1	
2	
3	
4	

Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2007
Primer parcial

Apellido y nombre: ....

Comisión: .... L.U.: .... Páginas: ....

1. *a*) Un grupo de orden 3325 o 6125 es producto directo de sus subgrupos de Sylow.

b) Un grupo de 80 o 520 elementos no es simple.

2. Sea G un grupo finito y H un subgrupo. Supongamos que H es *especial*, esto es, que

> para todo $x \in G \setminus H$ e $y \in G$, existe un único $u \in H$ tal que $y^{-1}xy = u^{-1}xu$.

a) Si $x \in G \setminus H$, entonces $G = \mathsf{C}(x)H$ y $\mathsf{C}(x) \cap H = 1$.

b) H es normal.

c) Si $x \in G \setminus H$, entonces el grupo G es isomorfo a un producto semidirecto de $\mathsf{C}(x)$ por H.

d) Si $x \in G \setminus H$, entonces $H = \{u^{-1}xux^{-1} : u \in H\}$. Concluya que Hx es una clase de conjugación de G.

e) Muestre que $H = \{[x, y] : x, y \in G\}$.

f) Si $x \in G \setminus H$, entonces $\mathsf{C}(x)$ es abeliano.

3. Sea A un anillo.

a) Si en el diagrama de A-módulos y morfismos de A-módulos

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] \\
 & & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[d] \\
 & M' \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & P' \arrow[r] \arrow[d] & Q' \\
0 \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & P'' & \\
 & M''' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N''' & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

las filas y columnas son exactas, entonces el morfismo f es inyectivo.

b) Si en el siguiente diagrama conmutativo de A-módulos y morfismos de A-módulos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \\
& M \arrow[dr, "a_1"] & & N \arrow[ur] \arrow[dd, "g"] & \\
& & P \arrow[ur, "b_2"] \arrow[dr, "a_2"'] & & \\
& M' \arrow[uu, "f"] \arrow[ur, "b_1"'] & & N' \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0
\end{tikzcd}$$

las diagonales son exactas, entonces hay un isomorfismo $\ker g \cong \operatorname{coker} f$.

4. Sea A un anillo conmutativo nötheriano. Si M es un A-módulo y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, decimos que $\mathfrak{p}$ es un *primo asociado a* M si existe $m \in M$ tal que $\operatorname{ann}(m) = \mathfrak{p}$. Escribimos $\operatorname{Ass}_A(M)$ al conjunto de los primos asociados a M.

a) Mostrar que si $\mathfrak{p}$ es un elemento máximal del conjunto de ideales $\{\operatorname{ann}(m) : m \in M \setminus 0\}$, entonces $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$.

b) $\operatorname{Ass}_A(M) = \emptyset$ sii $M = 0$.

c) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$ sii $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ y M posee un submódulo isomorfo a $A/\mathfrak{p}$.

d) Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, entonces $\operatorname{Ass}_A(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

e) Si $A = \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, determine $\operatorname{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n)$.

f) Sea $S \subset A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado en A. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$ es tal que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, entonces $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M_S)$.

g) Es $\operatorname{Ass}_A(M_S) = \operatorname{Ass}_A(M) \cap \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$.

h) Usando *c)* muestre que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos, entonces

$$\operatorname{Ass}_A(M) \subset \operatorname{Ass}_A(M') \cup \operatorname{Ass}_A(M'').$$

i) Si A es nötheriano y M es un A-módulo finitamente generado no nulo, entonces existe una cadena creciente finita de submódulos

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$$

e ideales primos $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} A$ tales que

$$M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Además, es $\operatorname{Ass}_A(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.