central superior, entonces para cada $i \geq 0$ se tiene que $Z_{i+1} = \{g \in G : [g, G] \subset Z_i\}$.

9.2.4. Mostrar que si un grupo G posee una cadena central ascendente $(N_i)_{i \geq 0}$ que llega a G , entonces es nilpotente. Una forma de hacer esto es ver que $N_i \subset Z_i$ para cada $i \geq 0$.

9.2.5. Sea G un grupo tal que $G/Z(G)$ es nilpotente. Entonces G es nilpotente.

9.2.6. Un p -grupo finito es nilpotente.

9.2.7. Los subgrupos Z_i que aparecen en la serie central de G son subgrupos característicos en G .

Esto puede verse por inducción en i , siendo inmediato para $i = 0$. Para ver que Z_{i+1} es característico en G si Z_i lo es, proceda de la siguiente manera: muestre que todo $\alpha \in \text{Aut}(G)$ induce, de manera natural, un automorfismo $\bar{\alpha} \in \text{Aut}(G/Z_i)$ tal que conmuta

$$\begin{array}{ccc} G & \twoheadrightarrow & G/Z_i \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \bar{\alpha} \\ G & \twoheadrightarrow & G/Z_i \end{array}$$

Usando que el centro de un grupo es característico, concluir que Z_{i+1} es característico.

9.2.8. Un cociente de un grupo nilpotente es nilpotente. Para mostrarlo, considere un homomorfismo $f : G \rightarrow G'$ con dominio G nilpotente y verifique que si $(Z_i)_{i \geq 0}$ es la cadena central superior de G , entonces $(f(Z_i))_{i \geq 0}$ es una cadena central ascendente de G' que termina en G' .

9.2.9. Todo subgrupo de un grupo nilpotente es nilpotente.

9.2.10. Todo producto de grupos nilpotentes es nilpotente.

9.2.11. Si G es nilpotente y N es normal en G , entonces $N \cap Z(G) \neq 1$.

9.2.12. Todo subgrupo propio de un grupo nilpotente está estrictamente contenido en su normalizador. En particular, todo subgrupo maximal es normal.

9.2.13. Si G es nilpotente y $P \subset G$ es un subgrupo de Sylow de G , entonces P es normal y, en particular, único.

9.2.14. Si G es nilpotente y finito y para cada primo p , P_p es el p -subgrupo de Sylow, entonces $G \cong \prod_p P_p$.

Esta serie de ejercicios prueba el siguiente teorema:

Teorema. *Un grupo finito es nilpotente sii es isomorfo al producto de sus subgrupos de Sylow.*



William Burnside
1852–1927, Inglaterra

William Burnside fue el primero en desarrollar la teoría de grupos desde el punto de vista abstracto. Publicó en 1897 *The Theory of Groups of Finite Order*, el primer libro sobre la teoría de grupos publicado en inglés. En 1904 demostró que todo grupo de orden $p^n q^m$ es soluble, uno de sus resultados más importantes, y conjeturó que todo grupo de orden impar es soluble. Este último resultado fue obtenido en 1962 por Walter Feit y John Griggs Thompson, quienes dieron una demostración de 250 páginas (Feit, W. y Thompson, J. G. Solvability of Groups of Odd Order. *Pacific J. Math.* 13, 775-1029, 1963)