Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2007
Segundo parcial

Apellido y nombre: ....
Comisión: .... L.U.: .... Páginas: ....

1. Sea A un anillo conmutativo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y sea $k = A/\mathfrak{m}$ el cuerpo residual. Recordemos el lema de Nakayama:

> Si N es un A-módulo finitamente generado y $N' \subset N$ es un submódulo tal que $N = \mathfrak{m}N + N'$, entonces $N' = N$.

Sea M un A-módulo finitamente generado y pongamos $\bar{M} = M/\mathfrak{m}M$. Entonces $\bar{M}$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $n = \dim_k \bar{M}$.

a) Si $\mathscr{B} = \{u_1, \dots, u_n\} \subset M$ es tal que $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ es una base de $\bar{M}$, entonces $\mathscr{B}$ es un conjunto generador minimal de M.

b) Recíprocamente, si $\{u_1, \dots, u_k\}$ es un conjunto generador minimal de M, entonces $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\}$ es un base de $\bar{M}$.

Notemos que estas dos afirmaciones implican que todos los conjuntos generadores minimales de M tienen n elementos.

c) Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ son dos conjuntos generadores minimales de M y $u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces la matriz $(a_{i,j}) \in \mathsf{M}_n(A)$ es inversible.

d) Si M es proyectivo, entonces es libre.

e) Si M es proyectivo y A es además un dominio con cuerpo de fracciones K, entonces $\dim_K K \otimes_A M = n$.

2. Si A es un anillo y M un A-módulo, decimos que M es *finitamente presentado* si existe una sucesión exacta

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

a) Sea $\phi : A \to B$ un morfismo de anillos conmutativos y supongamos que B es A-playo como A-módulo. Sean M y N dos A-módulos. Si M es finitamente presentado, entonces hay un isomorfismo natural

$$\mathsf{hom}_A(M, N) \otimes_A B \cong \mathsf{hom}_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B).$$

b) Sea A un anillo conmutativo y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Si M y N son dos A-módulos y M es finitamente presentado, entonces hay un isomorfismo natural

$$\hom_A(M, N) \otimes_A A_\mathfrak{p} \cong \hom_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}).$$

c) Sea A un anillo conmutativo y M un A-módulo finitamente presentado. Entonces M es A-proyectivo sii $M_\mathfrak{p}$ es un $A_\mathfrak{p}$-módulo libre para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

Sugerencia. Muestre primero que si en el diagrama de A-módulos

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0 \tag{1}$$

$g \circ f = 0$ y para todo ideal primo $\mathfrak{p}$,

$$0 \longrightarrow N'_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} \xrightarrow{g_\mathfrak{p}} N''_\mathfrak{p} \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces (1) es exacta.

3. *(a)* Sea A un anillo conmutativo. Entonces $A[X]$ es un dominio de ideales principales sii A es un cuerpo.

(b) Sea A es un anillo conmutativo que es un domino de integridad. Si a, $b \in A$, decimos que un elemento $m \in A$ es un *mínimo común múltiplo* de a y b si

> m es divisible por a y por b y si $x \in A$ es un elemento divisible por a y por b, entonces x es divisible por m.

i) Sean $a, b \in A$. Entonces a y b poseen un mínumo común múltiplo sii el ideal $(a) \cap (b)$ es principal. En ese caso, todo elemento $m \in A$ tal que $(a) \cap (b) = (m)$ es un mínimo común múltiplo de a y b.

ii) Si a, $b \in A$ poseen un mínimo común múltiplo, entonces a y b poseen un máximo común divisor en A.

4. Sea A un anillo.

(a) Sea M'' un A-módulo izquierdo playo y consideremos una sucesión exacta corta de A-módulos izquierdos

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \tag{2}$$

Si N es un A-módulo derecho, entonces

$$0 \longrightarrow N \otimes_A M' \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$

es exacta.

Sugerencia. Considere una sucesión exacta de A-módulos derechos

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

con L libre, "tensoricela término a término" con (2) y analice el diagrama resultante.

(b) Si en la sucesión exacta corta de A-módulos izquierdos

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

M'' es playo y o bien M' es playo o bien M es playo, entonces los tres módulos son playos

5. Sea S_3 el grupo simétrico de grado 3. Encuentre la descomposición de Wedderburn de las álgebras de grupo $\mathbb{R}S_3$ y $\mathbb{C}S_3$.

1. Resoluciones

Fijemos un anillo A. En estos ejercicios consideramos A-módulos a izquierda únicamente.

