Geometría de curvas en el plano y en el espacio

1. *a*) Sea $\omega = \tau T + \kappa B$. Mostrar que las ecuaciones de Frenet pueden escribirse

   $$\begin{cases} T' = \omega \wedge T \\ N' = \omega \wedge N \\ B' = \omega \wedge B \end{cases}$$

   b) Mostrar que estas ecuaciones determinan a ω unívocamente.

   El vector ω se llama *vector de Darboux*, y en vista de las ecuaciones anteriores, determina la rotación instantánea del triedro de Frenet.

2. Sean $r, \omega, v \in \mathbb{R}$ tales que $r > 0$ y $\omega \neq 0$, y consideremos la hélice circular

   $$\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto (r \cos \omega t, r \sin \omega t, vt) \in \mathbb{R}^3$$

   a) Determinar T, N, B, κ y τ.

   b) Mostrar que el vector de Darboux es constante.

   c) Mostrar que una curva regular con curvatura no nula constante y torsión constante es una hélice circular. (*Sugerencia:* utilice el teorema fundamental)

3. *a*) Consideremos una curva en $\mathbb{R}^3$ de curvatura no nula tal que $\tau/\kappa = \lambda$ es constante. Mostrar que existe un plano con el que las rectas tangentes forman un ángulo constante.

   b) Determinar explícitamente todas las curvas tales que τ/κ es constante. (*Sugerencia:* reparametrizar con respecto al parámetro $t = \int_{s_0}^{s} \kappa(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$.)

4. *a*) Si las tangentes a una curva pasan todas por un punto, la curva es una recta.

   b) Si los planos osculadores a una curva pasan todos por un punto, la curva es plana.

   c) Si todos los planos osculadores a una curva son paralelos, la curva es plana.

   d) Si todas las normales principales a una curva pasan por un punto, la curva está contenida en una esfera.

5. Sea C una hélice circular.

   a) Mostrar que el lugar geométrico C' de los centros de curvatura de C es una hélice circular coaxial con C. Determinar su torsión y su curvatura.

   b) Mostrar que el lugar geométrico C'' de los centros de curvatura de C' es C.

c) Si τ_1 y τ_2 son las torsiones de C y C' en puntos correspondientes, y κ su curvatura, mostrar que es $\tau_1\tau_2 = \kappa^2$.

6. Sean $\alpha, \beta : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ dos curvas tales que si $t \in (a,b)$, las tangentes a α y a β en $\alpha(t)$ y en $\beta(t)$, respectivamente, son paralelas. Entonces sucede lo mismo con las normales principales y las binormales.

7. Sea $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva regular en $\mathbb{R}^3$ con curvatura no nula, y sean $\alpha_t, \alpha_n, \alpha_b : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ las curvas determinadas por T, N y B respectivamente. Determinar los elementos de longitud de arco de $\alpha_t, \alpha_n, \alpha_b$.

8. *a*) Determinar la curvatura de una curva plana dada en coordenadas polares:

$$\begin{cases} r = r(t), \\ \theta = \theta(t). \end{cases}$$

b) Determinar la curvatura y la torsión de una curva en $\mathbb{R}^3$ dada en coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} r = r(t), \\ \theta = \theta(t), \\ \phi = \phi(t). \end{cases}$$

9. Mostrar que la evoluta de una tractiz, dada por

$$\alpha : t \in (0,\pi) \mapsto (a \sin t, a \cos t + a \log\Big(\tan\big(\frac{t}{2}\big)\Big))$$

es una catenaria

$$y = a \cosh \frac{t}{a}$$

10. Determine la curvatura de las siguientes curvas:

a) La espiral logarítmica: $r = ae^{b\theta}$.

b) La espiral de Fermat: $r^2 = \theta$.

c) La *limaçon*: $r = 2a \cos n\theta + b$.

Haga un diagrama aproximado de las curvas.