

**ÁLGEBRA II**  
**Primer Cuatrimestre — 2007**  
**Primer parcial**

1
2
3
4

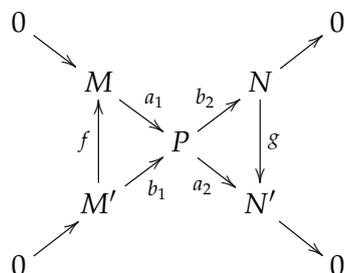
APELLIDO Y NOMBRE: .....  
 COMISIÓN: ..... L.U.: ..... PÁGINAS: .....

1. a) Un grupo de orden 3325 o 6125 es producto directo de sus subgrupos de Sylow.  
 b) Un grupo de 80 o 520 elementos no es simple.
2. Sea  $G$  un grupo finito y  $H$  un subgrupo. Supongamos que  $H$  es *especial*, esto es, que
- para todo  $x \in G \setminus H$  e  $y \in G$ , existe un único  $u \in H$  tal que  $y^{-1}xy = u^{-1}xu$ .
- a) Si  $x \in G \setminus H$ , entonces  $G = C(x)H$  y  $C(x) \cap H = 1$ .  
 b)  $H$  es normal.  
 c) Si  $x \in G \setminus H$ , entonces el grupo  $G$  es isomorfo a un producto semidirecto de  $C(x)$  por  $H$ .  
 d) Si  $x \in G \setminus H$ , entonces  $H = \{u^{-1}xux^{-1} : u \in H\}$ . Concluya que  $Hx$  es una clase de conjugación de  $G$ .  
 e) Muestre que  $H = \{[x, y] : x, y \in G\}$ .  
 f) Si  $x \in G \setminus H$ , entonces  $C(x)$  es abeliano.
3. Sea  $A$  un anillo.
- a) Si en el diagrama de  $A$ -módulos y morfismos de  $A$ -módulos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & N & \longrightarrow & P \longrightarrow Q \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & P' \longrightarrow Q' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & P'' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & M''' & \xrightarrow{f} & N''' & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

las filas y columnas son exactas, entonces el morfismo  $f$  es inyectivo.

- b) Si en el siguiente diagrama conmutativo de  $A$ -módulos y morfismos de  $A$ -módulos



las diagonales son exactas, entonces hay un isomorfismo  $\ker g \cong \operatorname{coker} f$ .

4. Sea  $A$  un anillo conmutativo notheriano. Si  $M$  es un  $A$ -módulo y  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ , decimos que  $\mathfrak{p}$  es un *primo asociado* a  $M$  si existe  $m \in M$  tal que  $\operatorname{ann}(m) = \mathfrak{p}$ . Escribimos  $\operatorname{Ass}_A(M)$  al conjunto de los primos asociados a  $M$ .

- Mostrar que si  $\mathfrak{p}$  es un elemento máximal del conjunto de ideales  $\{\operatorname{ann}(m) : m \in M \setminus \{0\}\}$ , entonces  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$ .
- $\operatorname{Ass}_A(M) = \emptyset$  sii  $M = 0$ .
- $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$  sii  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$  y  $M$  posee un submódulo isomorfo a  $A/\mathfrak{p}$ .
- Si  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ , entonces  $\operatorname{Ass}_A(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ .
- Si  $A = \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , determine  $\operatorname{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n)$ .
- Sea  $S \subset A$  es un subconjunto multiplicativamente cerrado en  $A$ . Si  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$  es tal que  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ , entonces  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M_S)$ .
- Es  $\operatorname{Ass}_A(M_S) = \operatorname{Ass}_A(M) \cap \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$ .
- Usando c) muestre que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de  $A$ -módulos, entonces

$$\operatorname{Ass}_A(M) \subset \operatorname{Ass}_A(M') \cup \operatorname{Ass}_A(M'').$$

- Si  $A$  es notheriano y  $M$  es un  $A$ -módulo finitamente generado no nulo, entonces existe una cadena creciente finita de submódulos

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$$

e ideales primos  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} A$  tales que

$$M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Además, es  $\operatorname{Ass}_A(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ .