Práctica 3

1. Sea $\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6\}$ y L la recta de ecuaciones

$$L \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

en el sistema canónico. Determinar una condición necesaria y suficiente sobre $a \in \mathbb{R}$ para que exista $f \in \mathcal{O}(3)$ [1] tal que $f(L) \subset \pi$.

2. Sea $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1\}$ y L la recta generada por $A = (1, 0, 0, 0)$ y $B = (0, 0, 1, 0)$. Construir una recta L' tal que $M = L \vee L'$ y $d(L, L') = 1$.

3. Sean M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ para los cuales existe $f \in \mathcal{O}(n)$ tal que $f(M_1) = M_2$. Sean $p_1 \in M_1$ y $p_2 \in M_2$ tales que $d(0, M_1) = d(0, p_1)$ y $d(0, M_2) = d(0, p_2)$. Probar que $f(p_1) = p_2$.

4. Sean en $\mathbb{R}^3$ los planos $\pi \ : \ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$, $\pi_2 \ : \ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -3$ y $L_1 \subset \pi_1$, $L_2 \subset \pi_2$ las rectas

$$L_1 \ : \ (\frac{2}{3}, \frac{13}{3}, 0) + t(1, 0, 1) \qquad \text{y} \qquad L_2 \ : \ (0, -\frac{13}{3}, \frac{2}{3}) + t(1, 0, 1)$$

Construir $f \in \mathcal{O}(3)$ tal que $f(\pi_1) = \pi_2$, $f(L_1) - L_2$ y $\det(f) = 1$. ¿Es única?

5. Sean en $\mathbb{R}^3$, π el plano de ecuación $\pi \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 1$ y L la recta definida por

$$L \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 - 2x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Determinar una recta $L' \subset \pi$ tal que $d(L, L') = 3$.

6. Sean en $\mathbb{R}^4$ la recta L y el plano π definidos por las ecuaciones

$$L \ : \ \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad , \qquad \pi \ : \ \begin{cases} x_1 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Calcular $d(L, \pi)$.

7. Sean en $\mathbb{R}^3$ los planos $\pi_1 : x_1 + x_2 = 0$, $\pi_2 : x_2 + 3x_3 = 1$. Construir una isometría $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(\pi_1) = \pi_2$.

[1] grupo de transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$

8. Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (1, 1, 2)$ y $B = (2, 0, 2)$. Determinar $C \in \mathbb{R}^3$ con $C \in \pi$: $x_1+x_2 = 2$, de modo que A, B, C formen un triángulo equilátero. ¿Es única la solución?

9. **a)** Calcular el ángulo entre las rectas de $\mathbb{R}^2$

$$L_1 \ : \ x_1 - x_2 = 1 \qquad , \qquad L_2 \ : \ x_1 + x_2 = 3$$

b) Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1, L_3) = \angle(L_2, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

10. Sea L la recta de $\mathbb{R}^3$ dada por $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = \lambda(1, -1, 1) + (2, 1, 0)\}$. Encontrar un plano π en $\mathbb{R}^3$ tal que $(2, 1, 0) \in \pi$ y $\angle(L, \pi) = \frac{\pi}{4}$.

11. Hallar el complemento ortogonal de M que pasa por A, la proyección ortogonal de A sobre M y $d(A, M)$ en los siguientes casos:

a) $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1 - x_2 = 2\}$, $A = (2, 3)$

b) $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x_1 + x_3 = 1 \ , \ x_1 - x_2 = -1\}$, $A = (1, 0, 0)$

c) $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \ , \ 2x_1 - 3x_4 = 2\}$, $A = (0, 2, 0, -1)$

12. Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos afinmente independientes A_1, A_2, A_3. Verificar que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ d(x, A_1) = d(x, A_2) = d(x, A_3)\}$$

es una recta ortogonal al plano generado por A_1, A_2, A_3. Calcular S en el caso $A_1 = (1, -1, 0)$, $A_2 = (0, 1, 1)$, $A_3 = (1, 1, 2)$.

13. Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A_1 = (1, -1, 0)$ y $A_2 = (1, 1, 1)$. Construir tres hiperplanos distintos H_1, H_2, H_3 tales que $d(A_1, H_i) = d(A_2, H_i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

14. Calcular $d(M_1, M_2)$ en los siguientes casos:

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\}$
$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3\}$

b) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 = 1 \ , \ x_1 - x_3 = 0\}$
$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ , \ x_3 = 1\}$

c) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = \alpha(1, -1, 0) + \beta(2, 1, 1) + (1, 0, 0)\}$
$M_2 = \{(3, 0, 1)\}$

d) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \ , \ x_2 - 2x_4 = 2\}$
$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ , \ x_2 - 2x_4 = -8 \ , \ x_1 - x_2 + x_4 = 5\}$

15. Sea $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = \lambda(1, 2, -2) + (0, 2, 0)\}$ y $p = (1, 2, 2)$. Encontrar ecuaciones implícitas de una recta L' ortogonal a L tal que $d(p, L') = 3$ y $L \cap L' \neq \varnothing$. ¿Es única?

16. Sea $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = \lambda(3, 0, -4) + (1, -1, 0)\}$. Hallar una recta L', alabeada con L, tal que $d(L', L) = 2$.

17. Sean M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ de la misma dimensión. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones

a) Existe una rotación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(M_1) = M_2$

b) $d(0, M_1) = d(0, M_2)$

18. Construya una rotación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(M_1) = M_2$ en los siguientes casos

a) $M_1 = \{(1, 2, -1)\}$, $M_2 = \{(-1, 2, 1)\}$

b) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - x_2 - 2 \ , \ x_3 = 1\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - 2x_2 = 1 \ , \ 3x_2 + x_3 = -4\}$

c) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 = 3\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 = -3\}$

19. Sean M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^n$. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones

a) $\dim M_1 = \dim M_2$

b) Existe una isometría $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ —$f(x) = x.A + b$, $A \in \mathcal{O}(n)$— tal que $\det A = 1$ y $f(M_1) = M_2$.

20. En cada uno de los siguientes casos, construir una isometría $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = x.A + b$ con $A \in \mathcal{O}(3)$ y $\det A = 1$, tal que $f(M_1) = M_2$:

a) $M_1 = \{(1, 0, 1)\}$ y $M_2 = \{(-1, 1, 0)\}$

b) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 = 3\}$ y $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 = 4\}$

21. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}-$espacio vectorial con producto interno $< \, , \, >$. Si $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{V}$, se define el ***determinante de Gram*** o ***Gramiano*** de $v_1, \ldots, v_m$ como el número

$$G(v_1, \ldots, v_m) = \det(< v_i, v_j >)$$

a) Sea S un subespacio de $\mathbb{V}$ de dimensión m y $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base ortonormal de S. Si $v_1, \ldots, v_m \in S$ y $v_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, verificar que $G(v_1, \ldots v_m) = (\det A)^2$, donde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

b) Deducir de **a)** que los vectores $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{V}$ son linealmente independientes si y sólo si $G(v_1, \ldots, v_m) > 0$.

c) Sea S un subespacio de $\mathbb{V}$ de dimensión m y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de S. Verificar que si $x \in \mathbb{V}$, entonces

$$d(x, S) = \left(\frac{G(x, v_1, \ldots, v_m)}{G(v_1, \ldots, v_m)} \right)^{1/2}$$

Sugerencia: si $x \notin S$, considerar una base ortonormal adecuada de $T = S \oplus < x >$ y utilizar el inciso **a)**.

22. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}-$espacio vectorial con producto interno $< \, , \, >$ y $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{V}$ linealmente independientes. El ***paralelepipedo*** $m-$***dimensional generado por*** $v_1, \ldots, v_m$ se define como el comjunto

$$P(v_1, \ldots, v_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \Big/ 0 \leqslant a_i \leqslant 1 \right\}$$

El volumen de $P(v_1, \ldots, v_m)$ se define inductivamente del siguiente modo

(i) si $m = 1$, $\mathrm{vol}(P(v_1)) = |v_1|$

(ii) $\mathrm{vol}(P(v_1, \ldots, v_m)) = \mathrm{vol}(P(v_2, \ldots, v_m)).d(v_1, S)$ siendo $S =< v_2, \ldots, v_m >$.
Probar que $\mathrm{vol}(P(v_1, \ldots, v_m)) = G(v_1, \ldots, v_m)^{1/2}$.

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)