Práctica 4

1. Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función cuadrática cuya expresión en la base canónica es

$$F(x) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 + x_2x_3 - x_1 + 3x_2 - 10$$

a) Hallar su expresión respecto de la base $\mathbf{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

b) Hallar una base $\mathbf{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tal que en la expresión de F en $\mathbf{B}'$ no haya términos del tipo ax_ix_j con $i \neq j$.

c) Encontrar $A \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \psi_A + 2\varphi_A$.

2. Sea $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuadrática. Probar que son equivalentes:

a) F es reducible en $\mathbb{V}$

b) F es reducible en $\mathbb{V}_A$, para todo $A \in \mathbb{V}$

c) F es reducible en $\mathbb{V}_A$, para algún $A \in \mathbb{V}$.

3. Determinar en cada caso si existe $A \in \mathbb{R}^2$ tal que $Q : \psi_A(x) = -c_A$.

a) $Q : x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1 - x_2 + 3 = 0$

b) $Q : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 + x_2 + 1 = 0$

4. Encontrar Q_C en cada uno de los casos siguientes:

a) $Q : x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_2 - 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^2$)

b) $Q : x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x - 4x_2 - 5 = 0$ (en $\mathbb{R}^2$)

c) $Q : x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 3 = 0$ (en $\mathbb{R}^2$)

d) $Q : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^3$)

e) $Q : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_3 + 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^3$)

f) $Q : 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 4 = 0$ (en $\mathbb{R}^3$)

g) $Q : x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_3 - 7 = 0$ (en $\mathbb{R}^4$)

5. Determinar Q_S para cada una de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$:

a) $Q : 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 + 1 = 0$ $(n = 3)$

b) $Q : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 + 4x_4 = 0$ $(n = 4)$

c) $Q : x_1^2 - x_2^2 - x_4^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ $(n = 4)$

d) $Q : x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 = 0$ $(n = 5)$

e) $Q : x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0$ $(n = 2)$

6. Determinar los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la cuádrica Q de $\mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$Q : x_1^2 + (a^2+3)x_2^2 + (a^2-3)x_3^2 + (2a+4)x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_1 - 2x_2 + 1 = 0$$

tiene centro único.

7. a) ¿Es posible encontrar una cuádrica Q de $\mathbb{R}^3$ tal que $Q_C : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ y cuyo único punto singular es $(1, 0, -1)$?

b) Caracterizar las cuádricas tales que todos sus puntos son singulares.

8. a) Sea $Q : F(x) = 0$ una cuádrica y $A \in Q$ no singular. Mostrar que

$$T_A : \phi(A, x) + \varphi(x) + \varphi(A) + c = 0$$

si $F(x) = \phi(x, x) + 2\varphi(x) + c$.

b) Verificar que si Q es una parábola de $\mathbb{R}^2$, entonces para cada $A \in Q$, T_A es la recta tangente (i.e., la única recta no paralela al eje que corta a Q en un sólo punto.)

9. Hallar la ecuación del hiperplano tangente a las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$ en los puntos indicados:

a) $Q : 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 + x_2 - 2 = 0$ $\qquad P = (1, 0)$

b) $Q : x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_1 + 5x_2 - 10 = 0$ $\qquad P = (-2, 0)$

c) $Q : 3x_1^2 - 5x_3^2 + 3x_1x_2 + 6x_1 - x_2 = 0$ $\qquad P = (1, 0, 0)$

d) $Q : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ $\qquad P = (0, 0, 0)$

e) $Q : 6x_1x_2 - 4x_1 + 9x_2 - 6 = 0$ $\qquad P = (-\frac{3}{2}, 0, 0)$

10. Hiperplano Polar

Dado $B \in \mathbb{V}$ tal que no es centro de la cuádrica Q, se llama ***hiperplano polar de** B **respecto de*** Q a

$$P_B : \varphi_B(x) + c_B = 0$$

si $Q : \psi + 2\varphi + c = 0$.

a) ¿Para qué se pide que B no sea centro de Q?

b) Mostrar que la ecuación de P_B puede escribirse en la forma:

$$\phi(B, x) + \varphi(x) + \varphi(B) + c = 0$$

c) ¿Qué relación hay entre P_A y T_A cuando $A \in Q - Q_S$?

d) Dados $A \in Q - Q_S$ y $B \in \mathbb{V} - Q_C$, verificar que

$$B \in T_A \iff A \in P_B$$

e) Calcular P_B para $Q : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 3 = 0$ y $B = (-1, 4)$. Graficar.

