# Práctica 6

**1.** Sean $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ , $g : G' \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciables con $f(G) \subset G'$. Verificar que $g \circ f : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$ satisface:

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$

**2.** Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ , $N \subset \mathbb{R}^k$ abiertos y $f : M \longrightarrow N$ una función. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

**a)** $f$ es continua

**b)** Si $(p_n)$ es una sucesión en $M$ que converge a $p \in M$, entonces $f(p_n) \longrightarrow f(p)$

**c)** Si $A$ es un abierto de $N$, entonces $f^{-1}(A)$ es un abierto de $M$.

**3.** Sea $M \subset \mathbb{R}^n$, probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes

**a)** $M$ es compacto

**b)** Todo cubrimiento por abiertos de $M$ contiene un subcubrimiento finito

**c)** Toda sucesión en $M$ tiene una subsucesión convergente.

**4.** Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ no vacío y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua. Probar que si $M$ es compacto, entonces $f(M)$ también lo es.

**5.** Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ , $N \subset \mathbb{R}^k$ y $f : M \longrightarrow N$ una función. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

**a)** $f$ es homeomorfismo

**b)** $f$ es continua, biyectiva y abierta.

**6.** Probar que $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ es una inmersión no inyectiva. ¿Quién es $f$ si se identifica $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$?

**7.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x+y, (x+y)^2)$. Mostrar que todo punto de $\mathbb{R}^2$ es un punto crítico de $f$.

**8.** Sea $M$ una superficie regular. Verificar:

**a)** Si $G$ es un abierto de $M$ y $p \in G$, existe una carta $(U, x)$ de $M$ con $p \in U$ tal que $U \subset G$

**b)** Si $G$ es un abierto no vacío de $M$, entonces $G$ es una superficie regular.

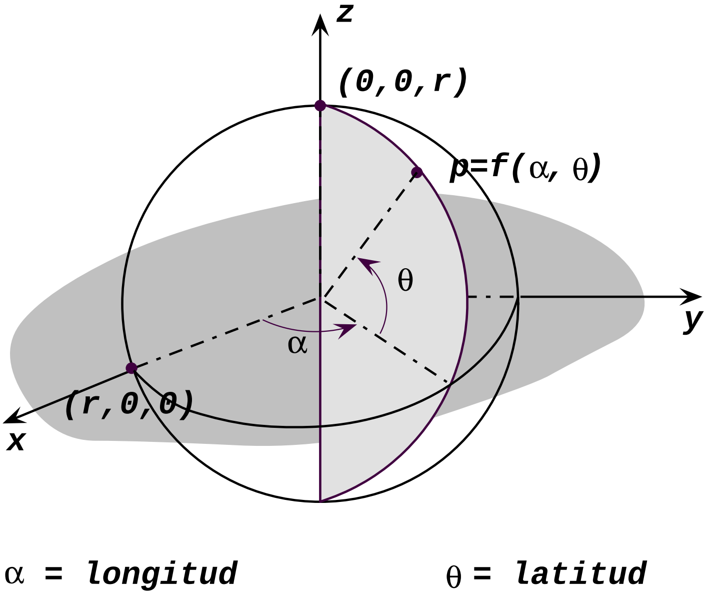
**c)** Sea $(A, f)$ una parametrización de $M$, $B \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\varphi : B \longrightarrow A$ un difeomorfismo. Entonces, $(B, f \circ \varphi)$ es una parametrización de $M$.

**9.** Verificar que el cono $Q : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ no es una superficie regular.

**10.** Sea $r > 0$ y $S^2_r \subset \mathbb{R}^3$ la esfera con centro en el origen y radio $r$. Verificar que la función $f : (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\alpha, \theta) = (r \cos\alpha \cos\theta, r \operatorname{sen}\alpha \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$$

es una parametrización de $S^2_r$.




**11.** **Proyecciones estereográficas**

Sea $S^2$ la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$.

**a)** Sea $N = (0, 0, 1)$, el polo norte de $S^2$. Se consideran las funciones $\varphi : S^2 - N \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 - N$ dadas por

