Análisis 1

Primer Cuatrimestre — 2006

Práctica ω

1. Desigualdades &c

1.1. Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente y sea $x \in A$.

a) Si $x < \sup A$, entonces $\sup A \setminus \{x\} = \sup A$.

b) Si $\sup A \setminus \{x\} < \sup A$, entonces $x = \sup A$,

1.2. Sean A, $B \subset \mathbb{R}$. Mostrar que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

1.3. Sean A, $B \subset \mathbb{R}$ subconjuntos acotados. Determinar la validez de las siguiente afirmaciones, dando demostraciones o contraejemplos, según corresponda.

a) Si $A \subset B$, entonces $\sup A \leq \sup B$.

b) $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$.

c) $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$.

d) $\sup -A = -\inf A$.

e) $\sup A + \inf B \leq \sup A + B$.

2. Límites, sucesiones, series.

2.1. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos reales que es creciente. Si posee una subsucesión convergente, entonces ella misma converge.

2.2. Mostrar que una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de términs reales converge sii convergen las subsucesiones $(a_{2n})_{n\geq 1}$, (a_{2n+1}) y (a_{3n}).

2.3. Calcular:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x - x}{x^3}$;

b) $\lim_{n\to+\infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

2.4. *Aproximaciones de* $\sqrt{\alpha}$. Sea $\alpha > 0$. Consideramos la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que $a_1 \in \mathbb{R}^+$ es un número positivo dado, y

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\alpha}{a_n}\right)$$

si $n \geq 1$.

a) Mostrar que

$$a_{n+1}^2 - \alpha = \frac{(u_n^2 - \alpha)^2}{4a_n^2},$$

que $a_n \geq \sqrt{\alpha}$ y que la sucesión decrece.

b) Usando que $a_{n+1}^2 - \alpha = (a_{n+1} - \sqrt{\alpha})(a_{n+1} + \sqrt{\alpha})$, acotar $a_{n+1} - \sqrt{\alpha}$ en términos de $a_n - \sqrt{\alpha}$.

c) Si $a_1 - \sqrt{\alpha} \leq k$, mostrar que

$$a_n - \sqrt{\alpha} \leq 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{k}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2^{n-1}}.$$

d) Calcular *a mano* $\sqrt{10}$ con error menor que 10^{-8} usando este método, con $a_1 = 3$.

2.5. Sea $x \in \mathbb{R}$ y, si $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{[x] + [2x] + [3x] + \cdots + [nx]}{n^2}.$$

Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Deducir de esto que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

2.6. Sean $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, y definamos sucesiones $(a_n)_{n\geq1}$ y $(b_n)_{n\geq1}$ poniendo, para cada $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

Mostrar que ambas sucesiones convergen al mismo límite y calcularlo.

2.7. Sean $(a_n)_{n\geq1}$ y $(b_n)_{n\geq1}$ dos sucesiones de términos reales tales que

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0.$$

Mostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

2.8. Sean $(a_n)_{n\geq1}$ y $(b_n)_{n\geq1}$ dos sucesiones de términos reales tales que a_n, $b_n \in [0,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = 1$. Mostrar que entonces es $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$.

2.9. Sean $(a_n)_{n\geq1}$ y $(b_n)_{n\geq1}$ dos sucesiones convergentes de términos reales, con límites α y β. Sea, para cada $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-1}.$$

Determinar si $(c_n)_{n\geq1}$ converge, y, en ese caso, su límite.

2.10. Mostrar que si $x > 0$, entonces

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

Usando esto, calcular $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

2.11. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de términos positivos y supongamos que $\sum_{n\geq 0} b_n = +\infty$. Si existe n_0 tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{a_{b+1}}$$

si $n \geq n_0$, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n = +\infty$.

2.12. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente de números reales y sean a, $b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x_n \leq b$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que entonces se tiene que $\lim_{n\to+\infty} x_n \in [a,b]$.

¿Qué puede decir si es $a < x_n < b$ para cada $n \in \mathbb{N}$?

2.13. Sean a, $b > 0$. Definimos dos sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ poniendo $a_1 = a$, $b_1 = b$, y, para cada $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$
$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Muestre que ambas sucesiones convergen, y que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

2.14. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de *variación acotada*, esto es, tal que si

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} |a_{i+1} - a_i|,$$

la sucesión $(v_n)_{n\geq 1}$ es acotada. Existen entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

2.15. Una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ no posee subsucesiones convergentes si y solamente si $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty$.

2.16. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente de términos positivos y pongamos $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = a.$$

2.17. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones reales. Supongamos que $b_n > 0$ cualquiera sea $n \geq 1$ y que $\sum_{n\geq 1} b_n = +\infty$. Entonces, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = a$, también es $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} = a$.

2.18. Sea $p \in \mathbb{N}$. Muestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{n^{p+1}}$.

2.19. Mostrar que existe el límite de la sucesión

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}},\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}},\ \ldots$$

¿Qué otros números pueden tomar el papel de $\sqrt{2}$ en este ejercicio manteniendo la conclusión?

2.20. Mostrar que existe el límite de la sucesión

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\ \ldots$$

2.21. Mostrar que existe el límite de la sucesión

$$1,\ \frac{1}{1+1},\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}},\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}},\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}},\ \ldots$$

2.22. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente de términos reales. Si ponemos $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, es

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

2.23. *Condensación de Cauchy.* Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de términos positivos. Entonces, si $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, la serie $\sum_{n\geq 1} 2^n a_{2^n}$ también converge.

2.24. Sea $x \in \mathbb{R}$. Muestre que las series $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin nx}{n}$ y $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos nx}{n}$ convergen.

2.25. Determine si las series siguientes convergen, y, en ese caso, si lo hacen absolutamente.

a) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{1+1/n}}$;

b) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin n}{2^n - n}$;

c) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\log n}$;

d) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \dfrac{|\sin n|}{n}$;

e) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \dfrac{n^2 - 4n}{2n^3 + n - 5}$.

2.26. Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ una serie de términos positivos que convege. Mostrar que las series $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ y $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{1+n^2 a_n}$ son también convergentes y que las series $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{1+na_n}$ y $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{1+a_n^2}$ a veces convergen y a veces no.

2.27. Estudiar la convergencia de las siguiente series.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{n^n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$;

f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1!-2!+\cdots\pm n!}{(n+1)!}$;

g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$;

2.28. Si $\alpha > 0$, determinar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$.

2.29. Supongamos que $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números reales positivos tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1}a_{2n} = a$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}a_{2n-1} = b$. ¿Qué puede decir sobre el carácter de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$?

2.30. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ y $(c_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de números reales tales que las series $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} c_n$ convergen y $a_n \leq b_n \leq c_n$ cualquiera sea $n \geq 1$. Mostrar que entonces la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

2.31. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos reales positivos. Mostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$ converge.

2.32. Determine la suma de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$;

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^3+2n^2+7n+1}$;

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$;

2.33. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales tal que $\sum_{n\geq 1} na_n$ converge. Entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ también converge.

2.34. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos reales positivos. Pongamos, para cada $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1}}{n}.$$

Mostrar que la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge sii $\sum_{n\geq 1} a_n$ lo hace.

2.35. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos reales positivos. Pongamos, para cada $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{m=1}^{n} m a_m.$$

Mostrar que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge sii lo hace $\sum_{n\geq 1} b_n$, y que en ese caso ambas tienen la misma suma.

2.36. *Criterio de Raabe.* Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos positivos.
Supongamos que existen $k \in \mathbb{R}$ y $n_0 \geq 1$ tales que si $n \geq n_0$,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1 + \frac{k}{n}.$$

Entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
Por otro lado, si existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

si $n \geq n_0$, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.

2.37. Mostrar que es finito el conjunto de los números naturales $n \in \mathbb{N}$ tales que $2^{n^2} \leq (4n)!$.

2.38. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ sucesión reales tales que (b_n) es estrictamente creciente y no acotada. Supongamos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lambda.$$

Mostrar que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$.

2.39. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión real acotada tal que $\lim_{n\to+\infty} (x_n + x_{2n}/2) = 1$. Mostrar que entonces $\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

2.40. Sea $\xi \in \mathbb{R}$ y sea $(r_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números *racionales* que converge a ξ. Supongamos que $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ con $p_n \in \mathbb{Z}$ y $q_n \in \mathbb{N}$.

Mostrar que si una de las sucesiones $(p_n)_{n\geq 1}$ o $(q_n)_{n\geq 1}$ es acotada, entonces la otra también, y en ese caso $\xi \in \mathbb{Q}$. Deducir de esto que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} |p_n| = \lim_{n\to+\infty} |q_n| = +\infty.$$

2.41. Mostrar que una sucesión real acotada $(a_n)_{n\geq 1}$ que no converge posee al menos dos subsucesiones convergentes con límites distintos.

2.42. Mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ la ecuación

$$x + \cdots + x^n = 1$$

posee exactamente una raíz a_n positiva y que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es decreciente. Mostrar además que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$; para ello considerar la expresión $a_n^{n+1} - 1$.

2.43. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión real acotada. Definimos dos sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ y $(y_n)_{n\geq 1}$ poniendo $x_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ y $y_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostrar *a*) que las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ y $(y_n)_{n\geq 1}$ convergen; y

b) que poseen el mismo límite sii la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge.

2.44. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos reales positivos que converge a 0. Entonces:

a) existen infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que $a_n = \max\{a_k : k \geq n\}$;

b) existen infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que $a_n = \min\{a_k : k \leq n\}$;

**c*) finalmente, existe una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(a_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ decrece a 0.

2.45. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función inyectiva. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f(1)}{1^2} + \frac{f(2)}{2^2} + \cdots + \frac{f(n)}{n^2} \right) = +\infty.$$

2.46. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión acotada de términos reales que es tal que $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Mostrar que el conjunto de límites de todas las subsucesiones convergentes de $(a_n)_{n\geq 1}$ es un intervalo.

3. Continuidad

3.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces el conjunto $f^{-1}(0)$ es cerrado, $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ es abierto y $f^{-1}([a,b])$ es cerrado. ¿Qué puede decir de $f^{-1}\big([a,b)\big)$?.

3.2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que si $A \subset \mathbb{R}$ es abierto, entonces $f(A)$ es abierto. Entonces f es inyectiva y, en particular, monótona.

3.3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ poniendo $a_0 = a$ y $a_{n+1} = f(a_n)$ si $n \geq 0$. Supongamos que existe $\alpha = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Entonces $f(\alpha) = \alpha$.

3.4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función *conveza*, esto es, tal que

$$f\big(tx + (1 - yt)y\big) \leq t\, f(x) + (1-t)\, f(y)$$

cualesquiera sean $x, y \in [a,b]$ y $t \in [0,1]$. Muestre que f es continua.

3.5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada y continua. Mostrar que existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$.

3.6. Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Supongamos que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Entonces existe $k > 0$ tal que $f(x) + k < g(x)$ si $x \in [0,1]$.

3.7. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ creciente tal que $f\big([a,b]\big) = [f(a), f(b)]$. Mostrar que f es continua.

3.8. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y tal que

$$f(x) = f(x^2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f es constante.

3.9. ¿Existe una función continua biyectiva $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$?

3.10. Sean f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones. Definimos nuevas funciones M, $m : [a, b] \to \mathbb{R}$ poniendo

$$M(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$$

y

$$m(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$$

cualquiera sea $x \in [a, b]$. Muestre que si f y g son continuas, M y m también lo son.

3.11. Sean f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, diferenciables en (a, b). Si $f(a) \leq g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ cualquiera sea $x \in (a, b)$, entonces es $f(x) < g(x)$ cualquiera sea $x \in (a, b]$.

4. Derivadas

4.1. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $\text{lím}_{x\to+\infty} f(x) = L$. Entonces si $c > 0$, es

$$\lim_{x\to+\infty} f(x + c) - f(x) = cL$$

y

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L.$$

4.2. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Si f'' es acotada y existe $\text{lím}_{x\to+\infty} f(x)$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

4.3. Sea $f(a, b) \to \mathbb{R}$ una función tal que cualquiera sea $x \in (a, b)$, existe la derivada a derecha $f'(x+)$ y es $f'(x+) > 0$. Entonces f es creciente.

4.4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a, b) y $f(a) = f(b) = 0$, entonces, cualquiera sea $k \in \mathbb{R}$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = kf(c)$.

4.5. Sean f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones infinitamente diferenciables. Calcule $(fg)''$ y $(fg)'''$ en términos de las derivadas de f y de g. *Adivine* una fórmula para $(fg)^{(4)}$. ¿Puede seguir?

4.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0; \\ e^{-1/x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

a) Mostrar que f es diferenciable.

*b) Mostrar, más aún, que f es infinitamente diferenciable.

4.7. Sea $a > 1$ y $x > 0$. Mostrar que

$$x^a - 1 \geq a(x-1).$$

4.8. Sean $p, q \geq 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, si $x \geq 1$,

$$x^{1/p} \leq \frac{x}{p} + \frac{1}{q}.$$

4.9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Mostrar que si $x \in \mathbb{R}$, entonces existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)| < 1 \left|f''(y)\right|.$$

4.10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa derivable. Mostrar que f' es continua.

4.11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deribavle y $a \in \mathbb{R}$ tales que $f'(a) \neq 0$. Entonces:

a) Existe $\varepsilon > 0$ tal que si $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $f(x) \neq f(a)$.

b) Si f' es continua en a, entonces existe un intervalo abierto I tal que $a \in I$ y $f|_I$ es inyectiva.

4.12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Mostrar que $|f|$ es derivable a izquierda y a derecha en todo $\mathbb{R}$.