11. Dada la cuádrica

$$Q : 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 - 4x_2 - 5 = 0$$

a) Hallar la ecuación de $P_{(1,0,-1)}$

b) Encontrar $A \in \mathbb{R}^3$ tal que $P_A : 19x_1 + 7x_2 - 10x_3 = 0$

c) Encontrar una cuádrica tal que el hiperplano polar de $(0, 1, -1)$ respecto de ella tenga ecuación : $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

12. **a)** Hallar las tangentes a la cónica $Q : 3x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 3 = 0$ que pasan por $P = (1, 1)$

b) Determinar todos los puntos P de la cónica $Q : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ tales que la tangente en P sea paralela a la recta $L : x_1 + x_2 = 3$.

13. **a)** Hallar los planos tangentes a la cuádrica

$$Q : x_1^2 - 7x_2^2 + 2x_3^2 - 12 = 0$$

que son paralelos al plano $\pi : 3x_1 + 6x_3 - 1 = 0$.

b) Hallar los planos tangentes a la cuádrica

$$Q : 6x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 4 = 0$$

que contienen a la recta $L : \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_3 = 4 \end{cases}$.

14. Sean H_1, H_2 dos hiperplanos (afines) en $\mathbb{V}$ y $Q = H_1 \cup H_2$. Probar que $Q_S = H_1 \cap H_2$.

15. Determinar los puntos comunes a las cónicas

$$Q_1 : x^2 + xy + 2x + y = 0 \qquad Q_2 : x^2 - y^2 + 3x + 2y - 1 = 0$$

16. Hallar $L \cap Q$ siendo L la recta y Q la cónica definidas por

a) $L : x_1 - x_2 + 2 = 0 \quad , \quad Q : x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1 - x_2 + 2 = 0$

b) $L : 4x_1 + 2x_2 = 1 \quad , \quad Q : 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 + x_2 - 4 = 0$

17. Determinar la ecuación normal afín de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$, indicando en cada caso

▷ sistema de coordenadas afines utilizado

▷ rango e índice

▷ gráfico aproximado

a) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 - 4 = 0 \qquad (n = 2)$

b) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3 = 0 \qquad (n = 3)$

c) $x_1^2 - 2x_1x_3 + x_4^2 + 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 1 = 0 \qquad (n = 4)$

d) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$ $(n = 2)$

e) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4 = 0$ $(n = 3)$

f) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_1 - 4x_2 - 10x_3 - 1 = 0$ $(n = 3)$

g) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5 = 0$ $(n = 3)$

h) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 4x_1 + 4x_2 + 2 = 0$ $(n = 3)$

i) $x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$ $(n = 2)$

j) $3x_1^2 - 24x_1x_2 + 32x_1 + 40 = 0$ $(n = 2)$

k) $2x_1^2 - 12x_1x_2 + 18x_2^2 + x_1 - 3x_2 - 6 = 0$ $(n = 2)$

l) $x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0$ $(n = 2)$

m) $3x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_1x_3 + 6x_1 + 20x_2 + 8x_3 - 17 = 0$ $(n = 3)$

n) $5x_1^2 + 20x_2^2 + 12x_1x_2 + 2x_2x_3 + 8x_1 + 8x_3 + 16 = 0$ $(n = 3)$

o) $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 + 3x_1 - 2x_2 + 8 = 0$ $(n = 3)$

p) $5x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 1 = 0$ $(n = 3)$

q) $4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - x_3^2 + 3x_1 + 1 = 0$ $(n = 3)$

r) $4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1 + 2x_2 + 1 = 0$ $(n = 3)$

s) $4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 3x_1 + 1 = 0$ $(n = 3)$

18. **a)** Dada la cónica de ecuación $Q : (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = 1$, hallar un sistema de coordenadas afines que exprese a Q en su forma normal afín.

b) Idem con $Q : 9(x_1 - a)^2 - 4(x_2 - b)^2 = 1$

19. Probar que la forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$

$$F(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 - 3x_2x_3$$

es reducible.

20. Determinar los valores de α y β ($\alpha > 0$) para los cuales la forma de $\mathbb{R}^2$

$$F(x) = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + 2x_1x_2$$

es reducible.

21. Dada la cónica Q de $\mathbb{R}^2$ de ecuación : $3x_1^2 - 4x_1 + 2x_2 + 3 = 0$, hallar

a) el cono de tangentes de Q desde $A = (1, 1)$

b) las rectas tangentes a Q que pasan por A.