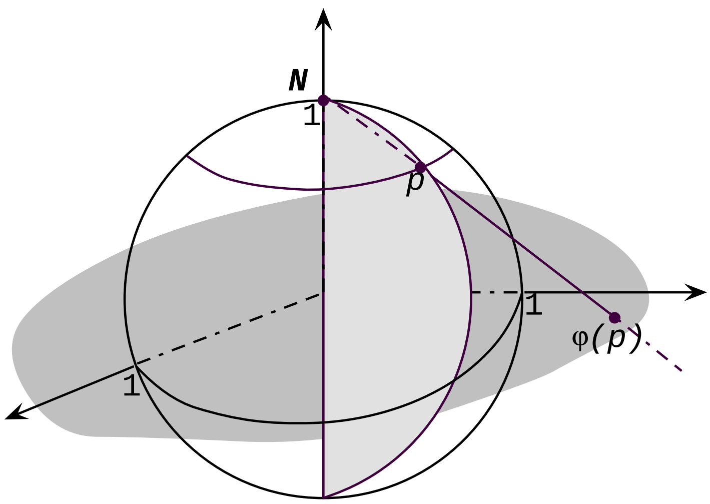
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right)$$

y

$$\psi(x_1, x_2) = \left( \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)$$

Probar que son diferenciables y que $\psi = \varphi^{-1}$

NOTA: $(S^2 - N, \varphi)$ se llama ***proyección estereográfica*** desde el polo norte.




**b)** Enunciar y probar un resultado similar para la proyección estereográfica desde el polo sur $S = (0, 0, -1)$.

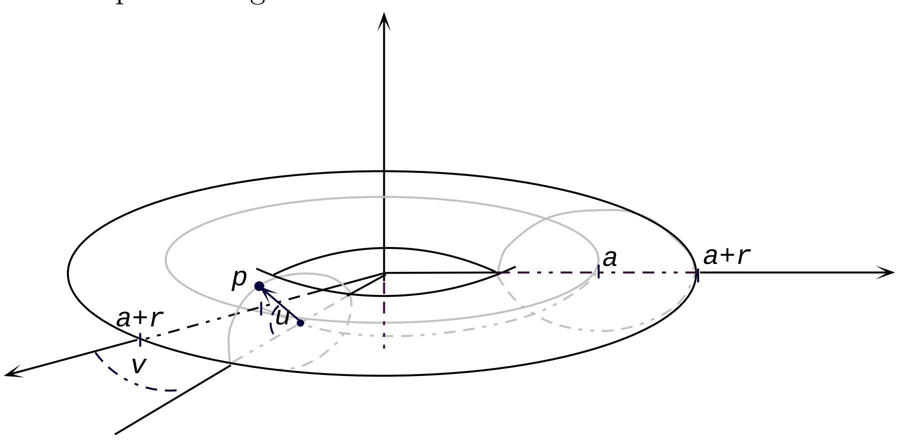
**c)** Deducir que ambas proyecciones estereográficas son cartas de $S^2$.

**12.** Sean $a, r \in \mathbb{R}$ con $a > r > 0$ y

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2\}$$

el toro de radios $a, r$ centrado en el origen. Verificar que

**a)** $T$ es una superficie regular




p=((a+r.cos(u))cos(v),(a+r.cos(u))sen(v),r.sen(v))

**b)** $f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(u, v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} v)$$

es una parametrización de $T$.

**13.** Sea $\mathcal{C}$ el semimeridiano de $S_r^2$ de extremos (incluidos): polo norte $N = (0, 0, r)$ y polo sur $S = (0, 0, -r)$ que pasa por el oeste $O = (r, 0, 0)$.

**a)** Comprobar que $S_r^2 - \mathcal{C}$ es un abierto de $S_r^2$.

**b)** Sea $f : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow S_r^2 - \mathcal{C}$ el homeomorfismo definido por

$$f(\alpha, \theta) = (r \cos\alpha \operatorname{sen}\theta, r \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta, r\cos\alpha)$$

Mostrar que $(S_r^2 - \mathcal{C}, f^{-1})$ es una carta de $S_r^2$.

