Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2007

Práctica 1: Grupos

1. Definiciones

1.1. *Exponentes pequeños.* El *exponente* de un grupo G es el menor número e tal que para todo $g \in G$ se tiene $g^e = 1$.

[1] *(a)* Mostrar que un grupo G tal que $g^2 = 1$ para todo $g \in G$ es abeliano.

[3] †*(b)* ¿Qué puede decir si se tiene en cambio que $g^3 = 1$?

Solución. Supongamos que G es un grupo no abeliano tal que $g^3 = 1$ para todo $g \in G$ y supongamos que no posee subgrupos propios con esta propiedad. Entonces existen elementos $x, y \in G$ tales que $xy \neq yx$ y debe ser $G = \langle x, y \rangle$.

Notemos que si $u, v \in G$, entonces $(uv)^3 = uvuvuv = 1$, de manera que

$$uvu = v^{-1}u^{-1}v^{-1}, \qquad \forall u, v \in G.$$

Sea $z = y^{-1}x^{-1}yx$, de manera que $yx = xyz$. Entonces

$$\begin{aligned} yzy^{-1}z^{-1} &= y \cdot y^{-1}x^{-1}yx \cdot y^{-1} \cdot x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}y\underbrace{x}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy \\ &= \underbrace{x^{-1}yx^{-1}}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy = y^{-1}xy^{-1}\underbrace{x^{-1}y^{-1}x^{-1}}y^{-1}xy \\ &= y^{-1}xy^{-1}\underbrace{yxy}y^{-1}xy = y^{-1}x^3y = 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} xzx^{-1}z^{-1} &= x \cdot y^{-1}x^{-1}yx \cdot x^{-1} \cdot x^{-1}y^{-1}xy = xy^{-1}x^{-1}\underbrace{y}x^{-1}y^{-1}xy \\ &= x\underbrace{y^{-1}x^{-1}y^{-1}}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy = xxyx\underbrace{y^{-1}x^{-1}y^{-1}}xy \\ &= xxyxxyxxy = (x^2y)^3 = 1 \end{aligned}$$

Vemos así que x e y conmutan con z.

Usado esto es fácil ver que todo elemento de G puede escribirse en la forma $x^iy^jz^k$ con $0 \leq i, j, k \leq 2$.

Calculando vemos que $[x^iy^jz^k, x] = z^j$ y que $[x^iz^k, y] = z^{2i}$. Entonces, si $x^iy^jz^k = x^{i'}y^{j'}z^{k'}$, tenemos que

$$z^j = [x^iy^jz^k, x] = [x^{i'}y^{j'}z^{k'}, x] = z^{j'}$$

y, como $z \neq 1$, esto implica que $j = j'$. Luego debe ser $x^iz^k = x^{i'}z^{k'}$ y

$$z^{2i} = [x^iz^k, y] = [x^{i'}z^{k'}, y] = z^{2i'}$$

y vemos que $i = i'$. Por supuesto, debe ser entonces $k = k'$. Hemos probado que la escritura de un elemento de G en la forma $x^iy^jz^k$ es *única*. En particular, G posee 27 elementos.

Calculando, vemos que

$$x^iy^jz^k \cdot x^{i'}y^{j'}z^{k'} = x^{i+i'}y^{j+j'}z^{k+k'+i'j}.$$

Es fácil ver que esta fórmula define de hecho un grupo no abeliano en el que todo elemento tiene orden 3.

Notemos que podemos describir este grupo a menos de isomorfismo como $(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3) \rtimes_\theta \mathbb{Z}_3$ con $\theta : \mathbb{Z}_3 \to \mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$ determinado por la condición de que

$$\theta(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Imitando esta construcción es posible contruir ejemplos de grupos no abelianos en los que todos los elementos tienen orden p para cada número primo p. □

[1] **1.2.** Encontrar todos los grupos de orden a lo sumo 6.

[2] †**1.3.** Mostrar que los tres axiomas de grupo—la asociatividad, la existencia de elemento neutro y la existencia de inversos—son independientes.

2. Ejemplos

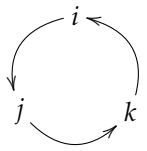
[1] **2.1.** *(a)* Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbb{G}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Mostrar que $\mathbb{G}_n$, con respecto al producto de $\mathbb{C}$ es un grupo abeliano cíclico.

[1] *(b)* Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Mostrar que S^1, con respecto al producto de $\mathbb{C}$, es un grupo abeliano. ¿Es cíclico?

[1] **2.2.** Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por la siguiente ecuaciones:

$$\begin{aligned} &i \cdot j = k, \quad && j \cdot k = i, \quad && k \cdot i = j, \\ &j \cdot i = -k, && k \cdot j = -i, && i \cdot k = -j, \\ &i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1, \end{aligned}$$

y la regla usual de los signos. Mostrar que $(\mathbb{H}, \cdot)$ es un grupo no abeliano. Llamamos a $\mathbb{H}$ el *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de $\mathbb{H}$.



[1] **2.3.** Sea k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Ponemos

$$\mathsf{GL}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A \neq 0\}$$

y

$$\mathsf{SL}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A = 1\}.$$

Mostrar que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. Descríbalos para $n = 1$. ¿Cuándo son abelianos?

[1] **2.4.** *Grupo opuesto.* Sea G un grupo. Sea $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ tal que $G^{\mathrm{op}} = G$ como conjunto, y el producto es

$$\cdot : (g, h) \in G^{\mathrm{op}} \times G^{\mathrm{op}} \mapsto hg \in G^{\mathrm{op}}.$$

Mostrar que $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ es un grupo.

2.5. Sea G uno grupo y X un conjunto.

[1] *(a)* Sea $G^X = \{f : X \to G\}$ dotado del producto $\cdot : G^X \times G^X \to G^X$ dado por

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \qquad \forall f, g \in G^X, \forall x \in X.$$

Mostrar que G^X es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

[1] *(b)* Sea $x_0 \in X$ y sea $H_{x_0} = \{f \in G^X : f(x_0) = 1\}$. Mostrar que H_{x_0} es un subgrupo de G. ¿Es normal?

[1] **2.6.** *Producto directo.* Sean G y H dos grupos. Consideremos la operación $\cdot$ sobre el conjunto $K = G \times H$ dada por

$$\cdot : \big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big) \in K \times K \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2) \in K.$$

Mostrar que K es un grupo. Llamamos a K el *producto directo de G y H* y lo notamos $G \times H$.

2.7. *$\mathbb{F}_p$-espacios vectoriales.*

[2] *(a)* Sea G un grupo abeliano y sea p un número primo. Supongamos que todo elemento de G tiene order p. Mostrar que es posible definir una multiplicación $\cdot : \mathbb{F}_p \times G \to G$ por escalares de $\mathbb{F}_p$ de manera que $(G, +, \cdot)$ resulte un $\mathbb{F}_p$-espacio vectorial.

[2] *(b)* Supongamos además que G es finito. Mostrar que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{n \text{ veces}}.$$

3. Subgrupos

[1] **3.1.** Sea G un grupo y $H \subset G$ un subconjunto. Mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) H es un subgrupo de G.

(ii) H es no vacío y cualesquiera sean $x, y \in H$, es $xy^{-1} \in H$.

Si además G es finito, estas afirmaciones son equivalentes a:

c) H es no vacío y cualesquiera sean $x, y \in H$, es $xy \in H$.

Dar un contraejemplo para esta última equivalencia cuando G es infinito.

3.2. Sea G un grupo y H_1 y H_2 subgrupos de G.

[1] *(a)* $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.

[1] *(b)* $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G sii $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

[2] **3.3.** Dado un grupo G, ¿es el subconjunto de elementos de orden finito un subgrupo de G?

3.4. Sea G un grupo.

[1] *(a)* Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos de G. Mostrar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo de G.

[1+] *(b)* Sea ahora $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo de G que contiene a X. Describirlo en término de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo de G generado por X* y se denota $\langle X \rangle$. Si $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$, escribimos $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ en lugar de $\langle \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle$.

[1] **3.5.** Sea G un grupo, $X \subset X$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$ y sea N un subgrupo de G. Mostrar que N es normal en G sii $xNx^{-1} \subset N$ para todo $x \in X$.

[1+] **3.6.** Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in \mathbb{G}_{2^n}$ una raíz primitiva 2^n-ésima. Consideremos las matrices

$$R = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea $\mathbb{H}_n = \langle R, S \rangle$ el subgrupo generado por R y S en $\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$. Llamamos a $\mathbb{H}_n$ el *n-ésimo grupo de cuaterniones generalizados*.

Determinar el orden de $\mathbb{H}_n$ y listar sus elementos.

[1] **3.7.** *(a)* Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Z})$ y sean $\alpha, \beta \in G$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Muestre que $\alpha^4 = \beta^3$, pero que $\alpha\beta$ tiene orden infinito. Así, $\langle \alpha, \beta \rangle$ es infinito.

Este ejemplo muestra que finitos elementos de orden finito pueden generar un subgrupo infinito.

(b) Determine $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Solución. Escribamos $G = \langle \alpha, \beta \rangle$. Afirmamos que $G = \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$. Es $\alpha\beta = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, así que calculando vemos inmediatamente que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (\alpha\beta)^x \in G$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ y mostremos que $A \in G$ haciendo inducción sobre $m = c + d$. Como

$$A\alpha = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}, \qquad A\alpha^2 = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}, \qquad A\alpha^3 = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix},$$

podemos suponer que $c, d \geq 0$ sin pérdida de generalidad.

Para empezar, si $m = 1$, debe ser $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ó $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. En el primer caso debe ser $a = 1$ y vemos que $A = (\alpha\beta)^b$. En el segundo debe ser $b = -1$, y calculando vemos que $A = (\alpha\beta)^a\alpha$.

Supongamos que $m > 1$. Notemos que debe ser $cd \neq 0$. Si $c \geq d$, entonces es

$$A\beta = \begin{pmatrix} -b & a-b \\ -d & c-d \end{pmatrix}.$$

Si $c = d$, entonces $d = 1$ y $A\beta\alpha^2 = \left(\begin{smallmatrix} b & b-a \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, que sabemos ya que está en G. Si, por otro lado, $c > d$, entonces $|d| + |c - d| < m$, así que $A\beta$ está en G, por nuestra hipótesis inductiva. □

3.8. *Generación de S_n.*

[1] *(a)* Mostrar que

(i) $S_n = \langle \{(i\,j) : 1 \leq i < j \leq n\} \rangle$;

(ii) $S_n = \langle \{(1\,i) : 1 \leq i \leq n\} \rangle$;
(iii) $S_n = \langle \{(i\ \ i+1) : 1 \leq i < n\} \rangle$;
(iv) $S_n = \langle (1\,2),\ (1\,2\,3\,\ldots\,n) \rangle$;

[1+] †*(b)* Sea $\mathcal{T} = \{(i\,j) : 1 \leq i < j \leq n\}$ el conjunto de todas las transposiciones. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $T \subset \mathcal{T}$ para que $S_n = \langle T \rangle$.

3.9. Sea G un grupo.

[1] *(a)* Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos normales de G. Mostrar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo normal de G.

[1] *(b)* Sea $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo normal de G que contiene a X. Describirlo en término de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo normal de G generado por X*. En general, este subgrupo no coincide con el subgrupo generado por X, construido en **3.4**.

[1] *(c)* Supongamos que $X \subset G$ es un conjunto tal que, cualquiera sea $g \in G$, es $gXg^{-1} \subset X$. Mostrar que entonces el subgrupo normal generado por X coincide con el subgrupo generado por X.

3.10. *(a)* Sea G un grupo y sea $N \subset G$ un subgrupo tal que $gNg^{-1} \subset N$ para todo $g \in G$. Muestre que N es normal.

Solución. Sea $g \in G$. Entonces como $gNg^{-1} \subset N$, es $N = g^{-1}gNg^{-1}g \subset g^{-1}Ng$. Así, $gNg^{-1} \supset N$ para todo $g \in G$. Esto, junto con la hipótesis, implica que N es normal

(b) Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Q})$ y $H = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z}\} \subset G$. Entonces H es un subgrupo de G. Sea ahora $g = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$. Muestre que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

3.11. Si G es un grupo y $A, B \subset G$ son subconjuntos, definimos

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Consideremos un grupo G y $A, B \subset G$ dos subconjuntos arbitrarios.

[1] *(a)* AB es un subgrupo de G sii $AB = BA$.

[1] *(b)* $G = AB$ sii $G = \langle A, B \rangle$ y $AB = BA$.

[1] *(c)* Si $AB = BA$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $AB \cap C = A(B \cap C)$.

[1] *(d)* Si $G = AB$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $C = A(B \cap C)$.

3.12. Sea G un grupo. Si $a, b \in G$, escribimos $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$; $[a, b]$ es el *conmutador de a y b*. Claramente $[a, b] = 1$ sii a y b conmutan, así que en cierta forma $[a, b]$ mide la no-conmutatividad de a y b.

[1] *(a)* Sea $X = \{[a, b] : a, b \in G\}$ y sea $G' = \langle X \rangle$ el subgrupo generado por X en G. Mostrar que G' es normal en G. Llamamos a G' es *subgrupo derivado de G* y lo escribimos $[G, G]$.

[1] *(b)* G es abeliano sii $[G, G] = 1$.

[1] *(c)* Determinar $[G, G]$ cuando G es $\mathbb{H}$ o un grupo diedral D_n.

Un grupo es *perfecto* si coincide con su subgrupo derivado.

[3] †*(d)* Sea k un cuerpo finito. Mostrar que $[\mathsf{GL}_n(k), \mathsf{GL}_n(k)] = \mathsf{SL}_n(k)$ con la excepción de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. Mostrar que $\mathsf{SL}_n(k)$ es perfecto con la excepción de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ y $\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_3)$. ¿Qué sucede en los casos excepcionales?

[1] **3.13.** *(a)* Sea G un grupo y sea $\mathsf{Z}(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$. Mostrar que $\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo normal de G. Llamamos a $\mathsf{Z}(G)$ el *centro de* G y decimos que los elementos de $\mathsf{Z}(G)$ son *centrales* en G.

[1] *(b)* Sea G un grupo y $X \subset G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Mostrar que es

$$\mathsf{Z}(G) = \{g \in G : gx = gx \text{ para todo } x \in X\}.$$

[1+] *(c)* Encontrar el centro de un grupo abeliano, de D_n para cada $n \geq 1$, de $\mathbb{H}$, de S_n para cada $n \geq 1$, de $\mathsf{GL}_n(R)$ para cada $n \geq 1$ y $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p\}$.

[1] *(d)* Sea G un grupo y X un conjunto. Determinar el centro de G^X.

[1] **3.14.** Sea G un grupo y H un subgrupo abeliano de G. Mostrar que $H\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo abeliano de G.

3.15. Sea G un grupo.

[1] *(a)* Sea $g \in G$. El *centralizador de g en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(g) = \{h \in G : gh = hg\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G y que es, en efecto, el subgrupo más grande de G que contiene a g y en el que g es central.

[1] *(b)* Sea $N \subset G$ un subconjunto. El *centralizador de N en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(N) = \{h \in G : nh = hn \text{ para cada } n \in N\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G.

[1] *(c)* Mueste que si $N \subset G$ es un subconjunto, $\mathsf{C}(\langle N \rangle) = \mathsf{C}(N)$.

[1] *(d)* Sea $H \subset G$ un subgrupo de G. El *normalizador de H en G* es el subconjunto $\mathsf{N}(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G. Mostrar, más aún, que H es un subgrupo normal de $\mathsf{N}(H)$.

[1] *(e)* Si $N \subset G$ es un subconjunto normal (es decir, si para cada $g \in G$, gNg^{-1}), entonces $\mathsf{Z}(N)$ es un subgrupo normal de G.

[1+] **3.16.** Si $g = (i_1\, i_2 \cdots i_{k-1}\, i_k) \in S_n$ es un ciclo de orden k, determinar $\mathsf{C}(g)$.

3.17. Sea G un grupo y S y T subconjuntos de G tales que $S \subset T$. Entonces:

[1] *(a)* $\mathsf{C}(S) \supset \mathsf{C}(T)$;

Solución. Si $g \in \mathsf{C}(T)$, entonces para cada $t \in T$ es $gt = tg$. Como $S \subset T$, vemos que para cada $s \in S$ es $gs = sg$ y, entonces, que $\mathsf{C}(S) \subset \mathsf{C}(T)$. □

[1] *(b)* $\mathsf{C}(\mathsf{C}(S)) \supset S$; y

Solución. Sea $s \in S$. Si $c \in \mathsf{C}(S)$, entonces $cs = sc$. Luego s conmuta con todos los elementos de $\mathsf{C}(S)$ y esto nos dice precisamente que $s \in \mathsf{C}(\mathsf{C}(S))$.

[1+] *(c)* $\mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathsf{C}(S))) = \mathsf{C}(s)$.

Solución. Como $S \subset \mathsf{C}(\mathsf{C}(S))$, usando *(a)* vemos que $\mathsf{C}(S) \supset \mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathsf{C}(S)))$. Por otro lado $\mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathsf{C}(S))) \supset \mathsf{C}(S)$ aplicando *(b)*. □

3.18. Sea G un grupo y $g \in G$. Entonces:

[1] *(a)* $g \in \mathsf{C}(g)$;

[1] *(b)* $\mathsf{C}(\mathsf{C}(g)) = \mathsf{Z}(\mathsf{C}(g))$;

[1+] *(c)* $\mathsf{C}(g) \subset \mathsf{C}(h)$ sii $h \in \mathsf{Z}(\mathsf{C}(g))$; y

[1+] *(d)* $\mathsf{C}(g) \subset \mathsf{C}(h)$ sii $\mathsf{Z}(\mathsf{C}(g)) \supset \mathsf{Z}(\mathsf{C}(h))$.

3.19. Sean G un grupo y H y K subgrupos de G.

[1] *(a)* Si alguno de H o K es normal en G entonces HK es un subgrupo.

[1] *(b)* Si los dos son normales, entonces $HK = KH$ y se trata de un subgrupo normal de G.

[1] **3.20.** Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G. Mostrar que $[N, G] \subset N$.

†**3.21.** El objetivo de este ejercicio es dar un ejemplo de que la normalidad de subgrupos no es transitiva.

[1] *(a)* Sea G el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ con $ad - bc \neq 0$. Mostrar que G, con respecto a la composición de funciones, es un grupo.

[1] *(b)* Sea T el subconjunto de G formado por las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + e \\ y + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $e, f \in \mathbb{R}$. Mostrar que T es un subgrupo *normal* en G.

[1] *(c)* Sea L el subconjunto de T formado por las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + e \\ y + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $e, f \in \mathbb{Z}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de T; como T es abeliano, L es normal en T.

[1] *(d)* Mostrar que L no es normal en G.

[1+] **3.22.** Encontrar todos los subgrupos de D_4. Clasifíquelos bajo isomorfismo y determinar cuáles son normales.

[2-] **3.23.** Sea $\mathbb{H}$ el grupo de los cuaterniones. Mostrar que posee un único elemento de orden 2 y que éste es central. Deducir que $H \ncong D_4$ y que todo subgrupo de H es normal.

Un grupo no abeliano con esta propiedad se dice *Hamiltoniano*. El siguente teorema de Reinhold Baer (1902–1979) describe completamente esta clase de grupos:

> **Teorema.** (R. Baer, Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe, S. B. Heidelberg. Akad. Wiss. 2 (1933), 12-17) *Un grupo finito es hamiltoniano sii es isomorfo a* $\mathbb{H} \times A$ *para algún grupo abeliano que no tiene elementos de orden* 4.

[2-] **3.24.** Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G de índice finito n. Mostrar que si $g \in G$, entonces $g^n \in N$. Dar un ejemplo para mostrar que esto puede ser falso si N no es normal.

[2-] **3.25.** *(a)* Mostrar que un grupo no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

Solución. Sea G un grupo no trivial sin subgrupos propios y sea $g \in G \setminus \{1\}$. Entonces $\langle g \rangle$ es un subgrupo no trivial, así que la hipótesis implica que $G = \langle g \rangle$ y vemos que G es cíclico.

Si $|g|$ no es primo y existe $k > 1$ tal que $k||g|$, entonces $\langle g^k \rangle$ es un subgrupo propio no trival de $\langle g \rangle = G$. Esto contradice la hipótesis. Luego $|G| = |g|$ es primo. □

[2-] *(b)* Sea G un grupo cíclico y $g \in G$ un generador. Sea $n = |G|$ y sea p un número primo tal que $p \mid n$. Entonces $\langle g^p \rangle$ es un subgrupo maximal de G.

Solución. Supongamos por el contrario que $\langle g^p \rangle$ no es maximal, de manera que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\langle g^p \rangle \subsetneq \langle g^k, g^p \rangle \subsetneq \langle g \rangle$. Si notamos que $\langle g^k, g^p \rangle = \langle g^{k-p}, g^p \rangle$ vemos que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 < k < p$. Pero entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tales que $\alpha k + \beta p = 1$ y, en particular, $g = (g^k)^\alpha (g^p)^\beta \in \langle g^k, g^p \rangle$, contradiciendo nuestra hipótesis. □

[2] *(c)* Mostrar que un grupo finito que posee un solo subgrupo maximal es cíclico que tiene como orden una potencia de un número primo.

Solución. Sea G un grupo con un único subgrupo maximal M. Sea $g \in G \setminus M$. Entonces $\langle g \rangle \not\subset M$ así que debe ser $G = \langle g \rangle$. Pongamos $n = |g|$.

Sea p un divisor primo de n. Entonces el ejercicio anterior implica que $\langle g^p \rangle$ es un subgrupo maximal de G. Vemos así que $M = \langle g^p \rangle$ y, en particular, $|M| = n/p$. Si n posee otro divisor primo $q \neq p$, entonces el mismo razonamiento muestra que $|M|)n/q$. Por supuesto, esto es absurdo.

Concluimos así que n posee exactamente un divisor primo. □

[2] †**3.26.** Sea G un grupo finito y H el subgrupo de G generado por los elementos de orden impar. Entonces H es normal y tiene índice una potencia de 2.

Solución. Que H es normal es claro en vista de **3.9***(c)*, porque el conjunto generador de H es normal. Resta ver que $[G : H]$ es una potencia de 2.

Supongamos por el contrario que existe un primo impar p que divide a $[G : H]$. Entonces existe $g \in G \setminus H$ tal que gH tiene orden p en G/H, es decir, tal que $g^p \in H$. Escribamos $|g| = p^r m$ con $(p, m) = 1$. Claramente g^m tiene orden p^r, que es impar, así que $g^m \in H$. Como existen α y $\beta \in \mathbb{Z}$ tales que $\alpha p + \beta m = 1$, concluimos que $g = (g^p)^\alpha (g^m)^\beta \in H$, contradiciendo la elección de g. □

†**3.27.** *Subgrupo de Frattini.* Sea G un grupo. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de subgrupos propios maximales de G. Si $\mathcal{M} \neq \varnothing$, ponemos $\Phi(G) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$; si, en cambio, $\mathcal{M} = \varnothing$, ponemos $\Phi(G) = G$. $\Phi(G)$ es el *subgrupo de Frattini*, en honor de Giovanni Frattini (1852–1925, Italia).

[1] *(a)* Determinar el subgrupo de Frattini de $\mathbb{Z}_{p^2}$ si p es primo.

Un elemento $g \in G$ es un *no-generador* si siempre que $X \subset G$ es un conjunto generador de G y $g \in X$, entonces $X \setminus \{g\}$ también genera a G.

[3] *(b)* Mostrar que $\Phi(G)$ es el conjunto de elementos no-generadores de G.

Solución. Sea $\mathcal{N}$ el conjunto de elementos no-generadores de G.

Supongamos primero que $\mathcal{M} \neq \varnothing$. Sea $g \in G$ tal que existe $M \in \mathcal{M}$ con $g \notin M$. Entonces $M \subsetneq \langle M \cup \{g\} \rangle$ y debe ser $\langle M \cup \{g\} \rangle = G$. Pero M no genera a G, así que vemos que $g \notin \mathcal{N}$. Esto muestra que $\mathcal{N} \subset \Phi(G)$. Por otro lado, si $g \notin \mathcal{N}$, existe $X \subset G$ tal que $\langle X \rangle = G$ pero $\langle X \setminus \{g\} \rangle \neq G$. Sea $M \in \mathcal{M}$ tal que $\langle X \setminus \{g\} \rangle \subset M$. Entonces claramente $g \notin M$ y vemos que $g \notin \Phi(M)$. Concluimos que $\mathcal{N} \supset \Phi(G)$ y que, entonces, se tiene de hecho la igualdad.

Supongamos ahora que $\mathcal{M} = \varnothing$. En este caso tenemos que mostrar que $\mathcal{N} = G$. Buscando una contradicción, supongamos que $g \in G \setminus \mathcal{N}$, de manera que existe $X \subset G$ tal que $\langle X \rangle = G$ pero $\langle X \setminus \{g\} \rangle \subsetneq G$.

Consideremos la familia $\mathcal{F} = \{H \subset G : H \text{ es subgrupo de } G, X \setminus \{g\} \subset H \text{ y } g \notin H\}$, que no es vacía porque $\langle X \setminus \{g\} \rangle \in \mathcal{F}$. El lema de Zorn nos provee inmediatamente de un elemento $M \in \mathcal{F}$ maximal en $\mathcal{F}$. Afirmamos que M es de hecho maximal. En efecto, si $h \in G \setminus M$, es $\langle M \cup \{h\} \rangle \supsetneq M$, así que $\langle M \cup \{h\} \rangle \notin \mathcal{F}$. Como claramente $X \setminus \{g\} \subset \langle M \cup \{h\} \rangle$, debe ser $g \in \langle M \cup \{h\} \rangle$ y entonces $\langle M \cup \{h\} \rangle = G$. Vemos que $M \in \mathcal{M} = \varnothing$, lo que es absurdo.

Tiene que ser entonces $G \setminus \mathcal{N}$, como queríamos. □

[1] *(c)* Mostrar que $\Phi(G)$ es normal.

Solución. El conjunto de no-generadores de G es claramente normal. □

[2] **3.28.** Sea G un grupo y H un subgrupo propio de G. Entonces $\langle G \setminus H \rangle = G$.