1.1. *(a)* Para cada A-módulo M, existe una sucesión exacta infinita

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2^P} P_1 \xrightarrow{d_1^P} P_0 \xrightarrow{d_0^P} M \longrightarrow 0$$

en la que los módulos P_i con $i \in \mathbb{N}_0$ son proyectivos. Llamamos a toda tal sucesión una *resolución proyectiva* de M.

(b) Sean M y N dos A-módulos y supongamos que tenemos resoluciones proyectivas

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2^P} P_1 \xrightarrow{d_1^P} P_0 \xrightarrow{d_0^P} M \longrightarrow 0$$

y

$$\cdots \longrightarrow Q_2 \xrightarrow{d_2^Q} Q_1 \xrightarrow{d_1^Q} Q_0 \xrightarrow{d_0^Q} N \longrightarrow 0$$

de M y N, respectivamente. Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Entonces existen morfismos $f_i : P_i \to Q_i$ para cada $i \in \mathbb{N}_0$ tales que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2^P"] \arrow[d, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1^P"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0^P"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d_2^Q"] & Q_1 \arrow[r, "d_1^Q"] & Q_0 \arrow[r, "d_0^Q"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(c) Conservemos las notaciones de la parte anterior y supongamos que tenemos otra familia de morfismos $f_i' : P_i \to Q_i$ con $i \in \mathbb{N}_0$ tales que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2^P"] \arrow[d, "f_2'"] & P_1 \arrow[r, "d_1^P"] \arrow[d, "f_1'"] & P_0 \arrow[r, "d_0^P"] \arrow[d, "f_0'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d_2^Q"] & Q_1 \arrow[r, "d_1^Q"] & Q_0 \arrow[r, "d_0^Q"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una sucesión de morfismos $s_i : P_i \to Q_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}_0$ y un morfismo $s_{-1} : M \to Q_0$ tales que

$$d^Q_{i+1} s_i + s_{i-1} d^P_i = f_i - f'_i, \qquad \forall i \geq 1$$

y

$$d^Q_0 s_{-1} = f.$$

1.2. *(a)* Consideremos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "d^M_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_0 \arrow[r, "d^M_0"] \arrow[d, "f_0"] & M_{-1} \arrow[d, "f_{-1}"] \\ N_1 \arrow[r, "d^N_1"] & N_0 \arrow[r, "d^N_0"] & N_{-1} \end{tikzcd} \tag{3}$$

en el que $d^M_0 d^M_1 = 0$ y $d^N_0 d^N_1 = 0$. Definamos

$$H(M) = \frac{\ker d^M_0}{\operatorname{im} d^M_1}, \qquad\qquad H(N) = \frac{\ker d^N_0}{\operatorname{im} d^N_1}.$$

Muestre que el morfismo f_0 induce un morfismo

$$H(f) : H(M) \to H(N).$$

(b) Supongamos que tenemos otro diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "d^M_1"] \arrow[d, "f'_1"] & M_0 \arrow[r, "d^M_0"] \arrow[d, "f'_0"] & M_{-1} \arrow[d, "f'_{-1}"] \\ N_1 \arrow[r, "d^N_1"] & N_0 \arrow[r, "d^N_0"] & N_{-1} \end{tikzcd} \tag{4}$$

en el que las filas coinciden con las de (3). Supongamos además que existen morfismos

$$s_0 : M_0 \to N_1, \qquad\qquad s_{-1} : M_{-1} \to N_0$$

tales que

$$d^N_1 s_0 + s_{-1} d^M_0 = f_0 - f'_0.$$

Muestre que el morfismo $H(f') : H(M) \to H(N)$ inducido por (4) coincide con el morfismo $H(f) : H(M) \to H(N)$ inducido por (3)

2. El grupo de Brauer de un cuerpo

Fijemos un cuerpo k y escribamos $\otimes$ en lugar de $\otimes_k$. Si A es una k-álgebra, decimos que A es *central* si $\mathsf{Z}(A) = k$ y decimos que A es *simple* si no posee ideales biláteros propios no nulos.

Recordemos, además, que si A y B son k-álgebras, entonces existe una única estructura de k-álgebra sobre el k-espacio vectorial $A \otimes B$ tal que manera que

$$a \otimes b \cdot a' \otimes b' = aa' \otimes bb', \qquad \forall a, a' \in A,\ b, b' \in B.$$

2.1. Si $x \in A \otimes B \setminus 0$, llamamos *rango de x* al menor $n \in \mathbb{N}$ tal que existe una escritura

$$x = a_1 \otimes b_1 + \cdots + a_n \otimes b_n$$

con $a_1, \dots, a_n \in A$ y $b_1, \dots, b_n \in B$.

