Práctica 1

1. **a)** Probar que

$\diamond$ $\{(0,0,0),(1,0,1)\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^3_{(2,-1,1)}$

$\diamond$ $\{(1,0,0),(0,-2,0),(1,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3_{(-2,1,1)}$

b) Encontrar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $\{(a,1,0),(-1,3,2),(2a,a+1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3_{(0,1,0)}$

2. **Sistema de coordenadas afines**

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n. El conjunto $S = \{A, \{v_1, \ldots, v_n\}\}$ se denomina ***sistema de coordenadas afines*** en $\mathbb{V}$ si $A \in \mathbb{V}$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}_A$.

Notación: $S = \{A; v_1, \ldots, v_n\}$

a) Mostrar que son equivalentes:

(i) $S = \{A; v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de coordenadas afines en $\mathbb{V}$

(ii) $\{v_1 - A, \ldots, v_n - A\}$ es base de $\mathbb{V}$.

b) Analizar si los siguientes son sistemas de coordenadas afines en $\mathbb{V}$:

- $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $S = \{(2,1,3);(0,-1,1),(1,1,2),(2,1,2)\}$
- $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[X]$, $S = \{2X+3; X^2, 2X, 3X+4\}$
- $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[X]$, $S = \{2X+3; X^2, X, 3X+4\}$
- $\mathbb{V} = \mathbb{R}$, $S = \{-2; 2\}$
- $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $S = \left\{\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2&4\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&3\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

3. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n, $S = \{A; v_1, \ldots, v_n\}$ un sistema de coordenadas afines en $\mathbb{V}$. Dado $v \in \mathbb{V}$, notaremos con $[v]_S$ al vector de coordenadas de v respecto de la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{V}_A$; i.e., $[v]_S = (a_1, \ldots, a_n)$ si $v = \sum_{i=1}^{n} {}_{\mathrm{A}}\, a_i \underset{A}{\cdot} v_i$

Nota: $[v]_S$ se denomina ***vector de coordenadas afines de*** v ***respecto de*** S.

a) Hallar $[v]_S$ en los casos siguientes:

- $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $S = \{(2,1,0);(0,1,0),(2,0,1),(0,0,-3)\}$, $v = (0,0,0)$
- $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[X]$, $S = \{X^2; X+1, X^2+3X, X^2+2\}$, $v = 2X$
- $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $S = \left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, $v = \begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}$

b) Sea $S = \{(0,-2,1);(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Calcular el vector v , sabiendo que $[v]_S = (-2,0,4)$.

4. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $S = \{A; v_1, \ldots, v_n\}$, $T = \{B; w_1, \ldots, w_n\}$ dos sistemas de coordenadas afines en $\mathbb{V}$. Sea $C = C(\{v_i - A\}, \{w_i - B\})$ (la matriz de cambio de la base $\{v_i - A\}$ en la base $\{w_i - B\}$; i.e., $v_i - A = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(w_j - B)$). Probar que

a) para cada $v \in \mathbb{V}$: $[v]_T = [v]_S.C + [A]_T$

b) $\|\tau_{AB}\|_{\mathbf{B}_A \mathbf{B}_B} = C$, donde $\mathbf{B}_A = \{v_i\}$ y $\mathbf{B}_B = \{w_i\}$

5. Combinaciones afines

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{V}$. Se dice que $v \in \mathbb{V}$ es ***combinación afín*** de los v_i si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que :

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \qquad \text{con} \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

a) Dado $\mathbb{V}$ espacio vectorial y $a, b \in \mathbb{V}$, se define el ***segmento de extremos*** a **,** b como el conjunto

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \ / \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

Verifique que los puntos de $[a, b]$ son combinaciones afines de sus extremos.

¿Qué se obtiene si se considera el conjunto de todas las combinaciones afines de a y b?

b) Probar que

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v = {\sum_{i=1}^{n}}_{A} \lambda_i \underset{A}{\cdot} v_i$$

para todo $A \in \mathbb{V}$.