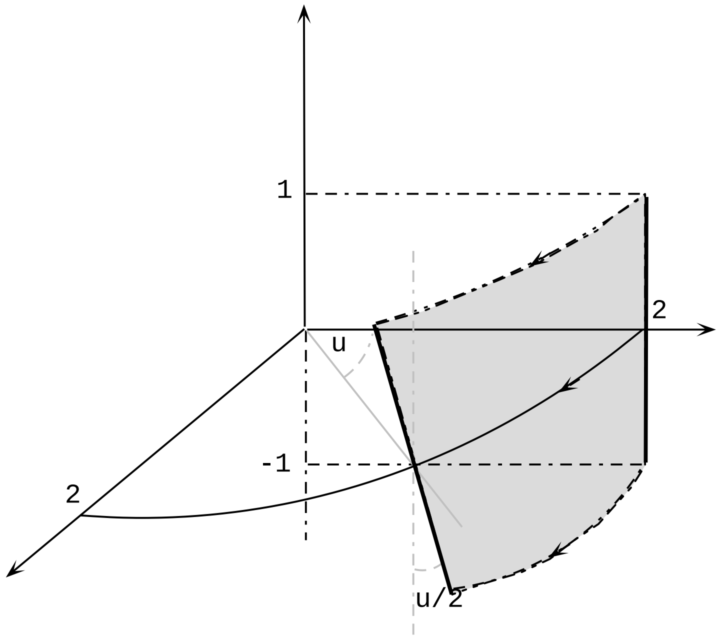
**14.** Sea $A = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ y $f_1, f_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= \left(\left[2 + v.\operatorname{sen}\left(\tfrac{u}{2}\right)\right].\operatorname{sen} u, \left[2 + v.\operatorname{sen}\left(\tfrac{u}{2}\right)\right].\cos u, \cos\left(\tfrac{u}{2}\right)\right) \\ f_2(u,v) &= \left(\left[2 + v.\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{u}{2}\right)\right].\cos u, -\left[2 + v.\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{u}{2}\right)\right].\operatorname{sen} u, \cos\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{u}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Sea $M = f_1(A) \cup f_2(A)$. Probar que $M$ es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$.

NOTA: $M$ se llama ***cinta de Möbius***.

Una forma de obtenerla es hacer rotar el segmento $[(0,2,-1),(0,2,1)]$ en sentido horario alrededor de la circunferencia de ecuaciones $x^2 + y^2 = 4$ , $z = 0$ de modo que —habiendo rotado dicho segmento en un ángulo $u$— éste se incline en un ángulo $\dfrac{u}{2}$ respecto de la vertical.




**15.** Sea $M$ una superficie regular de $\mathbb{R}^3$, $G \subset M$ un abierto y $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable. Verificar que $f$ es continua.

**16.** Sea $M$ una superficie regular de $\mathbb{R}^3$ y $v \in \mathbb{R}^3$. Mostrar que las funciones $f, h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(p) = |v - p|^2$ y $h(p) = < p, v >$ son diferenciables.

**17.** Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Verificar la equivalencia de las afirmaciones:

**a)** $f$ es diferenciable

**b)** $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable para todo $i = 1, \ldots, m$.

**18.** Sea $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $A : S^2 \longrightarrow S^2$ la función antipodal, $A(x,y,z) = (-x,-y,-z)$. Probar que $A$ es un difeomorfismo.

**19.** Probar que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo al plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

**20.** Sea $G \subset \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío y $f : G \longrightarrow f(G)$ un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^3$. Sea $M \subset G$ una superficie regular. Probar

**a)** $f(M)$ es una superficie regular

**b)** $f : M \longrightarrow f(M)$ es un difeomorfismo.

**21.** Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $G \subset M$ un abierto no vacío. Si $p \in G$, verificar que $T_pG = T_pM$.

**22.** Sea $M$ una superficie regular de $\mathbb{R}^3$ y $G \subset \mathbb{R}^3$ un abierto tal que $M \subset G$. Sea $g : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable y $f = g|_M$. Probar que $df_p = dg_p|_{T_pM}$ para todo $p \in M$.

**23.** Verificar que si $Q : F(u) = 0$ es una cuádrica en $\mathbb{R}^n$ y si $p \in Q$ es no singular, entonces el hiperplano tangente a $Q$ en $p$ es:

$$T_p(Q) = \{u \in \mathbb{R}^n \ / \ < \mathrm{grad}(F|_p), u - p >= 0\}$$

¿Qué relación hay entre $T_p(Q)$ y el hiperplano tangente a $Q$ definido para cuádricas?

**24.** Sea $M$ una superficie regular de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Construir una carta $(U, x)$ de $M$ alrededor de $p \in M$ tal que $\partial x_i|_p = v_i$ , $1 \leqslant i \leqslant 3$.

**25.** Sea $S^2$ la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$ y $(U, x)$ , $(V, y)$ las cartas de $S^2$ dadas por las proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur.

**a)** Para cada $p \in U \cap V$ hallar las coordenadas de los vectores tangentes $\partial y_i|_p$ $(i = 1, 2)$ respecto de la base $\{\partial x_1|_p, \partial x_2|_p\}$ de $T_pS^2$.

**b)** Si $(W, z)$ indica la carta dada en el ejercicio **13.**, para cada $p \in U \cap W$ calcular las coordenadas de $\partial z_i|_p$ $(i = 1, 2)$ respecto de la base $\{\partial x_1|_p, \partial x_2|_p\}$ de $T_pS^2$.

Composición tipográfica: LaTeX $2_\varepsilon$ (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)