4.13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y acotada tal que existe finito $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l$. Mostrar que $l = 0$.

4.14. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable, esto es, la restricción a $[a,b]$ de una función derivable definida en un abierto que contenga a este intervalo.

a) Si $f'(x) \neq 0$ si $x \in [a,b]$, entonces f' tiene signo constante en $[a,b]$.

b) El conjunto $f'\big([a,b]\big)$ es un intervalo.

Notemos que esta última parte implica que el teorema de los valores intermedio vale para la derivada de una función, aunque esta derivada no sea continua.

4.15. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a)f'(b) > 0$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Qué puede decir sobre el signo de $f'(c)$?

4.16. Sea $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Mostrar que existe $\xi \in (a,+\infty)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

4.17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f(0) = 0$. Calcular

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

4.18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que si $x \in \mathbb{R}$, es $f(x)f'(x) \geq 0$. Mostrar que $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ es un intervalo.

4.19. Determinar todas las funciones derivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(2x) = 2f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4.20. Muestre que:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\sinh^2 x} \right) = \dfrac{2}{3};$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x \sinh x - \tan x \tanh x}{\sinh^4 x - \tanh^4 x} = -\dfrac{1}{12};$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cosh^\alpha x - \sinh^\alpha x = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \alpha > 0; \\ 1, & \text{si } \alpha = 2; \\ 0, & \text{si } \alpha < 2; \end{cases}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp x^2 - \cosh \sqrt{2}x}{(\cosh x - \cos x)(\cosh 2x - \cos 2x)} = \dfrac{1}{12};$

e) $\lim\limits_{x\to 1/2} (2x^2 - 3x + 1) \tan \pi x = \dfrac{1}{\pi};$

f) $\lim\limits_{x\to 3/2} \dfrac{\cos \pi x}{4x^2 - 9} = \dfrac{\pi}{12};$

g) $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{\sin 3x}{1 - 2\cos x} = -\sqrt{3};$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} = 1;$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln \left(\dfrac{e^x - 1}{x} \right) = \dfrac{1}{2};$

j) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x^x - 1}{\ln x - x + 1} = +\infty;$

k) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{\log_a x - \log_x a} = \dfrac{a^{a+1} \ln a(1 - \ln a)}{2};$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{1 + c^x} \right)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{a + b - c}{2} \right);$

m) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^{x^x}}{x^x - 1} = 0;$

n) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\arcsin x} = 1;$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{(\sin x)^{\sin x} - 1}{x^x - 1} = 1;$

o) $\lim\limits_{x\to 1} (2 - x)^{\tan(\pi x/2)} = e^{2/\pi};$

p) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x + \cos x)^{1/x} = e;$

q) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x - 2\sin x)^{1/x} = e^{-2};$

r) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\tan x} = 1;$

s) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1}}{\sin x} = 1.$

4.21. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Determinar

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

4.22. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n+1$ veces derivable y sea $a \in \mathbb{R}$. Usando la forma de Lagrange para el resto del desarrollo de Taylor de grado $n-1$ de f en a nos dice que para cada $h \in \mathbb{R}$ existe $\theta_h \in (0,1)$ tal que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta_h h).$$

Mostrar que si $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, entonces para h suficientemente pequeño, hay un *único* tal θ_h. Más aún, en ese caso es $\lim_{h \to 0} \theta_h = \frac{1}{n+1}$.

4.23. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con continuidad tal que existen α, $\beta \in \mathbb{R}$ tales que $|f(x)| \leq \alpha$ y $|f''(x)| \leq \beta$ cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que entonces vale que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ \left| f'(x) \right| \leq \frac{2\alpha}{h} + \frac{h\beta}{2}.$$

4.24. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con continuidad tal que f y f'' son acotadas. Mostrar que f' es acotada.

4.25. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces f es estrictamente creciente sii el conjunto $\{x \in (a,b) : f'(x) > 0\}$ es denso en (a,b).

5. Sin clasificar

5.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y tal que $f(f(x)) = x$ cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que f es la función identidad.

5.2. Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función creciente. Sea $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función tal que $g(x) = f(x)/x$ si $x > 0$. Mostrar que si g es decreciente, entonces f es continua.

5.3. Consideremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos que cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que la restricción de f a $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ es creciente. Entonces f es creciente.

5.4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f es *localmente monótona a derecha* si

> cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que si $y \in [x, x+\delta]$, entonces $f(y) \geq f(x)$.

Mostrar que una función localmente monótona a derecha es monótona.

5.5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|x - y| < |x - z| \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |f(x) - y|\,.$$

Mostrar que f es una función continua inyectiva.