6. Sea M el plano de $\mathbb{R}^3$, cuya ecuación respecto del sistema canónico

$$E = \{(0, 0, 0); (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

es : $2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4$.

a) Hallar la ecuación de M respecto de $S = \{(0, 0, 1); (1, 1, 0), (0, 0, 0), (-1, 0, 1)\}$

b) Hallar un sistema de coordenadas afines T, de $\mathbb{R}^3$, tal que la ecuación de M respecto de T sea : $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1$

7. Hallar un conjunto de generadores afinmente independientes de

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - x_3 = 2 \ , \ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$$

8. Sean en $\mathbb{R}^3$, los siguientes sistemas de coordenadas afines : E (canónico) y $S = \{(1, 1, 1); (2, 0, 0), (0, 2, 1), (1, 1, 2)\}$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3_{(1,1,1)}$ la transformación lineal definida por

$$f(1, 0, 0) = (2, 0, 0) \quad , \quad f(0, 1, 0) = (0, 2, 1) \quad , \quad f(0, 0, 1) = (1, 1, 2)$$

a) Demostrar que si $x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i A_i$, con $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 0$ y $A_i \in \mathbb{R}^3$, entonces :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i f(A_i)$$

b) Si $[x]_E = (x_1, x_2, x_3)$, calcular $[f(x)]_S$

c) Mostrar que f es un isomorfismo afín.

9. Sea $GA(\mathbb{V}) = \{f : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \ / \ f \text{ es isomorfismo afín}\}$. Probar que $GA(\mathbb{V})$ es un grupo para la composición.

10. Sean $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_4 = 1\}$ y M_2 la variedad generada por $A = (1, 0, -1, 1)$, $B = (0, 0, 0, 1)$ y $C = (-1, 0, 1, 1)$. Construir una transformación afín $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ explicitando sus valores en (x_1, x_2, x_3) que satisfaga

(i) $f(\lambda.(1, 0, 0)) - \lambda \underset{D}{\cdot} (A - B + D)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y siendo $D = (0, 0, 1, 1)$

(ii) $\mathrm{Im}(f) \cap M_2 = \varnothing$

(iii) $\mathrm{Im}(f) \vee M_2 = M_1$ [1]

11. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función que satisface $f(\lambda \underset{x}{\cdot} y) = \lambda \underset{f(x)}{\cdot} f(y)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostrar que f es una transformación afín.

Sugerencia: escribir $f(x) = f(0) + g(x)$ y probar que g es lineal.

12. Sea $S = \{B; v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un sistema de coordenadas afines de $\mathbb{R}^4$ y $\pi \subset \mathbb{R}^4$ el plano cuyas ecuaciones implícitas respecto de S son

$$\pi \ : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Sea L la recta generada por A y C, donde $C = 3v_1 - v_2 - 2B + A$. Si $Q = 3v_1 - v_2 + 3v_3 - 3v_4 - B$, se pide hallar la ecuación implícita respecto de S del hiperplano σ de $\mathbb{R}^n$ que satisface : $L \parallel \sigma$, $\pi \parallel \sigma$ y $Q \in \sigma$.

13. Sea $\dim \mathbb{V} = n \geqslant 2$ y M_1, M_2 variedades lineales de $\mathbb{V}$. Sea $A \in \mathbb{V}$ y S_1, S_2 los subespacios de $\mathbb{V}_A$ paralelos a M_1 y M_2 respectivamente. Probar que si $\mathbb{V} = S_1 \underset{A}{+} S_2$, entonces $M_1 \cap M_2 \neq \varnothing$.

Deducir que si M_1 y M_2 son planos de $\mathbb{R}^3$, entonces $M_1 \parallel M_2$ o $M_1 \cap M_2 \neq \varnothing$.

14. Sea π_1 y π_2 planos alabeados de $\mathbb{R}^4$. Si L y L' son dos rectas tales que $L \parallel \pi_i$, $L' \parallel \pi_i$ $(i = 1, 2)$, probar que $L \parallel L'$.

[1] $M \vee N$ denota la variedad lineal generada por las variedades lineales M y N

15. Sea L la recta de $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones en sistema canónico son

$$L \ : \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Si $S = \{(3,-2,0);(4,-2,0),(2,-1,0),(4,-3,1)\}$, se pide hallar las ecuaciones implícitas de L respecto de S.

16. Sean en $\mathbb{R}^3$ los sistemas de coordenadas afines

$$S_1 = \{(1,1,1);(2,1,0),(1,0,2),(-1,3,2)\}$$
$$S_2 = \{(-1,2,0);(1,1,-1)(01,1,1),(0,1,1)\}$$

a) sea $v \in \mathbb{R}^3$ de coordenadas (x_1, x_2, x_3) respecto de S_1. Calcular sus coordenadas respecto de S_2.

b) sea $v \in \mathbb{R}^3$ de coordenadas (x_1, x_2, x_3) respecto de S_1. Calcular sus coordenadas respecto del sistema canónico.