Solución. Supongamos que $H' = \langle G \setminus H \rangle \subsetneq G$. Como $H \cup H' = G$, debe ser $H' \subset H$ ó $H \subset H'$. En el primer caso, es $G \setminus H \subset H' \subset H$, así que $G \setminus H = \varnothing$, lo que es imposible; en el segundo, $G = H \cup (G \setminus H) \subset H'$, lo que tambien es imposible. Vemos así que nuestra suposición contradice las hipótesis. □

[2-] **3.29.** Sea $G \subset \mathbb{C}^\times$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = \mathbb{G}_n$ es el grupo de las raíces n-ésimas de la unidad.

Solución. Sea $G \subset \mathbb{C}^\times$ un subgrupo finito de orden n. Entonces si $z \in G$, es $z^n = 1$ y vemos que cada elemento de G es raíz de $p(X) = X^n - 1$. Como el conjunto de raíces de p es precisamente $\mathbb{G}_n$, vemos que G es un subgrupo de $\mathbb{G}_n$. Como $|G| = n = |\mathbb{G}_n|$, debe ser, de hecho, $G = \mathbb{G}_m$. □

4. Homomorfismos

[1] **4.1.** Sea G un grupo y X un conjunto. Sea $x_0 \in X$ y sea

$$\mathsf{ev}_{x_0} : f \in G^X \mapsto f(x_0) \in G.$$

Mostrar que se trata de un homomorfismo de grupos. Determinar su núcleo e imagen.

[1+] **4.2.** Mostrar que cualquiera sea el grupo G, existe un isomorfismo $G \cong G^{\mathrm{op}}$ entre G y su grupo opuesto.

[1] **4.3.** Sean G y H grupos, y sea $\hom_{\mathrm{Grp}}(G, H)$ el conjunto de todos los homomorfismos $f : G \to H$. ¿Se trata en general de un subgrupo de H^G? Encuentre condiciones sobre H que garanticen que lo sea.

[1] **4.4.** Muestre que el grupo $\mathbb{H}$ del ejercicio **2.2** y el grupo $\mathbb{H}_1$ del ejercicio **3.6** son isomorfos.

4.5. Sea G un grupo.

[1] *(a)* Sea $g \in G$ e $\mathsf{inn}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$. Mostrar que $\mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$.

[1] *(b)* Mostrar que la aplicación $\mathsf{inn} : g \in G \mapsto \mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$ es un homomorfismo de grupos.

[1] *(c)* Describir el núcleo de inn. Los automorfismos que están en la imagen de G se llaman *automorfismos interiores* y la imagen misma se denota $\mathsf{Inn}(G)$.

[1] *(d)* Mostrar que $\mathsf{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathsf{Aut}(G)$.

[2] **4.6.** Sea G un grupo finito. Supongamos que existe $f \in \mathsf{Aut}(G)$ tal que $f^2 = 1$ y f no deja fijo ningún elemento de G aparte de 1. Entonces cada cada $g \in G$ es $f(g) = g^{-1}$ y G es abeliano de orden impar.

Sugerencia. Muestre la aplicación $\phi : g \in G \mapsto g^{-1}f(g) \in G$ es biyectiva y muestre que $f(g) = g^{-1}$ escribiendo a g en la forma $h^{-1}f(h)$ para algún elemento h de G.

Solución. Si $\phi(g) = \phi(h)$, es $g^{-1}f(g) = h^{-1}f(h)$ y vemos que $hg^{-1} = f(h)f(g^{-1}) = f(hg^{-1})$. Luego hg^{-1} queda fijo por f y debe ser $h = g$. Hemos mostrado, así, que ϕ es inyectiva. Como G es finito, esto implica que es también sobreyectiva.

Sea ahora $g \in G$. Como ϕ es sobreyectiva, existe $h \in G$ tal que $g = h^{-1}f(h)$. Entonces

$$f(g) = f(h^{-1}f(h)) = f(h^{-1})h = (h^{-1}f(h))^{-1}) = g^{-1}.$$

Luego f coincide con la inversión de G. Es fácil ver, ahora, que como f es un homomorfismo, G debe ser abeliano.

Finalmente, como $f^2 = 1$ y f deja exactamente un punto fijo, es claro que $|G|$ debe ser impar. □

4.7. Sea G un grupo. Un subgrupo H de G se dice *característico* si cualquiera sea $f \in \mathsf{Aut}(G)$, $f(H) \subset H$.

[1] *(a)* Muestre que si $H \subset G$ es un subgrupo característico, entonces para cada $f \in \mathsf{Aut}(G)$ es $f(H) = H$.

[1] *(b)* Muestre que $\mathsf{Z}(G)$ y $[G, G]$ son característicos.

[1] *(c)* $\Phi(G)$ es un subgrupo característico de G.

[1] *(d)* Si H es un subgrupo característico de G, entonces H es normal en G.

[1] *(e)* Si un grupo G posee un único subgrupo H de un orden dado, éste es característico.

[1] *(f)* Si H es un subgrupo característico en G y K es un subgrupo característico en H, entonces H es un subgrupo característico de G. Comparar con **3.21**.

[1] *(g)* Si $N \subset G$ es un subconjunto característico (es decir, si para cada $f \in \mathsf{Aut}(G)$, $f(N) \subset N$), entonces $\langle N \rangle$ y $\mathsf{C}(N)$ son subgrupos característicos de G.

Un subgrupo H de G se dice *totalmente característico* si $f(H) \subset H$ siempre que $f \in \mathsf{End}(G)$.

[1] *(h)* Un subgrupo totalmente característico es característico.

Solución. Sea G un grupo y H un subgrupo de G totalmente característico. Sea $\phi \in \mathsf{Aut}(G)$ y supongamos que $\phi(H) \subsetneq H$. Entonces aplicando ϕ^{-1} a esta inclusión vemos que $H \subsetneq \phi^{-1}(H)$. Pero esto contradice la hipótesis de ser H totalmente característico. □

[2] *(i)* Dar ejemplos de un subgrupo totalmente característico y de un subgrupo característico pero no totalmente característico.

Solución. Si G es un grupo y $n \in \mathbb{Z}$, los subgrupos $\langle g^n : g \in G \rangle$ y $\langle g : |g| < \infty \rangle$ son totalmente característicos.

El centro de un grupo, en general, no es totalmente característico. Veamos un ejemplo de esto. Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Q})$. Si $g \in G$, entonces existen enteros impares s y t y un entero $\nu(g)$ tales que $\det g = 2^{\nu(g)} s/t$. Es claro que s, t y $\nu(g)$ están claramente unívocamente determinados por g. Usando esto, es fácil ver que $\nu : G \to \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos.

Consideremos la aplicación $f : G \to G$ tal que si $g \in G$ es

$$f(g) = \begin{pmatrix} 1 & \nu(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se trata de un homomorfismo de grupos.

Ahora bien, podemos ver que $f(\mathsf{Z}(G)) \not\subset \mathsf{Z}(G)$. Por ejemplo, el elemento $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ es central en G pero $f(g) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ no está en $\mathsf{Z}(G)$. □

[1+] *(j)* Todos los subgrupos de un grupo cíclico son totalmente invariantes. ¿Vale la recíproca?

[1+] †**4.8.** *(a)* Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G de índice finito. Entonces $L = H \cap K$ también tiene índice finito.

Sugerencia. Para verlo muestre que es posible definir una aplicación $\phi : G/L \to G/H \times G/K$ de manera que $\phi(xL) = (xH, xK)$ y muestre que ésta es inyectiva.

Solución. Hay que mostrar primero que ϕ está bien definida. Supongamos que $x, y \in G$ son tales que $xL = yL$. Entonces $x^{-1}y \in L = H \cap K$, así que $xH = xx^{-1}yH = yH$; de forma similar vemos que $xK = yK$.

Para terminar, basta mostrar que ϕ es inyectiva. Supongamos que $x, y \in G$ son tales que $\phi(xL) = \phi(yL)$, es decir, es $xH = yH$ y $xK = yK$. Entonces $x^{-1}y \in H$ y a la vez $x^{-1}y \in K$. Luego $x^{-1}y \in L$ y, por supuesto, esto implica que $xL = yL$. □

[1+] *(b)* El conjunto de elementos de un grupo que poseen un número finito de conjugados es un subgrupo característico.

Solución. Sea G un grupo. Si $g \in G$, entonces claramente $|\mathsf{cl}\, g| = [G : \mathsf{C}(g)]$. Luego el conjunto en cuestión es $H = \{g \in G : [G : \mathsf{C}(g)] < \infty\}$.

Es claro que $\mathsf{C}(g) = \mathsf{C}(g^{-1})$ cualquiera sea $g \in G$, así que H es cerrado por la inversión de G. Por otro lado, si $g, h \in H$, entonces $\mathsf{C}(gh) \supset \mathsf{C}(g) \cap \mathsf{C}(h)$. Como $g, h \in H$, $\mathsf{C}(g) \cap \mathsf{C}(h)$ tiene índice finito en G por el punto anterior y, claramente, esto implica que $\mathsf{C}(gh)$ tiene índice finito. Esto muestra que H es en efecto un subgrupo de G.

Que H es característico sigue inmediatamente que para cada $f \in \mathsf{Aut}(G)$, $[G : \mathsf{C}(g)] = [G : \mathsf{C}(f(g))]$. □

4.9. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos.

[1] *(a)* Si H es abeliano, entonces $[G, G] \subset \ker f$.

[1] *(b)* Mostrar que $f([G, G]) \subset [H, H]$. En particular, concluya que $[G, G]$ es un subgrupo característico de G.

4.10. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. ¿Es cierto en general que $f(\mathsf{Z}(G)) \subset \mathsf{Z}(H)$? En caso negativo, de condiciones suficientes que garanticen esta inclusión. Bajo esas condiciones, ¿es $f(\mathsf{Z}(G)) = \mathsf{Z}(H)$?

4.11. Sea G un grupo.

[1] *(a)* Mostrar que la función $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$ es una biyección.

[1] *(b)* Describir $\mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}^2, G)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}_n, G)$.

[1] **4.12.** *(a)* Determinar $\mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ y $\mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Q}, G)$ para un grupo finito G.

[1] *(b)* Describir la imagen $D(G)$ de $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Q}, G) \mapsto f(1) \in G$.

[1] *(c)* Mostrar que cuando G es abeliano, $D(G)$ es un subgrupo característico de G

4.13. Sea G un grupo.

[1] *(a)* Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

[1] *(b)* Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

[1] *(c)* Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $g \in G \mapsto g^2 \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

[1+] **4.14.** Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Si $(m, n) = 1$, entonces $\mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ es trivial. ¿Qué sucede en general?

4.15. Sea G un grupo finito y $\phi : G \to G$ un endomorfismo de G.

[1+] *(a)* Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$, entonces $\phi^m(G) = \phi^n(G)$. Sea $\alpha = \phi^n$.

Solución. Tenemos una cadena decreciente de subgrupos de G:

$$G \supset \phi(G) \subset \phi^2(G) \supset \cdots$$

Como G es finito, esta cadena tiene que estacionarse. □

[2] *(b)* Mostrar que $\operatorname{im}\alpha$ es normal o dar un contraejemplo.

Solución. Hay un homomorfismo $\phi : S_3 \to S_3$ tal que $\phi((ij)) = (12)$ cualquiera sea la transposición $(ij) \in S_3$. Es fácil ver que $\phi^1(G) = \phi^k(G) = \langle(12)\rangle$ para todo $k \geq 1$. Luego $\alpha = \phi$ y claramente $\operatorname{im}\alpha$ no es normal.

[1+] **4.16.** Usando el hecho que $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ permuta los elementos no nulos de $\mathbb{F}_2^2$, encuentre un isomorfismo $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

Solución. Si $g \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)$, podemos definir una aplicación $\phi(g) : v \in \mathbb{F}_2^2 \mapsto gv \in \mathbb{F}_2^2$ dada por el producto matricial. Como $\det g \neq 0$, $\phi(g)$ es una biyección tal que $\phi(g)(0) = 0$. Luego $\phi(g)$ preserva $\mathbb{F}_2^2 \setminus 0$ y la restricción a este conjunto es una biyección. Es claro que la aplicación $\phi' : g \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2) \mapsto \phi(g)|_{\mathbb{F}_2^2 \setminus 0} \in S(\mathbb{F}_2^2 \setminus 0)$ es un homomorfismo de grupos.

Casi por definición este homomorfismo es inyectivo. Contando, vemos que $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ tiene 6 elementos, así que ϕ' debe ser una isomorfismo. □

[1] **4.17.** *(a)* Sea G un grupo y sea $X \subset G$ un subconjunto tal que $\langle X\rangle = G$. Sea $f \in \mathsf{End}(G)$ tal que $f(x) = x$ para todo elemento $x \in X$. Entonces $f = \mathsf{id}_G$.

Solución. Basta mostrar que $f(g) = g$ cualquiera sea $g \in G$. Sea entonces $g \in G$. Como X genera a G, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tal que $g = x_1x_2\cdots x_n$. Entonces $f(g) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) = x_1x_2\cdots x_n = g$. □

[1+] *(b)* Sea X el conjunto de los elementos de orden 2 de S_3. Muestre que cada automorfismo de S_3 induce una permutación de X y deduzca que $\mathsf{Aut}(S_3) \cong S_3$.

Solución. Definimos $\phi : S_3 \to S(X)$ de manera que si $g \in S_3$ y $x \in X$, $\phi(g)(x) = gxg^{-1}$. Es fácil ver que se trata de un homomorfismo de grupos. Como $\langle X\rangle = G$, usando la parte anterior concluimos que ϕ es inyectivo. Como $|X| = 3$, es $|S_3| = |S(X)| = 3!$ y ϕ debe ser un isomorfismo. □

4.18. Sea $n \geq 2$. Consideramos el polinomio *discriminante*

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$$

Si $\pi \in S_n$ es una permutación de $\{1, \dots, n\}$, definimos

$$\varepsilon(\pi) = \frac{\Delta(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})}{\Delta(x_1, \dots, x_n)}.$$

[1] *(a)* Mostrar que cualquiera sea $\pi \in S_n$, es $\varepsilon(\pi) \in \{\pm 1\}$.

[1] *(b)* Mostrar que $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ es un homomorfismo de grupo si dotamos a $\{\pm 1\}$ del producto usual.

El subgrupo $A_n = \ker \varepsilon$ es el *n-ésimo grupo alternante*.

[1] *(c)* Describir A_2 y A_3.

[1] *(d)* Sea $\tau = (i\,j) \in S_n$ una transposición. Determinar el valor de $\varepsilon(\tau)$.

[2-] *(e)* Recordemos que todo elemento $\pi \in S_n$ puede ser escrito—de muchas maneras—como producto de transposiciones. Muestre que la paridad del número de transposiciones empleadas depende solamente de π.

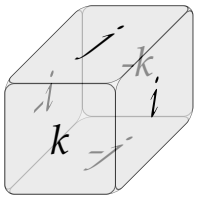
Una permutación que puede escribirse de alguna forma como un producto de un número par de transposiciones se dice *par*.

4.19. *Automorfismos de* $\mathbb{H}$.

[1] *(a)* Determine todos los automorfismos interiores de $\mathbb{H}$.

[2] *(b)* De ejemplos de automorfismos de $\mathbb{H}$ no interiores.

[2] *(c)* Muestre que $\mathsf{Aut}(\mathbb{H}) \cong S_4$.



†**4.20.** *Automorfismos de* S_n.

(a) Sea $\phi \in \mathsf{Aut}(S_n)$ y sea $g = (1\,2\,3)$. Mostrar que $\phi(g)$ es un producto de 3-ciclos disjuntos, que $\phi(\mathsf{cl}(g)) \subset \mathsf{cl}(\phi(g))$ y que, de hecho, la restricción $\phi : \mathsf{cl}(g) \to \mathsf{cl}(\phi(g))$ es una biyección.

(b) Mostrar que

$$|\mathsf{cl}(g)| = \frac{n!}{3(n-3)!}$$

y que si $\phi(g)$ es producto de r 3-ciclos disjuntos,

$$|\mathsf{cl}(\phi(g))| = \frac{n!}{3^r r!(n-3r)!}.$$

(c) Mostrar que o bien $r = 1$ o bien $r = 2$ y $n = 6$.

Supongamos desde ahora que $n \neq 6$.

(d) La imágen de todo 3-ciclo por ϕ es un 3-ciclo.

(e) Sea $3 \leq i \leq n$ y supongamos que $\phi((1\,2\,3)) = (\alpha\,\beta\,\gamma)$ y $\phi((1\,2\,i)) = (\alpha'\,\beta'\,\gamma')$. Muestre que $(\alpha\,\beta\,\gamma)(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$ tiene orden dos y use esto para concluir que $|\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'\}| = 4$.

(f) Muestre que existen $\alpha, \beta, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ distintos de manera que para cada $3 \leq i \leq n$ es $\phi((1\,2\,i)) = (\alpha\,\beta\,\gamma_i))$.

(g) Sea $\pi \in S_n$ tal que $\pi(1) = \alpha$, $\pi(2) = \beta$ y $\pi(i) = \gamma_i$ para cada $3 \leq i \leq n$. Muestre que $\phi(x) = \pi x \pi^{-1}$.

(h) Muestre que $\mathsf{inn} : S_n \to \mathsf{Aut}(S_n)$ es un isomorfismo.

(i) Determine $\mathsf{Aut}(S_6)$.

5. Cocientes

5.1. Mostrar que

(a) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^+ \cong S^1$;

(b) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$ cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$;

(c) $\mathsf{GL}_n(k)/\mathsf{SL}_n(k) \cong k^\times$ si k es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$;

(d) $S^1/\mathbb{G}_n \cong S^1$ si $n \in \mathbb{N}$;

(e) si $m|n$, $\mathbb{G}_n/\mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_{n/m}$.

5.2. Si G es un grupo no abeliano, entonces $G/\mathsf{Z}(G)$ no es cíclico.

Sugerencia. Use **3.14**.

Solución. En caso contrario, existiría $g \in G$ tal que $G = \langle x, \mathsf{Z}(G)\rangle$. Como claramente $\langle x, \mathsf{Z}(G)\rangle = (x)\,\mathsf{Z}(G)$, el ejercicio **3.14** tendríamos que G es abeliano. □

5.3. Muestre que $G/\mathsf{Z}(G) \cong \mathsf{Inn}(G)$.

Solución. Es claro que la applicación $\mathsf{inn} : G \to \mathsf{Aut}(G)$ considerada en **4.5** tiene a $\mathsf{Z}(G)$ como núcleo y, por definición, $\mathsf{Inn}(G) = \mathsf{im}\,\mathsf{inn}$. □

5.4. Si G es un grupo y H y K son subgrupos normales de G, muestre que $G/(H \cap K)$ es isomorfo a un subgrupo de $G/H \times G/L$.

5.5. Dado un grupo G, el *grupo* $\mathsf{Out}(G)$ *de automorfismos exteriores de* G es el cociente $\mathsf{Aut}(G)/\mathsf{Inn}(G)$; recordemos que en el ejercicio **4.5***(d)* vimos que $\mathsf{Inn}(G)$ es normal en $\mathsf{Aut}(G)$. Es importante observar que los elementos de $\mathsf{Out}(G)$ *no* son automorfismos de G.

Determinar $\mathsf{Out}(G)$ cuando $G \in \{S_3, S_4, \mathbb{H}\}$.

Solución. Sea $\mathcal{T} = \{(12), (13), (23)\}$ el conjunto de las 3 transposiciones de S_3, que es precisamente el subconjunto de S_3 formado por los elementos de orden 2. Si $f \in \mathsf{Aut}(G)$ y $t \in \mathcal{T}$, entonces $f(t)^2 = 1$ así que $f(t) \in \mathcal{T}$; vemos así que $f(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$ y, como f es biyectiva, que f se restringe a $\mathcal{T}$ y da un elementpo $f|_{\mathcal{T}} \in S(\mathcal{T})$. Es claro que obtenemos de esta forma un homomorfismo $\phi : f \in \mathsf{Aut}(S_3) \mapsto f|_{\mathcal{T}} \in S(\mathcal{T})$. Más aún, como $\mathcal{T}$ genera a S_3, ϕ es inyectivo y, en particular, $|\mathsf{Aut}(S_3)| \leq 3!$.

Como $\mathsf{Z}(S_3) = 1$, **5.3** nos dice que $|\mathsf{Inn}(S_3)| = |S_3/\mathsf{Z}(S_3)| = 3!$. Comparando cardinales, vemos que $\mathsf{Inn}(S_3) = \mathsf{Aut}(S_3)$ y, entonces, que $\mathsf{Out}(S_3) = 1$.

5.6. Sea G un grupo y sea H un subgrupo no normal. Mostrar que el conjunto de coclases izquierdas de H en G no forma un grupo bajo la multiplicación usual.

Solución. Supongamos que G/H es un grupo. El único elemento idempotente de un grupo es el neutro, así que, como $HH = H$ porque H es un subgrupo de G, vemos que H es el elemento neutro de G/H. Entonces, cualquiera sea $g \in G$, debe ser $HgH = gH$, o, equivalentemente, $g^{-1}HgH = H$. Como por supuesto $H \supset \{1\}$, es $H = g^{-1}HgH \supset g^{-1}Hg\{1\} = g^{-1}Hg$. La arbitrariedad de g implica que H es normal. □

6. Productos

6.1. Sean U y V dos grupos. Sean además $f : U \to W$ y $g : V \to W$ dos homomorfismos de grupos. Entonces la aplicación $h : (u, v) \in U \times V \mapsto f(u)g(v) \in K$ es un homomorfismo de grupos sii todo elemento de $f(U)$ conmuta con todo elemento de $h(V)$.

6.2. Si G y H son grupos, determine $\mathsf{Z}(G \times H)$.

6.3. *Producto directo interno.* Sea G un grupo.

(a) Sean N y M dos subgrupos normales de G y supongamos que $N \cap M = 1$ y $G = NM$. Mostrar que entonces es $G \cong N \times M$.

Solución. Mostremos primero que si $n \in N$ y $m \in M$, entonces $nm = mn$. Como M es normal, $nmn^{-1} \in M$ y entonces $nmn^{-1}m^{-1} \in M$; de forma similar, $mnm^{-1} \in N$ porque N es normal y entonces $nmn^{-1}m^{-1} \in N$. Así $nmn^{-1}m^{-1} \in N \cap M = 1$.

Consideremos ahora la aplicación $\phi : (n, m) \in N \times M \mapsto nm \in G$. Usando lo ya hecho es inmediato verificar que se trata de un homomorfismo de grupos. La hipótesis de que $G = NM$ implica que ϕ es sobreyectivo. Supongamos que $(n, m) \in \ker \phi$. Entonces $nm = 1$ en G y $N \ni n = m^{-1} \in M$, asi que $n, m \in N \cap M = 1$. Luego $\ker \phi = 1$ y ϕ es inyectiva. □

(b) Supongamos que G es grupo finito de orden mn con $(m, n) = 1$. Si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m, entonces G es isomorfo al producto directo de N y M.

Solución. Si $g \in G$, gNg^{-1} es un subgrupo de G de orden n, de manera que debe ser $gNg^{-1} = N$; vemos así que N es normal en G. De forma similar, M es un subgrupo normal de G. Sii $g \in N \cap M$, entonces $|g|$ divide a n y a m, así que divide a $(n, m) = 1$ y debe ser $g = 1$; luego $N \cap M = 1$. Como en *(a)*, usando esto podemos mostrar que todo elemento de N conmuta con todo elemento de M y, entonces, que $\phi : (n, m) \in N \times M \to nm \in G$ es un homomorfismo inyectivo de grupos. Como $|N \times M| = |G|$, ϕ es sobreyectivo y, finalmente, vemos que se trata de un isomorfismo.

†*(c)* Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(N_i)_{i=1}^k$ una familia de subgrupos normales de G tales que

$G = \left\langle \bigcup_{i=1}^{k} N_i \right\rangle$ y para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que

$$N_j \cap \left\langle \bigcup_{\substack{1 \le i \le k \\ i \ne j}} N_i \right\rangle = 1.$$

Mostrar que entonces $G \cong N_1 \times \cdots \times N_k$.

Solución. Razonando como en *(a)* vemos que si $1 \le i < j \le k$, $n_i \in N_i$ y $n_j \in N_j$,

$$[n_i, n_j] \in N_i \cap N_j \subset N_i \cap \left\langle \bigcup_{\substack{1 \le l \le k \\ l \ne i}} N_l \right\rangle = 1,$$

de manera que los elementos de N_i y de N_j conmutan. Luego la aplicación

$$\phi : (n_1, \dots, n_k) \in N_1 \times \cdots \times N_l \mapsto n_1 \cdots n_k \in G$$

es un homomorfismo de grupos, que es sobreyectivo porque $G = \left\langle \bigcup_{i=1}^{k} N_i \right\rangle$. Para ver que es inyectivo, sea $(n_1, \dots, n_k) \in \ker \phi$. Si $1 \le i \le k$,

$$n_i = n_{i-1}^{-1} n_{i-2}^{-1} \cdots n_2^{-1} n_1^{-1} n_k^{-1} n_{k-1}^{-1} \cdots n_{i+2}^{-1} n_{i+1}^{-1} \in N_i \cap \left\langle \bigcup_{\substack{1 \le l \le k \\ l \ne i}} N_l \right\rangle = 1.$$

Luego $(n_1, \dots, n_k) = 1$ y $\ker \phi$ es trivial.

†*(d)* Otra vez, supongamos que G es finito y sean $N_1, \dots, N_k$ subgrupos normales de G de órdenes $r_1, \dots, r_k$ tales que $(r_i, r_j) = 1$ si $1 \le i, j \le k$ y $|G| = r_1 \cdots r_k$. Entonces $G \cong N_1 \times \cdots \times N_k$.

Solución. Como en *(b)*, se ve que si $1 \le i < j \le k$, todo elemento de N_i conmuta con todo elemento de N_j. De esto deducimos que la aplicación

$$\phi : (n_1, \dots, n_k) \in N_1 \times \cdots \times N_k \mapsto n_1 \cdots n_k \in G$$

es un homomorfismo de grupos. Teniendo en cuenta los órdenes de los grupos considerados, es claro que para probar el resultado deseado basta mostrar que ϕ es inyectivo. Sea $(n_1, \dots, n_k) \in \ker \phi$. Como $\phi(n_1, \dots, n_k) = n_1 \cdots n_k = 1$, es

$$n_1 = n_k^{-1} \cdots n_2^{-1} \in N_1 \cap \langle N_2 \cup \cdots \cup N_k \rangle .$$

Pongamos $M = \langle N_2 \cup \cdots \cup N_k \rangle$. La función $\psi : (g_2, \dots, g_k) \in N_2 \times \cdots \times N_k \mapsto g_2 \cdots g_k \in M$ es un homomorfismo de grupos y es claramente sobreyectivo. Como el orden del dominio de ψ es $r_2 \cdots r_k$, concluimos que el orden de M divide a $r_2 \cdots r_k$. Pero entonces el orden de n_1 divide a r_1 y a $r_2 \cdots r_k$, esto es, $n_1 = 1$. De la misma forma se ve que todas las componentes de $(n_1, \dots, n_k)$ son triviales, y esto nos dice que ϕ es inyectiva, como queríamos. □

6.4. *Producto semi-directo.*

(a) Sean G y N grupos y sea $\theta : G \to \mathrm{Aut}(N)$ un homomorfismo de grupos. Sea $K = N \times G$ y consideremos el producto en K dado por

$$(n, g) \cdot (n', g') = (n\theta(g)(n'), gg'), \qquad \forall (n, g), (n', g') \in K.$$

Mostrar que, con respecto a este producto, K es un grupo.

Llamamos al grupo K construido el *producto semi-directo (o cruzado) de N por G con respecto a θ* y lo notamos $N \rtimes_\theta G$.

(b) Encontrar homomorfismos 'naturales' de grupo $\iota : N \to N \rtimes_\theta G$ y $\pi : N \rtimes_\theta G \to N$ tales que ι sea inyectivo, π sea sobreyectivo e $\operatorname{im} \iota = \ker \pi$.

(c) Mostrar que si $\theta = 1$ es el homomorfismo trivial, $N \rtimes_\theta G \cong N \times G$ es simplemente el producto directo.

6.5. *Producto semi-directo interno.* Sea K un grupo y sean G y N subgrupos de K con N normal en K. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $K = NG$ y $N \cap G = \{1\}$;

(b) $K = GN$ y $N \cap G = \{1\}$;

(c) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de N por uno de G.

(d) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de G por uno de N.

(e) La composición de la inclusión $\mathrm{incl} : : G \hookrightarrow K$ con la proyección canónica $\mathrm{can} : K \twoheadrightarrow K/N$ es un isomorfismo $\tau : G \cong K/N$.

(f) Existe un homomorfismo $\sigma : K \to N$ que se restringe a la identidad de N y cuyo núcleo es N.

Además, cuando estas afirmaciones valen, existe un homomorfismo de grupos $\theta : G \to \operatorname{Aut}(N)$ y un isomorfismo de grupos $\xi : N \rtimes_\theta G \to K$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{\iota} & N \rtimes_\theta G & \xrightarrow{\pi} & G \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ N & \xhookrightarrow{\mathrm{incl}} & K & \xrightarrow{\mathrm{can}} & K/N \end{array}$$

Los homomorfismos ι y π del diagrama fueron construidos en el ejercicio **6.4**.

6.6. Mostrar que $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$ para un homomorfismo $\theta : \mathbb{Z}_2 \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ apropiado.

6.7. Mostrar que S_n es el producto semi-directo de A_n y $\langle (1\,2) \rangle$.

†**6.8.** Mostrar que $\mathbb{H}$ no puede ser escrito como un producto semi-directo de forma no trivial.

†**6.9.** Sea G un grupo finito y $\phi : G \to G$ un endomorfismo de G y α el endomorfismo de G construido en el ejercicio **4.15**. Mostrar que G es el producto semi-directo de $\ker \alpha$ e $\operatorname{im} \alpha$.

7. Acciones

7.1. Si un grupo G actúa sobre un conjunto finito X, el *carácter* de X es la aplicación $\chi_X : G \to \mathbb{N}_0$ dada por

$$\chi_X(g) = |\{x \in X : gx = x\}|, \qquad \forall g \in G.$$

Si no hay ambigüedad sobre X, escribimos simplemente χ.

(a) Si G actúa transitivamente sobre X, es muestre que

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = 1.$$

Sugerencia. Considere el conjunto $S = \{(g,x) \in G \times X : gx = x\}$ y cuente sus elementos de dos formas distintas.

Solución. Consideremos el conjunto $S = \{(g,x) \in G \times X : gx = x\}$. Contamos los elementos de S de dos formas distintas. Primero, agrupando elementos de acuerdo a su segunda coordenada, vemos que

$$|S| = \sum_{x\in X}|G_x|. \tag{1}$$

Ahora bien, como la acción es transitiva, si fijamos $x_0 \in X$, es $|G_x| = |G_{x_0}|$ para cualquier $x \in X$, y entonces

$$|S| = |X||G_{x_0}| = |G|.$$

Por otro lado, agrupando los elementos de S de acuerdo a su primera coordenada, vemos que

$$|S| = \sum_{g\in G}\chi(g). \tag{2}$$

Comparando (1) y (2) obtenemos el resultado deseado. □

(b) En general, si la acción no es necesariamente transitiva, es

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = |X/G|.$$

Aquí, X/G es el conjunto de órbitas de G en X.

Solución. Claramente $\chi_X = \sum_{\mathcal{O}\in X/G}\chi_{\mathcal{O}}$, así que

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_X(g) = \sum_{\mathcal{O}\in X/G}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathcal{O}}(g) = |X/G|$$

porque la acción de G sobre cada órbita es por supuesto transitiva. □

†*(c)* Si G actúa transitivamente sobre X y $x_0 \in X$, entonces, si G_{x_0} es el estabilizador de x_0 en G, es

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)^2 = |X/G_{x_0}|.$$

Sugerencia. Una forma de hacer esto consiste en contar los elementos del conjunto $S = \{(g,x,y) \in G \times X \times X : gx = x,\ gy = y\}$ de dos formas distintas.

Solución. Por un lado, tenemos que

$$|S| = \sum_{g\in G}|\{(x,y) \in X \times X : gx = x,\ gy = y\}| = \sum_{g\in G}\chi(g)^2.$$

Por otro,

$$|S| = \sum_{x\in X} |\{(g,y) \in G \times X : gx = x,\, gy = y\}| = \sum_{x\in X} \sum_{g\in G_x} \chi(g);$$

como la acción es transitiva, esto es

$$= |X| \sum_{g\in G_{x_0}} \chi(g),$$

y, finalmente, usando la parte anterior de este ejercicio,

$$= |X||G||X/G_{x_0}|.$$

Comparando los dos resultados obtenidos, obtenemos la identidad deseada. □

7.2. *Grupos lineales finitos.* Sea k un cuerpo finito de q elementos.

(a) Sea $V = k^2$ el k-espacio vectorial de vectores columna y sea X el conjunto de vectores no nulos de V. Mostrar que la acción de $\mathsf{GL}_2(k)$ sobre V por multiplicación a izquierda preserva a X y que la acción de $\mathsf{GL}_2(k)$ sobre X es transitiva.

(b) Sea $v_0 = (1,0)^t \in X$. Determinar el estabilizador $\mathsf{GL}_2(k)_{v_0}$ de v_0 en $\mathsf{GL}_2(k)$.

(c) Mostrar que $|\mathsf{GL}_2(k)| = (q^2-1)(q^2-q)$.

†*(d)* Más generalmente, mostrar que si $n \in \mathbb{N}$, es

$$|\mathsf{GL}_n(k)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

†*(e)* Sea $n \in \mathbb{N}$. Muestre que el morfismo $\det : \mathsf{GL}_n(k) \to k^\times$ es sobreyectivo y concluya que

$$|\mathsf{SL}_n(k)| = \frac{1}{q-1} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

7.3. *Subgrupos grandes.*

(a) Sea G un grupo finito y H un subgrupo de índice 2. Construya explícitamente un homomorfismo de grupos $f : G \to \mathbb{Z}_2$ tal que $\ker f = H$, mostrando en particular que H es normal.

El objetivo de lo que sigue es obtener una prueba de la siguiente proposición que generaliza a este resultado:

> **Proposición.** *Sea G un grupo finito, sea p el menor número primo que divide a $|G|$ y sea H un subgrupo de G de índice p. Entonces H es normal.*

Notemos que, en las condiciones de este enunciado G no puede poseer subgrupos de índice menor que p.

(b) Sea $X = G/H = \{gH : g \in G\}$ el conjunto de coclases a izquierda de H en G; así, $|X| = p$. Consideramos sobre X la acción usual de G por multiplicación, dada por

$$(g, hH) \in G \times X \mapsto ghH \in X.$$

y sea $\theta : G \to S(X)$ el homomorfismo de grupos correspondiente. Mostrar que si $K = \ker\theta$, se tiene que $H \supset K$ y, como $\operatorname{im}\theta$ es un subgrupo de $S(X)$, que $|G : K|$ divide a $p!$.

(c) Muestre que $|G : K| = |G : H|$, para concluir que $H = K$ y, así, que H es normal.

Sugerencia. Para hacerlo, observe primero que $p = |G : H| \leq |G : K|$, de manera que $|G : K| \neq 1$. Si q es un primo que divide a $|G : K|$, lo hecho en la parte anterior implica que $q \leq p$; esto junto con la elección de p implica que $|G : K| = p^r$ para algún $r \geq 1$. Muestre para terminar que debe ser $r = 1$.

8. Teoremas de Sylow

[1] **8.1.** Sea p un número primo. Un grupo abeliano finito de exponente p^r con $r > 0$ posee elementos de orden p.

Solución. Sea $\pi : g \in G \mapsto g^p \in G$. Como G es abeliano, π es un homomorfismo de grupos. Queremos mostrar que no es inyectivo. De serlo, sería biyectivo y tendría orden finito n en $\mathsf{Aut}(G)$.

Pero entonces cualquiera sea $g \in G$, es $g = \mathsf{id}_G^r(g) = \pi^{rn}(g) = g^{p^{rn}} = 1$. Esto no es posible porque G no es trivial. □

[2] **8.2.** Sea p un número primo y G un grupo de orden $p^r > 1$. Entonces $\mathsf{Z}(G)$ no es trivial.

Solución. Si $x \in G$ es tal que $|\mathsf{cl}\, x| > 1$, entonces, como $|\mathsf{cl}\, x| = [G : \mathsf{C}(x)]$ es un divisor de $|G|$, vemos que $p \mid |\mathsf{cl}\, x|$. Ahora, como

$$|G| = \sum_{\substack{c \in \mathsf{Cl}(G) \\ |c|>1}} |c| + |\mathsf{Z}(G)|$$

y p divide al miembro izquierdo y al primer término del derecho, concluimos que $p \mid |\mathsf{Z}(G)|$. □

[2+] **8.3.** Sea G un grupo finito de orden $|G| = p^r m$ con p primo y $(p, m) = 1$. Entonces G posee subgrupos de orden p^r.

Solución. Hagamos inducción sobre $|G|$; por supuesto, si $|G| = 1$, no hay nada que probar.

Usando **8.2** vemos que $\mathsf{Z}(G)$ es no trivial. Como se trata de un abeliano cuyo exponente divide a p^r, **8.1** nos dice que existe un subgrupo $A \subset \mathsf{Z}(G)$ de orden p.

Como A es normal en $\mathsf{Z}(G)$, que a su vez es característico en G, vemos que A es normal en G. Además, $p^{r-1}m = |G/A| < |G|$ así que nuestra hipótesis inductiva implica que existe un subgrupo $H' \subset G/A$ de orden p^{r-1}.

Sea $\pi : G \to G/A$ la proyección canónica y sea $H = \pi^{-1}(H')$. Entonces H es un subgrupo de G de orden p^r. □

Definición. *Sea p un número primo. Un elemento g de G es* p-primario *si su orden es una potencia de p. Un grupo G es un* p-grupo *si el orden de todo elemento de G es una potencia de p.*

8.4. Sea p un número primo.

(a) Si G es un p-grupo y H es un subgrupo de G, entonces H es un p-grupo.

(b) Si G es un p-grupo y $f : G \to H$ es un homomorfismo sobreyectivo, H es un p-grupo.

(c) Si G es un grupo, H un subgrupo normal de G y tanto H como G/H son p-grupos, entonces G es un p-grupo.

[2] **8.5.** Un grupo finito G es un p-grupo sii $|G| = p^r$ para algún $r \geq 1$.

Solución. Si $|G|$ es divisible por un número primo q distinto de p, entonces, usando **8.3** vemos que G posee un q-subgrupo H no trivial, que entonces por **8.2** posee un centro $\mathsf{Z}(H)$ no trivial, que a su vez, en vista de **8.1**, posee elementos de orden q. Esto es imposible si G es un p-grupo. Esto prueba la necesidad de la condición.

Para ver la suficiencia, supongamos que G tiene orden p^r para algún $r \in \mathbb{N}$ y sea $g \in G$. Como $|g| \mid |G|$, es claro que $|g|$ es una potencia de p. Así, G es un p-grupo, como queríamos.

Definición. *Sea p un número primo y G un grupo. Un* p-subgrupo de Sylow *de G es un p-subgrupo maximal de G. Escribimos $\mathsf{Syl}_p(G)$ al conjunto de los p-subgrupos de Sylow de G.*

8.6. Sea G un grupo finito y p un número primo.

[1+] *(a)* Si $|G| = p^r m$ con $(p, m) = 1$ y $H \subset G$ es un subgrupo tal que $|H| = p^r$, entonces $H \in \mathsf{Syl}_p(G)$.