Muestre que si $x \in A \otimes B \setminus 0$ tiene rango n y $a_1, \dots, a_n \in A$ y $b_1, \dots, b_n \in B$ son tales que $x = a_1 \otimes b_1 + \cdots + a_n \otimes b_n$, entonces el conjunto $\{b_1, \dots, b_n\}$ es k-linealmente independiente en B.

2.2. Sea A una k-álgebra central. Para toda k-álgebra B, hay un isomorfismo $\mathsf{Z}(A \otimes B) \cong \mathsf{Z}(B)$. En particular, si B también es central, la k-álgebra $A \otimes B$ es central.

2.3. Si A y B son k-álgebras centrales simples, entonces $A \otimes B$ es simple.

Sugerencia. Suponga que $I \lhd A \otimes B$ es un ideal bilátero no nulo en $A \otimes B$ y considere un elemento $x \in I \setminus 0$ no nulo de rango mínimo en $I \setminus 0$. Digamos que x tiene rango n y que $a_1, \dots, a_n \in A$ y $b_1, \dots, b_n \in B$ son tales que $x = a_1 \otimes b_1 + \cdots + a_n \otimes b_n$.

a) Como A es simple, $Aa_1A = A$, así que existe un conjunto finito J y elementos l_j, $r_j \in A$ para $j \in J$ tales que $\sum_{j \in J} l_j a_1 r_j = 1_A$.

b) Sea $x' = \sum_{j \in J}(l_j \otimes 1_B) \cdot x \cdot (r_j \otimes 1_B)$. Es $x' \in I$ y, por otro lado, para todo $a \in A$, $x' \cdot a \otimes 1_B = a \otimes 1_B \cdot x'$. Usando que A es central, muestre que esto implica que existe $b \in B$ tal que $x' = 1_A \otimes b$.

c) Usando la simplicidad de B, ahora, concluya que $1 \otimes 1 \in I$, de manera que $I = A \otimes B$.

2.4. Si A es una k-álgebra central simple, entonces su álgebra opuesta A^{op} también es central simple.

2.5. Sea A una k-álgebra. Si a, $b \in A$, consideremos la aplicación k-lineal $\mu_{a,b} : x \in A \mapsto axb \in A$. Muestre que hay un homomorfismo de k-álgebras $\phi : A \otimes A^{\mathsf{op}} \to \mathsf{End}_k(A)$ tal que

$$\phi(a \otimes b) = \mu_{a,b}.$$

Si A es central simple y tiene dimensión finita, entonces ϕ es un isomorfismo.

2.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la k-álgebra $\mathsf{M}_n(k)$ es central simple.

2.7. Si A y B son k-álgebras centrales simples de dimensión finita, decimos que A y B son *similares* y escribimos $A \sim B$ si existen $m, n \in \mathbb{N}$ y un isomorfismo de k-álgebras

$$A \otimes \mathsf{M}_m(k) \cong B \otimes \mathsf{M}_n(k).$$

Muestre que la relación de similaridad es una relación de equivalencia sobre la clase de las k-álgebras centrales simples de dimensión finita.

Observe que $k \sim \mathsf{M}_n(k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.8. Si A, A', B, B' son k-álgebras centrales simples de dimensión finita y $A \sim A'$ y $B \sim B'$, entonces $A \otimes B \sim A' \otimes B'$.

2.9. Sea $\mathsf{Br}(k)$ el conjunto de las clases de equivalencia de k-álgebras centrales simples de dimensión finita con respecto a la relación de similaridad. Si A es una tal álgebra, notemos $[A] \in \mathsf{Br}(k)$ a su clase de equivalencia.

Entonces $\mathsf{Br}(k)$ es un grupo conmutativo con respecto a la operación

$$[A] \cdot [B] = [A \otimes B].$$

El elemento neutro es $[k]$. Llamamos a $\mathsf{Br}(k)$ el *grupo de Brauer* de k.

2.10. Recuerde que una k-álgebra simple de dimensión finita es semisimple — esto fue visto en teoría. Muestre que si $\alpha \in \mathsf{Br}(k)$, existe una k-álgebra central de división de dimensión finita sobre k tal que $\alpha = [D]$. Además, si D' es otra tal álgebra, entonces $[D] = [D']$ sii $D \cong D'$.

2.11. Muestre que:

(a) Si k es algebraicamente cerrado, entonces $\mathsf{Br}(k) = 0$.

(b) Es $\mathsf{Br}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) Si k es un cuerpo finito, entonces $\mathsf{Br}(k) = 0$.