22. Dada la cuádrica de $\mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$Q : \alpha x_1^2 - 2\beta x_1x_2 + 4x_2x_3 - 2\alpha x_2 - 6x_3 + \beta = 0$$

determinar α y β de manera tal que el cono de tangentes desde $(0, 0, 0)$ corte a Q sobre el plano $\pi : 2x_2 + 8x_3 = 1$.

23. Sea $\mathcal{A} = \{Q \ / \ Q \text{ es cuádrica de } \mathbb{V}\}$. Se define en $\mathcal{A}$ la siguiente relación:

$$Q \sim Q' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{existe } f \in GA(\mathbb{V}) \text{ tal que } f(Q) = Q'$$

Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

24. Dadas las cónicas de $\mathbb{R}^2$ es ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} Q & : & 7x_1^2 - 10x_1x_2 + 7x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 = 0 \\ Q' & : & 5y_1^2 + 4y_1y_2 + 2y_2^2 - 2y_1 + 4y_2 - 1 = 0 \end{array}$$

Encontrar un isomorfismo afín f que hace $Q \sim Q'$.

25. Definir isomorfismos afines en $\mathbb{R}^3$ que lleven cada una de las cuádricas de ejercicio 17 a la forma normal afín.

26. Sea $Q : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ en $\mathbb{R}^3$. Definir transformaciones afines $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que verifiquen:

a) $f_1^{-1}(Q) =$ elipse

b) $f_2^{-1}(Q) =$ hipérbola

c) $f_3^{-1}(Q) =$ parábola

d) $f_4^{-1}(Q) =$ cono plano

27. Sean $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuadrática y $A, B \in \mathbb{V}$ tales que $F(A) > 0$ y $F(B) < 0$. Probar que para algún x_0 del segmento que une A con B es $F(x_0) = 0$.

28. Sea $\psi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y Q la cuádrica definida por $Q : \psi(x) - c = 0$. Probar que

$$Q_S \neq \varnothing \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = 0$$

29. Si L es una recta y Q una cuádrica, probar que $L \cap Q$ sólo puede tomar uno de estos valores:

$$\varnothing \quad ; \quad \text{un punto} \quad ; \quad \text{dos puntos distintos} \quad ; \quad L$$

30. Probar que si una cuádrica contiene un hiperplano de puntos singulares, la cuádrica coincide con el hiperplano.

31. Hallar todos los $P \in \mathbb{R}^2$ por los cuales pasan dos tangentes a la cónica $Q : x_1x_2 - 1 = 0$.

32. Hallar todos los puntos P de la cónica Q de $\mathbb{R}^2$ de ecuación : $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ tales que la tangente a P es paralela a la recta $L : x_1 + x_2 = 3$.

33. Determinar para qué valores de a, la siguiente cuádrica de $\mathbb{R}^3$

$$Q : 2x_1^2 + 3x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_3 - 5 = 0$$

a) es un hiperboloide de una hoja

b) es un par de planos paralelos

c) es un cilindro parabólico

d) es un paraboloide elíptico

34. **a)** Encontrar la ecuación de $Q : x_1^2 - x_2^2 = 1$ en el sistema

$$\mathbf{S} = \{(1,0,0); (2,1,1), (2,1,0), (2,0,0)\}$$

b) Hallar un sistema de coordenadas afines en $\mathbb{R}^3$ de modo tal que, en él, la cuádrica

$$Q : x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

quede expresada mediante su ecuación normal afín.

35. Sea en $\mathbb{R}^3$ la cuádrica $Q : x_1^2 + x_2^2 - (x_3 - 1)^2 = 0$.

a) Encotrar planos π_i $(i = 1, \ldots, 6)$ tales que $\pi_i \cap Q$ sea

(1) una elipse

(2) una parábola

(3) una hipérbola

(4) un como plano

(5) un punto

(6) una recta doble

b) Probar que no existe ningún plano π tal que $\pi \cap Q$ sea un par de rectas paralelas distintas.

36. Determinar la ecuación normal eucídea de las siguientes cónicas de $\mathbb{R}^2$, indicando en cada caso el sistema de coordenadas utilizado:

a) $x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$

b) $5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 + x_2 - 2 = 0$

c) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 - 4 = 0$

d) $2x_1^2 - 12x_1x_2 + 18x_2^2 + x_1 - 3x_2 - 6 = 0$

37. Determinar la ecuación normal eucídea de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^3$, indicando en cada caso el sistema de coordenadas utilizado:

a) $2x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_1x_2 - x_1 + x_3 = 0$

b) $3x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_1x_3 + 6x_1 + 20x_2 + 8x_3 - 17 = 0$

c) $5x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 1 = 0$

d) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)