Solución. Sea $H \subset G$ un subgrupo de orden p^r y supongamos que no es un p-subgrupo maximal. Entonces existe otro p-subgrupo $H' \subset G$ tal que $H \subsetneq H'$. Entonces $|H'| = p^{r'}$ con $r' > r$. Pero debe ser $p^{r'} = |H'| \mid |G| = p^r m$, lo que es imposible. □

[1] *(b)* Si $p \mid |G|$, entonces $\mathsf{Syl}_p(G) \neq \varnothing$.

Solución. Sea p^r la mayor potencia de p que divide a $|G|$. Entonces (**8.3**) nos dice que existen subgrupos de G de orden p^r y el punto anterior nos dice que estos son maximales. □

[1+] **8.7.** Si G es un grupo y $H \in \mathsf{Syl}_p(G)$ y $x \in G \setminus H$ tiene orden $|x| = p^n$, entonces $x \notin \mathsf{N}(H)$.

Sugerencia. Suponga lo contrario y considere el orden del elemento xH en $\langle H \cup \{x\} \rangle / H$.

Solución. Supongamos que $x \in \mathsf{N}(H)$, de manera que H es normal en $H' = \langle N \cup \{x\} \rangle$. Como $H' \supsetneq H$, H' no es un p-subgrupo de G y entonces H'/H no es un p-grupo. Como H'/H esta generado por xH, es cíclico, así que $|xH|$ no es una potencia de p. Esto contradice la hipótesis de que $|x| = p^n$. □

8.8. Sea G un grupo finito y $K \in \mathsf{Syl}_p(G)$. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de subgrupos de G conjugados de K.

[1] *(a)* Sea $H \in \mathsf{Syl}_p(G)$ y sea $\sim$ la relación en $\mathcal{C}$ tal que

$$L \sim L' \text{ sii existe } h \in H \text{ tal que } hLh^{-1} = L.$$

Muestre que se trata de una relación de equivalencia.

[1+] *(b)* Sea $L \in \mathcal{C}$ y notemos $[L]$ a la clase de equivalencia de L. Entonces $|[L]| = [H : H \cap \mathsf{N}(L)]$. Además, si $L \neq H$ es $|[L]| > 1$ y es divisible por p. Si, por el contrario, $L = H$, entonces $|[H]| = 1$.

Solución. La acción de H sobre $[L]$ por conjugación es transitiva y el estabilizador de L en H es precisamente $H \cap \mathsf{N}(L)$, así que $|[L]| = [H : H \cap \mathsf{N}(L)]$.

Supongamos que $H \neq L$. Si $[H : H \cap \mathsf{N}(L)] = 1$, entonces $H = H \cap \mathsf{N}(L)$ y vemos que $L \subset \mathsf{N}(L) \subset H$. Como $|L| = |H|$, esto es imposible. Luego $[H : H \cap \mathsf{N}(L)] > 1$. Como H es un p-grupo, este índice debe ser divisible por p.

Es inmediato que $[H] = \{H\}$, así que la última afirmación es clara. □

(c) Muestre que

$$|\mathcal{C}| \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p}, & \text{si } H \notin \mathcal{C}; \\ 1 \pmod{p}, & \text{si } H \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

Solución. Supongamos que $H \notin \mathcal{C}$, entonces todas las clases de equivalencia de $\mathcal{C}$ tienen cardinal divisible por p, así que $|\mathcal{C}| \cong 0 \pmod{p}$.

Si en cambio $H \in \mathcal{C}$, entonces tolas clas clases de equivalencia de $\mathcal{C}$, salvo $[H]$, tienen cardinal divisible por p, así que $|\mathcal{C}| \cong 1 \pmod{p}$.

(d) Concluya que H es conjugado de K y que $|\mathcal{C}| \cong 1 \pmod{p}$.

8.9. Pruebe el siguiente teorema de Peter Ludwig Mejdell Sylow (1832–1918, Noruega) que es, probablemente, el teorema más importante de la teoría de grupos finitos.

Teorema. (M. L. Sylow, Théorèmes sur les groupes de substitutions, Math. Ann. **5** (1872), no. 4, 584–594.) *Sea p un número primo. Sea G un grupo finito de orden $p^r m$ con $(p, m) = 1$. Entonces*

(a) *Un subgrupo H de G es un p-subgrupo de Sylow sii $|H| = p^r$.*

(b) *Todos los p-subgrupos de Sylow de G son conjugados.*

(c) *Sea n_p el número de p-subgrupos de Sylow de G. Entonces $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.*

(d) *$n_p \mid m$.*

8.10. Muestre que no hay grupos simples de orden 28 ó 312.

Solución. Sea G de orden $28 = 2^2 \cdot 7$. Entonces $n_7 \mid 2^2$, así que $n_7 \in \{1, 2, 4\}$. Pero también $n_7 \equiv 1 \pmod{7}$, así que necesariamente $n_7 = 1$ y concluimos que un 7-subgrupo de Sylow es normal.

Sea ahora G de orden $312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. El único divisor positivo de $2^3 \cdot 3$ congruente con 1 módulo 13 es 1, así que $n_{13} = 1$. Luego G no es simple. □

8.11. Muestre que un grupo de orden 12 ó 56 no es simple.

Solución. Sea G un grupo de orden $12 = 2^2 \cdot 3$. Entonces $n_3 \mid 4$ y $n_3 \equiv 1 \pmod 3$, así que si hay 3-subgrupos de Sylow no normales en G, debe ser $n_3 = 4$. Entonces hay en G exactamente $8 = 4 \cdot (3-1)$ elementos de orden 3. Eso deja a lo sumo 3 elementos en G que pueden ser 2-primarios. Como hay al menos un 2-subgrupo de Sylow de orden 4, vemos que tiene que haber exactamente uno, que resulta entonces normal. Así, G no es simple.

Sea ahora G un grupo de orden $56 = 2^3 \cdot 7$. Entonces $n_7 \mid 8$ y $n_7 \equiv 1 \pmod 7$. Esto implica que $n_7 \in \{1, 8\}$. Si $n_7 = 1$, G no es simple. Supongamos entonces que $n_7 = 8$. Como cada 7-grupo de Sylow es cíclico, vemos que hay en G exactamente $48 = 8 \cdot (7-1)$ elementos de orden 7. Por otro lado, hay al menos un 2-subgrupo de Sylow, que tiene orden 8, así que hay al menos 7 elementos 2-primarios no triviales en G. Como $1 + 7 + 48 = |G|$, concluimos que hay en G exactamente 7 elementos no triviales 2-primarios y que entonces $n_2 = 1$. □

8.12. Si p y q son primos distintos, un grupo de orden pq no es simple.

Solución. Si G tiene orden pq y es simple, el teorema de Sylow implica que $n_p = q$ y $n_q = p$. Contando los elementos de G agrupados de acuerdo a su orden, vemos que $pq = 1 + (p-1)q + (q-1)p$, es decir, que $(p-1)(q-1) = 0$. Esto es imposible. □

8.13. Sea G un grupo de orden $p^r m$ con p primo, $r \geq 1$ y $p > m$. Entonces G no es simple.

Solución. n_p divide a m, así que $n_p < p$. Como $n_p \equiv 1 \pmod p$, debe ser $n_p = 1$. □

8.14. Sea G un grupo de orden $p^2 q$ con p y q primos distintos. Entonces G no es simple.

Solución. Supongamos que G es simple. Si $q < p$, entonces como $n_p \mid q$ y $n_p \equiv 1 \pmod p$, debe ser $n_p = 1$, lo que es imposible. Luego debe ser $q > p$. Como sabemos que $n_q \equiv 1 \pmod q$, $n_q \mid p^2$ y $n_q > 1$, debe ser $n_q = p^2$. Como cada q-subgrupo de Sylow es cíclico, esto implica que hay exactamente $(q-1)p^2 = p^2 q - p^2$ elementos de orden q en G. Luego hay a lo sumo p^2 elementos p-primarios, que deben formar el único p-subgrupo de Sylow. Así $n_p = 1$. (Alternativamente, vimos que en el segundo caso debe ser $p^2 \equiv 1 \pmod q$; usando que $X^2 - 1$ tiene a lo sumo dos raices en $\mathbb{Z}_q$, vemos que $p = 1$ ó $p = q - 1$ y claramente ambas opciones son imposibles.) □

8.15. Muestre que un grupo de orden menor que 60 no es simple.

8.16. Mostrar que si G es un grupo y P es un subgrupo de Sylow de G, entonces P es un subgrupo característico de $\mathsf{N}(P)$.

8.17. Si todos los subgrupos de Sylow de un grupo finito G son normales, entonces $G \cong \prod_{p \text{ primo}} P_p$. En particular, un grupo abeliano finito es producto de sus subgrupos de Sylow.

9. Varia

9.1. Grupos múltiplemente transitivos

Sea G un grupo y supongamos que G actúa fielmente sobre un conjunto X. Sea $k \geq 1$.

9.1.1. Mostrar que obtenemos una acción de G sobre X^k si definimos

$$g \cdot (x_1, \ldots, x_k) = (gx_1, \ldots, gx_k), \qquad \text{si } g \in g \text{ y } (x_1, \ldots, x_k) \in X^k.$$

Mostrar que si $|X| > 1$, la acción de G sobre X^k no es transitiva.

Definición. *Pongamos* $X^{(k)} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^k : x_i \neq x_j \text{ si } 1 \leq i < i \leq k\}$. *Diremos que la acción de G sobre X es* k-transitiva *si G actúa transitivamente sobre $X^{(k)}$.*

9.1.2. Mostrar que la acción canónica de S_n sobre $\{1, \ldots, n\}$ es n-transitiva.

9.1.3. Mostrar que la acción canónica de A_n sobre $\{1, \ldots, n\}$ es $(n-2)$-transitiva pero no $(n-1)$-transitiva.

9.1.4. Sea K un cuerpo, V un K-espacio vectorial. Mostrar que $\mathsf{Aut}_k(V)$ actúa 1-transitivamente sobre $V \setminus \{0\}$ pero no 2-transitivamente.

9.1.5. Sea otra vez K un cuerpo, V un K-espacio vectorial con $\dim_K \geq 2$, y sea X el conjunto de todos los subespacios de V de dimensión 1. Mostrar que la acción de $\mathsf{Aut}_K(V)$ sobre V induce una acción natural sobre X, que es 2-transitiva pero no 3-transitiva.

9.1.6. Mostrar que la acción sobre el conjunto de vértices de un tetraedro regular del grupo de rotaciones del sólido es 2- pero no 3-transitiva.

9.1.7. Sea A un grupo finito no trivial y $A' = A \setminus \{1\}$. Claramente $\mathsf{Aut}(A)$ actúa sobre A'.

(a) Si $\mathsf{Aut}(A)$ actúa 1-transitivamente en A', entonces existe un número primo p tal que todo elemento de A' es de orden p. Esto implica que A es un p-grupo, así que su centro no es trivial. Concluir que A es abeliano y entonces, usando el ejercicio **2.7**, que $G \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$.

(b) Determinar todos los grupos A tales que $\mathsf{Aut}(A)$ actúa 2-transitivamente sobre A'.

Definición. *Diremos que la acción de G sobre X es* finamente k-transitiva *si es k-transitiva y además, para cada $\forall (x_1, \ldots, x_k) \in X^{(k)}$ y cada $g_1, g_2 \in G$, es*

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\},\ g_1(x_i) = g_2(x_i) \implies g_1 = g_2.$$

En otras palabras, esta condición dice que dos elementos de G que actúan de la misma forma sobre k elementos de k deben coincidir.

9.1.8. Si la acción de G es finamente k-transitiva sobre X y $n = |X|$, entonces

$$|G| = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

9.1.9. La acción de S_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es finamente n-transitiva, finamente $(n-1)$-transitiva pero no finamente $(n-2)$-transitiva.

9.1.10. La acción de A_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es finamente $(n-2)$-transitiva.

9.1.11. *Acciones finamente* 1*-transitivas.* Este ejercicio describe todas las acciones finamente 1-transitivas.

(a) Sea G un grupo finito. Pongamos $R = G$ y consideremos la acción regular a izquierda $G \times R \to R$; recordemos que

$$g \cdot r = gr, \qquad \forall g \in G, r \in R.$$

Mostrar que la acción de G sobre R es finamente 1-transitiva.

(b) Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto X no vacío de forma finamente 1-transitiva. Mostrar que existe una función biyectiva $\phi : R \to X$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times R & \longrightarrow & R \\ {\scriptstyle \mathsf{id}_G \times \phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ G \times X & \longrightarrow & X \end{array}$$

conmuta, si las flechas verticales están dadas por las acciones de G.

9.1.12. Sea K un cuerpo finito de q elementos.

(a) Consideremos el conjunto $\mathsf{AGL}(1, K) = K^\times \times K$ y dotémoslo de un producto dado por

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', b + ab'), \qquad \forall (a, b), (a', b') \in \mathsf{AGL}(1, K).$$

Muestre que $(\mathsf{AGL}(1, K), \cdot)$ es un grupo.

