

ÁLGEBRA II
Primer Cuatrimestre — 2007
Primer parcial

1
2
3
4

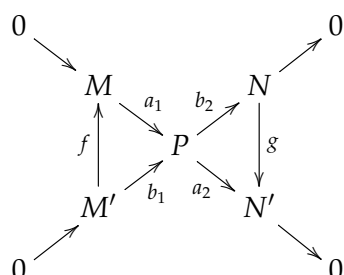
APELLIDO Y NOMBRE:
 COMISIÓN: L.U.: PÁGINAS:

1. a) Un grupo de orden 3325 o 6125 es producto directo de sus subgrupos de Sylow.
 b) Un grupo de 80 o 520 elementos no es simple.
2. Sea G un grupo finito y H un subgrupo. Supongamos que H es *especial*, esto es, que
- para todo $x \in G \setminus H$ e $y \in G$, existe un único $u \in H$ tal que $y^{-1}xy = u^{-1}xu$.
- a) Si $x \in G \setminus H$, entonces $G = C(x)H$ y $C(x) \cap H = 1$.
 b) H es normal.
 c) Si $x \in G \setminus H$, entonces el grupo G es isomorfo a un producto semidirecto de $C(x)$ por H .
 d) Si $x \in G \setminus H$, entonces $H = \{u^{-1}xux^{-1} : u \in H\}$. Concluya que Hx es una clase de conjugación de G .
 e) Muestre que $H = \{[x, y] : x, y \in G\}$.
 f) Si $x \in G \setminus H$, entonces $C(x)$ es abeliano.
3. Sea A un anillo.
- a) Si en el diagrama de A -módulos y morfismos de A -módulos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & N & \longrightarrow & P & \longrightarrow & Q \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & Q' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & P'' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M''' & \xrightarrow{f} & N''' & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
 \end{array}$$

las filas y columnas son exactas, entonces el morfismo f es inyectivo.

- b) Si en el siguiente diagrama conmutativo de A -módulos y morfismos de A -módulos



las diagonales son exactas, entonces hay un isomorfismo $\ker g \cong \operatorname{coker} f$.

4. Sea A un anillo conmutativo notheriano. Si M es un A -módulo y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, decimos que \mathfrak{p} es un *primo asociado* a M si existe $m \in M$ tal que $\operatorname{ann}(m) = \mathfrak{p}$. Escribimos $\operatorname{Ass}_A(M)$ al conjunto de los primos asociados a M .

- Mostrar que si \mathfrak{p} es un elemento máximal del conjunto de ideales $\{\operatorname{ann}(m) : m \in M \setminus \{0\}\}$, entonces $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$.
- $\operatorname{Ass}_A(M) = \emptyset$ sii $M = 0$.
- $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$ sii $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ y M posee un submódulo isomorfo a A/\mathfrak{p} .
- Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, entonces $\operatorname{Ass}_A(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.
- Si $A = \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, determine $\operatorname{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n)$.
- Sea $S \subset A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado en A . Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$ es tal que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, entonces $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M_S)$.
- Es $\operatorname{Ass}_A(M_S) = \operatorname{Ass}_A(M) \cap \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$.
- Usando c) muestre que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A -módulos, entonces

$$\operatorname{Ass}_A(M) \subset \operatorname{Ass}_A(M') \cup \operatorname{Ass}_A(M'').$$

- Si A es notheriano y M es un A -módulo finitamente generado no nulo, entonces existe una cadena creciente finita de submódulos

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$$

e ideales primos $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} A$ tales que

$$M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Además, es $\operatorname{Ass}_A(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$.