Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2007

Primer parcial — Recuperatorio

Apellido y nombre: ....

Comisión: .... L.U.: .... Páginas: ....

1. Sea R un anillo conmutativo. Supongamos que se trata de un dominio de integridad. Si M es un R-módulo y $N \subset M$ es un submódulo, decimos que N *es puro en* M si $rN = N \cap rM$ para todo $r \in R$.

Sea M un R-módulo. Mostrar que:

(a) Si M es libre de torsión y $N \subset M$ es un submódulo puro en M, entonces M/N es libre de torsión.

(b) Si $N \subset M$ es un submódulo es tal que $t(M/N) = 0$, entonces N es puro en M. En particular, $t(M)$ es puro en M.

(c) Todo sumando directo de M es puro en M.

(d) Si $N \subset M$ es un submódulo puro en M y $P \subset N$ es un submódulo puro en N, entonces P es un submódulo puro en M.

(e) Si $\{N_i\}_{i \in I}$ es una familia de submódulos puros en M, entonces $\bigcap_{i \in I} N_i$ es puro en M.

(f) Si $X \subset M$ es un subconjunto arbitrario, existe un menor submódulo $N \subset M$ puro en M tal que $X \subset N$.

2. Sea A un anillo. Si $f \in A$ es un elemento que no es nilpotente y M es un A-módulo, notamos M_f a la localización M_S de M con respecto al conjunto multiplicativo $\{f^n : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Sean $f_1, \ldots, f_k \in A$ elementos no nilpotentes y M un A-módulo. Si $(f_1, \ldots, f_k) = A$, muestre que hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} \prod_{i=1}^{k} M_{f_i} \xrightarrow{\beta} \prod_{1 \leq i < j \leq k} M_{f_i f_j}$$

donde los morfismos α y β son productos de morfismos canónicos de localización $M \to M_{f_i}$ y $M_{f_i} \to M_{f_i f_j} = (M_{f_i})_{f_j}$.

3. Sean p y q dos números primos, no necesariamente distintos. Muestre que un grupo de orden $p^2 q$ no es simple.

4. *(a)* Sea G un grupo finito tal que $\mathsf{Au}(G)$ es cíclico. Muestre que G es abeliano.

(b) Sea p un número primo y G un p-grupo que no es cíclico. Entonces existe un subgrupo normal $H \lhd G$ tal que $G/H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.