(b) Consideremos ahora el conjunto $X = K$ y la aplicación $\mathsf{AGL}(1, K) \times K \to K$ dada por

$$(a, b) \cdot x = ax + b, \qquad \forall (a, b) \in \mathsf{AGL}(1, K), \forall x \in X.$$

Muestre que esto da una acción de $\mathsf{AGL}(1, K)$ sobre X.

(c) Muestre que esta acción es finamente 2-transitiva.

9.1.13. Sea G un grupo finito y sea X un conjunto no vacío sobre el que G actúa de forma finamente 2-transitiva.

(a) Sea $x_0 x \in X$ y $H = G_{x_0}$. Pongamos $X' = X \setminus \{x_0\}$. Entonces H actúa de forma finamente 1-transitiva sobre X' y es un subgrupo maximal de G.

Solución. Sea $t \in G \setminus H$. Queremos ver que $\langle t, H \rangle = G$. Sea $g \in G \setminus H$. Es $gx_0 \neq x_0$ y $tx_0 \neq x_0$, así que $gx_0, tx_0 \in X'$. Como H actúa de manera transitiva sobre X', existe $h \in H$ tal que $hgx_0 = tx_0$. Vemos entonces que $t^{-1}hgx_0 = x_0$, es decir, que $t^{-1}hg \in H$. Pero esto implica que $g \in \langle t, H \rangle$. □

(b) $H \cap gHg^{-1} \neq 1$ sii $g \in H$. En particular, $\mathsf{N}(H) = H$ y $C(h) \subset H$ para cada $h \in H \setminus \{1\}$.

Solución. Supongamos que $g \notin H$ y sea $h \in H \cap gHg^{-1}$. Entonces existe $h' \in H$ tal que $h = gh'g^{-1}$ y vemos que $hgx = gh'g^{-1}gx_0 = gh'x_0 = gx_0$, porque $h' \in H$. Como además $hx_0 = x_0$, h tiene dos puntos fijos y debe ser $h = 1$. □

(c) G posee involuciones y son todas conjugadas. Notemos I al conjunto de las involuciones de G.

Solución. Es $|G| = n(n-1)$ por **9.1.8**, que es par. Luego existen elementos de orden 2 en g. Veamos que son todos conjugados.

Sean $s, t \in G$ dos involuciones y sea $y \in X$. Como G es 2-transitivo, existe $u \in G$ tal que $uy = y$ y $usy = ty$. Pongamos $v = usu^{-1}$. Entonces $vy = usu^{-1}y = usy = ty$ y $vty = usu^{-1}ty = us^2 = uy = y = tty$, así que v y t coinciden en dos elementos de X. Luego $t = v = usu^{-1}$ y vemos que s y t son conjugados. □

(d) Sea $N' = \{g \in G : \text{para cada } x \in X,\ gx \neq x\}$ y $N = N' \cup \{1\}$. Entonces es $|N'| = n - 1$. Además, N es un subconjunto normal de G.

Solución. Como la acción es transitiva, para cada $x \in X$ hay exactamente $|H| - 1$ elementos que dejan fijo solamente a x. Luego hay exactamente $n(|H| - 1)$ elementos en G que dejan fijo algún elemento de X y vemos que hay $n|H| - 1 - n(|H| - 1) = n - 1$ elementos en G que mueven todos los elementos de X.

La segunda afirmación del enunciado es inmediata. □

(e) La acción de N sobre X es simplemente transitiva.

Solución. Consideremos la aplicación $\phi : n \in N \mapsto nx_0 \in X$. Se trata de una inyección: en efecto, si $\phi(n) = \phi(n')$, vemos que $n^{-1}n$ es un elemento de N que deja fijo a x_0, así que debe ser $n^{-1}n = 1$, esto es, $n = n'$. Como $|N| = |X|$, se sigue que ϕ es biyectiva. Es fácil deducir de esto que la acción de N es simplemente transitiva. □

(f) H posee a lo sumo una involución. Si H posee una involución, $|I| = n$; en caso contrario, $|I| = n - 1$.

Solución. Supongamos que H posee r involuciones y $r \geq 1$. Como ninguna de ellas puede fijar un elemento de X', vemos que cada una de ellas tiene a x_0 como único punto fijo. Ahora, como la acción de G es transitiva, para cada $y \in X$ hay exactamente r involuciones en G que dejan fijo a y y concluimos que hay rn involuciones en total en G.

Cada involución de G es producto de $\frac{1}{2}(n-1)$ transposiciones y hay rn de ellas. Como dos involuciones de G no pueden compartir una transposición y en $S(X)$ hay exactamente $\frac{1}{2}n(n-1)$ transposiciones, vemos que la única posibilidad es que r sea 1. Esto prueba además que en este caso hay n involuciones en G.

Supongamos ahora que H no contiene involuciones. Sea $s \in I$. Para cada $y \in X'$ elijamos $h_y \in H$ de manera que $h_y s x_0 = y$; esto es posible porque $sx_0, y \in X'$ y H actúa transitivamente sobre X'. Es $h_y s h_y^{-1} x_0 = h_y s x_0 = y$. Esto nos dice que $\{h_y s h_y^{-1} : y \in X'\}$ es un conjunto de exactamente $n - 1$ involuciones distintas. Como en este caso es $I \subset N'$, vemos que hay a lo sumo $n - 1$ involuciones y, en definitiva, que $|I| = n - 1$. □

(g) Si $s, t \in I$ y $s \neq t$, entonces st no tiene puntos fijos en X.

Solución. Sean $s, t \in I$ y supongamos que $y \in X$ es tal que $sty = y$. Claramente también es es $tsy = y$. Si $sy = y$, entonces $s, t \in G_y$ y como G_y es conjugado de H, **9.1.13***(f)* implica que $s = t$. Si, por el contrario $z = sy \neq y$, entonces $sz = s^2y = y$ y $tz = tsy = y$, así que s y t coinciden en dos elementos de X (a saber, y y z) así que debe ser $s = t$. En cualquier caso, vemos que debe ser $s = t$. □

(h) Sea $j \in G \setminus H$ una involución. Si $H \cap I \neq \varnothing$, sea además i la única involución de H. Entonces

$$I = \begin{cases} j^H, & \text{si } H \cap I = \varnothing; \\ j^H \cup \{i\}, & \text{si } H \cap I \neq \varnothing. \end{cases}$$

Aquí $j^H = \{hjh^{-1} : h \in H\}$.

Solución. Hay que mostrar que todas las involuciones de $G \setminus H$ son conjugadas por H. Para ello basta observar que si $s, t \in G \setminus H$ son involuciones, existe un único elemento $u \in G$ tal que $ux_0 = x_0$ y $usx_0 = tx_0$ (porque $sx_0 \neq x_0 \neq tx_0$), de manera que $u \in H$ y, como en **9.1.13***(c)* se puede ver que $t = usu^{-1}$. □

(i) Es $I^2 \setminus \{1\} = N'$ y N es un subgrupo normal abeliano de G. De hecho, si $H \cap I = \varnothing$, se tiene que $I = N'$. Más precisamente, existe un número primo p tal que $N \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, y $p = 2$ sii $H \cap I = \varnothing$.

Solución. Supongamos primero que $H \cap I \neq \varnothing$. Entonces hay exactamente n involuciones en G, digamos $I = \{s_1, \ldots, s_n\}$ y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $s_n \in H$. Usando **9.1.13***(g)*, vemos que $\{s_1s_n, \ldots, s_{n-1}s_n\} \subset N'$; como los $n-1$ elementos listados son distintos entre si, **9.1.13***(d)* implica que $\{s_1s_n, \ldots, s_{n-1}s_n\} = N'$. Razonando análogamente, podemos ver que $\{s_ns_1, \ldots, s_ns_{n-1}\} = N'$, de manera que todo elemento de N' puede escribirse como s_is_n y como s_ns_j para apropiados $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

En particular, todo elemento de N^2 es de la forma $s_is_n \cdot s_ns_i = s_is_j$ con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y, usando **9.1.13***(g)*, vemos que si $N^2 \subset N$. Como G es finito, **3.1***c* nos dice que N es un subgrupo de G, que es normal porque N' es un subconjunto normal de G.

Como N es normal, la conjugación induce un morfismo de grupos $\alpha : H \to \mathsf{Aut}(N)$ y, si $h \in H$ y $s_is_n \in N$, es $\alpha(h)(s_is_n) = hs_ih^{-1}s_n$ porque $hs_nh^{-1} = s_n$. El resultado de **9.1.13***(h)* implica entonces que la acción de $\mathsf{Aut}(N)$ sobre N' es transitiva y **9.1.7***(a)* implica que existe un primo p tal que $N \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$.

Si $p = 2$, hay involuciones en N' y existen $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tales que $s_is_n = s_j$. Esto implica que $s_n = s_is_n \cdot s_ns_j \in N'$. Pero esto es imposible porque s_n deja fijo a x. Luego p es impar.

Supongamos ahora que $H \cap I = \varnothing$. En este caso $I = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ tiene exactamente $n-1$ elementos y cada uno de ellos está en N'. Comparando cardinales, vemos inmediatamente que $N' = I$. En vista de **9.1.13***(g)*, es $N'^2 = I^2 \subset N'$, así que $N^2 \subset N$ y otra vez vemos que N es un subgrupo normal de G.

La acción por conjugación de G sobre $N' = I$ es transitiva en vista de **9.1.13***(c)* así que **9.1.7***(a)* implica que existe un primo p tal que $N \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$. Finalente, como hay elementos de orden 2 en N, claramente debe ser $p = 2$. □

(j) Si T es un subgrupo normal de G con $\mathsf{Z}(T) \neq 1$, entonces $G = \mathsf{Z}(T) \rtimes H$.

Solución. Como T es normal en G y $\mathsf{Z}(T)$ es característico en T, $\mathsf{Z}(T)$ es normal en G. Entonces $\mathsf{Z}(T)H$ es un subgrupo de G.

Supongamos que $z \in \mathsf{Z}(T) \cap H \setminus \{1\}$. Entonces en vista de **9.1.13***(b)*, $T \subset \mathsf{C}(z) \subset H$. Pero, en ese caso, es $g \in G \setminus H$, $T = T \cap gTg^{-1} \subset H \cap gHh^{-1} = 1$, lo que contradice la hipótesis. Luego $\mathsf{Z}(T) \cap H = 1$; en particular, $\mathsf{Z}(T)H$ es estrictamente más grande que H y como H es maximal en G, concluimos que el subgrupo $\mathsf{Z}(T)H$ coincide con G.

Considerando la acción de H sobre $\mathsf{Z}(T)$ inducida por la conjugación en G, es fácil mostrar ahora que la aplicació $\phi : (z, h) \in \mathsf{Z}(T) \rtimes H \to zh \in G$ es un isomorfismo. □

(k) $G \cong N \rtimes H$ con respecto a la acción por conjugación de H sobre N.

Solución. El resultado sigue inmediatamente de **9.1.13***(i)* y **9.1.13***(j)*. □

(l) Fijemos $x_1 \in X'$. Definimos una aplicación $\xi : N' \to H$ de la siguiente manera: si $n \in N'$, entonces $nx_0 \in X'$ porque n no deja fijo ningún elemento de X, así que como la acción de H sobre X' es simplemente transitiva, existe exactamente un elemento $\xi(n) \in H$ tal que $\xi(n)x_1 = nx_0$. Mostrar que ξ es una biyección.

Solución. Si $n, n' \in N'$ son tales que $\xi(n) = \xi(n')$, entonces es $nx_0 = \xi(n)x_1 = \xi(n')x_1 = n'x_0$ y vemos que $n^{-1}n$ tiene un punto fijo. Como se trata de un elemento de N debe ser el elemento neutro, y concluimos que $n = n'$. Esto es, ξ es inyectiva.

Sea ahora $h \in H$. Como N actúa transitivamente en X, existe $n \in N$ tal que $hx_1 = nx_0$. No puede ser que $n = 1$ porque en ese caso sería $hx_1 = x_0$, contradiciendo el hecho de que $hX' = X'$. Luego $n \in N'$ y claramente es $h = \xi(n)$. □

(m) Fijemos $x_1 \in X'$. Definimos en X dos operaciones $\cdot$ y $+$ en X de la siguiente manera.

Sean $x, y \in X$. Si $x = x_0$, ponemos $x \cdot y = x_0$. Si $x \neq x_0$, existe exactamente un elemento $h \in H$ tal que $hx_1 = x$, y ponemos $x \cdot y = hy$. Por otro lado, sabemos que existe exactamente un elemento $n \in N$ tal que $nx_0 = x$; ponemos $x + y = ny$.

Mostrar que $(X, +)$ es un grupo abeliano isomorfo a N y que $(X', \cdot)$ es un grupo isomorfo a H.

(n) Mostrar que si H es abeliano, entonces $(X, +, \cdot)$ es un cuerpo K y que $G \cong \mathsf{AGL}(1, K)$.

9.2. Grupos nilpotentes

Sea G un grupo. Definimos una sucesión creciente

$$1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n \subset \cdots$$

de subgrupos normales de G inductvamente de la siguiente manera, empezando por $Z_0 = 1$: sea $i \in \mathbb{N}_0$ y supongamos que ha hemos contruido Z_i. Como Z_i es normal, podemos considerar el homomorfismo canónico $\pi : G \to G/Z_i$. Ponemos entonces $Z_{i+1} = \pi^{-1}\big(\mathsf{Z}(G/Z_i)\big)$; se trata claramente de un subgrupo

normal de G, y es $Z_{i+1}/Z_i \cong \mathsf{Z}(G/Z_i)$. La sucesión de subgrupos $(Z_i)_{i\geq 0}$ se llama la *cadena central superior* de G.

Definición. *Si existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $Z_n = G$, decimos que G es* nilpotente. *El menor tal n es la* longitud nilpotente *de G.*

9.2.1. Un grupo abeliano es nilpotente. ¿Es nilpotente S_3? Dé un ejemplo de un grupo nilpotente y no abeliano.

Definición. *Una sucesión creciente $(N_i)_{i\geq 0}$ de subgrupos normales de un grupo G tal que $N_0 = 1$ y $N_{i+1}/N_i \subset \mathsf{Z}(G/N_i)$ para cada $i \geq 0$ es una* cadena central ascendente. *Si existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $N_i = G$ entonces decimos que la cadena* termina *o que* llega *a G.*

9.2.2. Si G es un grupo y $(N_i)_{i\geq 0}$ es una cadena central ascendente en G, muestre que para cada $i \geq 0$ se tiene que $[N_{i+1}, G] \subset N_i$.

Solución. Como $N_{i+1}/N_i \subset \mathsf{Z}(G/N_i)$, si $n \in N_{i+1}$ y $g \in G$, las clases nN_i y gN_i conmutan en G/N_i, es decir, $ng \equiv gn \pmod{N_i}$ o, lo que es lo mismo, $[n, g] \in N_i$. El resultado buscado sigue inmediatamente de esto. □

9.2.3. Si G es un grupo y $(Z_i)_{i\geq 0}$ es su cadena central superior, entonces para cada $i \geq 0$ se tiene que $Z_{i+1} = \{g \in G : [g, G] \subset Z_i\}$.

Solución. Esto es inmediato a partir de la ecuación $Z_{i+1}/Z_i = \mathsf{Z}(G/Z_i)$. □

9.2.4. Mostrar que si un grupo G posee una cadena central ascendente $(N_i)_{i\geq 0}$ que llega a G, entonces es nilpotente. Una forma de hacer esto es ver que $N_i \subset Z_i$ para cada $i \geq 0$.

Solución. Es claro que $N_0 \subset Z_0$. Supongamos inductivamente que $i \geq 0$ y que sabemos que $N_i \subset Z_i$. Entonces la aplicación identidad $\mathrm{id} : G \to G$ induce un homomorfismo sobreyectivo $\pi : G/N_i \to G/Z_i$ y, entonces,

$$\pi(N_{i+1}/N_i) \subset \pi\big(\mathsf{Z}(G/N_i)\big) \subset \mathsf{Z}(G/Z_i) = Z_{i+1}/Z_i. \tag{3}$$

Ahora bien, $\pi(N_{i+1}/N_i) = N_{i+1}Z_i/N_iZ_i$ y, como $N_i \subset Z_i$, esto es igual a $N_{i+1}Z_i/Z_i$. Luego la inclusión (3) nos dice que $N_{i+1}Z_i/Z_i \subset Z_{i+1}/Z_i$, es decir, que $N_{i+1}Z_i \subset Z_{i+1}$. De esta inclusión de ve claramente que $N_{i+1} \subset Z_{i+1}$. □

9.2.5. Sea G un grupo tal que $G/\mathsf{Z}(G)$ es nilpotente. Entonces G es nilpotente.

Solución. Sea $(Z'_i)_{i\geq 0}$ la cadena central superior de $G' = G/\mathsf{Z}(G)$ y sea, para cada $i \geq 1$, $N_i \subset G$ el único subgrupo de G tal que $N_i/\mathsf{Z}(G) = Z'_{i-1}$. Pongamos finalmente $N_0 = 1$. Afirmamos que $(N_i)_{i\geq 0}$ es una cadena central ascendente que termina en G. En efecto, si $i \geq 1$, usando libremente los isomorfismos canónicos, tenemos que

$$\mathsf{Z}(G/N_i) = Z\left(\frac{G/\mathsf{Z}(G)}{N_i/\mathsf{Z}(G)}\right) = \mathsf{Z}(G'/Z'_{i-1}) = Z'_i/Z'_{i-1} = \frac{N_{i+1}/\mathsf{Z}(G)}{N_i/\mathsf{Z}(G)} = N_{i+1}/N_i.$$

Por otro lado, $\mathsf{Z}(G/N_0) = N_1/N_0$ porque la construcción hecha implica que $N_1 = \mathsf{Z}(G)$. □

9.2.6. Un p-grupo finito es nilpotente.

Solución. Sea G un p-grupo finito. Sabemos que su centro $\mathsf{Z}(G)$ es no trivial y $G/\mathsf{Z}(G)$ es un p-grupo de cardinal menor que $|G|$, así que podemos, inductivamente, suponer que es nilpotente. El resultado sigue entonces del ejercicio **9.2.5**.

9.2.7. Los subgrupos Z_i que aparecen en la serie central de G son subgrupos característicos en G.

Esto puede verse por inducción en i, siendo inmediato para $i = 0$. Para ver que Z_{i+1} es característico en G si Z_i lo es, proceda de la siguiente manera: muestre que todo $\alpha \in \mathsf{Aut}(G)$ induce, de manera natural, un automorfismo $\bar{\alpha} \in \mathsf{Aut}(G/Z_i)$ tal que conmuta

$$\begin{array}{ccc} G & \twoheadrightarrow & G/Z_i \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\alpha}} \\ G & \twoheadrightarrow & G/Z_i \end{array}$$

Usando que el centro de un grupo es característico, concluir que Z_{i+1} es característico.

9.2.8. Un cociente de un grupo nilpotente es nilpotente. Para mostrarlo, considere un homomorfismo es $f : G \to G'$ con dominio G nilpotente y verifique que si $(Z_i)_{i\geq 0}$ es la cadena central superior de G, entonces $(f(Z_i))_{i\geq 0}$ es una cadena central ascendente de G' que termina en G'.

Solución. Sea $K = \ker f$ e identifiquemos a G' con G/K y a f con la proyección canónica $G \to G/K$; entonces para cada $i \geq 0$ es $f(Z_i) = Z_iK/K$. Tenemos que

$$f(Z_{i+1})/f(Z_i) = \big(Z_{i+1}K/K\big)/\big(Z_iK/K\big) \cong Z_{i+1}K/Z_iK$$

y

$$G'/f(Z_i) = \big(G/K\big)/\big(Z_iK/K\big) \cong G/Z_iK,$$

así que para ver que $(f(Z_i))_{i\geq 0}$ es una cadena central ascendente que termina en G' bastará mostrar que $Z_{i+1}K/Z_iK \subset \mathsf{Z}(G/Z_iK)$. En término de elementos, esta inclusión es equivalente a que siempre que $z_{i+1} \in Z_{i+1}$, $k \in K$ y $g \in G$, existe $l \in Z_iK$ tal que $z_{i+1}kg = gz_{i+1}kl$.

Consideremos entonces $z_{i+1} \in Z_{i+1}$, $k \in K$ y $g \in G$. Como K es normal en G, existe $k' \in K$ tal que $kg = gk'$; por otro lado, como $Z_{i+1}/Z_i = \mathsf{Z}(G/Z_i)$, existe $z_i \in Z_i$ tal que $z_{i+1}g = gz_{i+1}z_i$. Es

$$z_{i+1}kg = z_{i+1}gk' = gz_{i+1}z_ik',$$

así que podemos tomar $l = z_ik' \in Z_iK$. □

9.2.9. Todo subgrupo de un grupo nilpotente es nilpotente.

Solución. Sea G un grupo nilpotente, $G' \subset G$ un subgrupo y $(Z_i)_{i\geq 0}$ la cadena central superior de G. Es evidente que $G' \cap Z_0 = 1$. Por otro lado, si $i \geq 0$,

$$\mathsf{Z}\left(\frac{G'}{G' \cap Z_i}\right) \supset \frac{G'}{G' \cap Z_i} \cap \mathsf{Z}\left(\frac{G'}{Z_i}\right) = \frac{G'}{G' \cap Z_i} \cap \frac{Z_{i+1}}{Z_i} = \frac{G'Z_i}{Z_i} \cap \frac{Z_{i+1}}{Z_i}$$

y como $Z_{i+1} \supset Z_i$, esto es

$$= \frac{G'Z_i \cap Z_{i+1}}{Z_i} = \frac{(G' \cap Z_{i+1})Z_i}{Z_i} = \frac{G' \cap Z_{i+1}}{(G' \cap Z_{i+1}) \cap Z_i}$$
$$= \frac{G' \cap Z_{i+1}}{G' \cap Z_i}.$$

Esto muestra que $(G' \cap Z_i)_{\geq 0}$ es una cadena central que, claramente, llega a G'. □

9.2.10. Todo producto de grupos nilpotentes es nilpotente.

9.2.11. Si G es nilpotente y N es normal en G, entonces $N \cap \mathsf{Z}(G) \neq 1$.

Solución. Sea $(Z_i)_i \geq 0$ la cadena central superior de G y sea $i_0 = \mathsf{máx}\{i \in \mathbb{N}_0 : N \cap Z_i = 1\}$. Esto tiene sentido porque G es nilpotente. Notemos que $Z \cap Z_{i_0+1} \neq 1$.

Como N es normal, $N \cap Z_{i_0+1}$ es normal en G y $[N \cap Z_{i_0+1}, G] \subset N \cap Z_{i_0+1}$ por **3.20**; por otro lado, **9.2.2** nos dice que $[Z_{i_0+1}, G] \subset Z_{i_0}$. Vemos así que

$$[N \cap Z_{i_0+1}, G] \subset N \cap Z_{i_0} = 1$$

y, en particular, que $1 \neq N \cap Z_{i_0+1} \subset \mathsf{Z}(G)$. Es claro que esto implica que $N \cap \mathsf{Z}(G) \neq 1$. □

9.2.12. Todo subgrupo propio de un grupo nilpotente está estrictamente contenido en su normalizador. En particular, todo subgrupo maximal es normal.

Solución. Sea G un grupo nilpotente, $(Z_i)_{i \geq 0}$ su cadena central superior y sea $H \subsetneq G$ un subgrupo propio. Pongamos $i_0 = \mathsf{máx}\{i \in \mathbb{N}_0 : Z_i \subset H\}$. Usando **9.2.2**, vemos que $[Z_{i_0+1}, H] \subset [Z_{i_0+1}, G] \subset Z_{i_0} \subset H$. Si tomamos $z \in Z_{i_0+1} \setminus H$, es $[z, H] \subset H$ o, equivalentemente, $zHz^{-1} = H$. Esto nos dice que $z \in \mathsf{N}(H) \setminus H$ y vemos que $H \subsetneq \mathsf{N}(H)$. □

9.2.13. Si G es nilpotente y $P \subset G$ es un subgrupo de Sylow de G, entonces P es normal y, en particular, único.

Solución. Supongamos que P no es normal en G, de manera que $\mathsf{N}(P) \subsetneq G$. Entonces tanto P como $\mathsf{N}(P)$ son subgrupos propios de G y el ejercicio **9.2.12** implica que

$$P \subsetneq \mathsf{N}(P) \subsetneq \mathsf{N}(\mathsf{N}(P)). \tag{4}$$

En vista de **8.16**, P es un subgrupo característico de $\mathsf{N}(P)$, y como la conjugación por un elemento de $\mathsf{N}(\mathsf{N}(P))$ induce un automorfismo de $\mathsf{N}(P)$, vemos que P es normal en $\mathsf{N}(\mathsf{N}(P))$. La definición de $\mathsf{N}(P)$, entonces, implica que $\mathsf{N}(\mathsf{N}(P)) \subset \mathsf{N}(P)$, contradiciendo (4). □

9.2.14. Si G es nilpotente y finito y para cada primo p, P_p es el p-subgrupo de Sylow, entonces $G \cong \prod_p P_p$.

Solución. En vista de **9.2.13**, cada subgrupo de Sylow es normal en G. Si $P_1, \ldots, P_k$ son los subgrupos no triviales de Sylow de G, entonces $|G| = |P_1| \cdots |P_k|$ y los órdenes de estyos subgrupos son coprimos dos a dos. El resultado deseado sigue entonces de **6.3***(d)*. □

Esta serie de ejercicios prueba el siguiente teorema:

> **Teorema.** *Un grupo finito es nilpotente sii es isomorfo al producto de sus subgrupos de Sylow.*

William Burnside
1852–1927, Inglaterra

William Burnside fue el primero en desarrollar la teoría de grupos desde el punto de vista abstracto. Publicó en 1897 *The Theory of Groups of Finite Order*, el primer libro sobre la teoría de grupos publicado en inglés. En 1904 demostró que todo grupo de orden $p^n q^m$ es soluble, uno de sus resultados más importantes, y conjeturó que todo grupo de orden impar es soluble. Este último resultado fue obtenido en 1962 por Walter Feit y John Griggs Thompson, quienes dieron una demostración de 250 páginas (Feit, W. y Thompson, J. G. Solvability of Groups of Odd Order. Pacific J. Math. 13, 775-1029, 1963)