17. Sea π el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación (sistema canónico) $\pi : x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$. Determinar una ecuación de M respecto de $S = \{(1,0,0);(0,0,0),(1,-1,0),(0,1,1)\}$.

18. Sea M el plano de $\mathbb{R}^4$ definido por las ecuaciones (sistema canónico)

$$M \ : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -2 \end{cases}$$

Determinar un sistema de coordenadas afines $S = \{A; v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de modo que M tenga ecuaciones

$$M \ : \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

respecto de S.

19. Determinar ecuaciones paramétricas de M, respecto del sistema canónico de $\mathbb{R}^n$, en los siguientes casos:

a) $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \ , \ 2x_1 - x_3 = 2\}$

b) $M = \{x \in \mathbb{R}^5 \ / \ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 3\}$

20. Determinar $a \in \mathbb{R}$ de modo que $M \subset \mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones (sistema canónico)

$$M \ : \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + a.x_3 = 0 \end{cases}$$

resulte una variedad lineal de dimensión 1 ó 0.

21. Sea $S = \{A; v_1, v_2, v_3\}$ un sistema de coordenadas afines de $\mathbb{R}^3$ y sea M el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $M : x_1 + x_2 + x_3 = 1$ respecto de S.

Sea $S' = \{B; w_1, w_2, w_3\}$ el sistema de coordenadas afines definido por

$$B = 2v_1 + v_2 - v_3 - A \ , \ w_1 = 3v_2 - 2A \ , \ w_2 = v_1 \ , \ w_3 = 3v_3 - v_1 - A$$

Hallar una ecuación implícita de M respecto de S'.

22. Hallar un conjunto de generadores afinmente independientes de las variedades lineales

a) $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 = 3 \ , \ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5\}$

b) $M = \{x \in \mathbb{R}^5 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -2\}$

c) M generada por $A = (-1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (1, 0, 0)$ y $D = (-2, -3, -3)$.

23. Hallar todos los planos π de $\mathbb{R}^3$ que contienen a la recta

$$L \ : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

24. En cada uno de los siguientes casos, estudiar si las variedades lineales M_1 y M_2 se cortan, son paralelas o alabeadas:

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1 - x_2 = 3\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = \lambda(1, -1) + (2, 1)\}$

b) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = a(1, 0, 1) + (0, 0, -3)\}$

c) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - x_2 = 1 \ , \ x_3 + x_4 = 0\}$
$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - x_2 = 0 \ , \ x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$

d) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \ , \ x_2 + 2x_3 + x_4 = -2\}$
$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \ , \ 2x_1 - x_3 - x_4 = 2\}$

25. Sean

$$L = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = a(-1, 2, 1, 1) + (1, 0, 0, 0)\} \quad \text{y}$$
$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = a(-1, 2, 1, 1) + b(0, 1, 3, -1)\}$$

Construir un hiperplano H de $\mathbb{R}^4$ tal que $L \subset H$ y $M \subset H$.

26. Determinar $M_1 \cap M_2$ y $M_1 \vee M_2$ para las variedades del ejercicio **24.**

27. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación afín dada por $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_1 + 1, x_1 - x_2 + 2)$

a) Si $L = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x_1 - x_2 = 1\}$ y $L' = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x_1 + x_2 = 3\}$, calcular $f(L)$ y $f^{-1}(L')$

b) Calcular $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

28. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación afín

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3 - 1, x_1 + x_2, x_1 + 3)$$

a) Si $\pi = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = a(1,0,2) + b(0,0.1) + (2,1,5)\}$ y $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = a(3,0,2)\}$, calcular $f(\pi)$ y $f^{-1}(L)$.

b) Calcular $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

29. Sean en $\mathbb{R}^2$ los puntos $A_1 = (1,-1)$, $A_2 = (1,1)$ y $A_3 = (2,1)$ y sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $B_1 = (1,2,0)$, $B_2 = (2,0,0)$ y $B_3 = (-1,1,0)$. Hallar la forma explícita de la única aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(A_i) = B_i$ $(i = 1,2,3)$.

30. Construir una aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(\pi) = L$, siendo

$$\pi : 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \text{ y } L = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = a(1,-1) + (3,0)\}$$

31. Encontrar todas las transformaciones afines $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que

(i) $f(-2,0,1) = (-2,0,1)$

(ii) $f(L) \parallel L$ para toda recta L de $\mathbb{R}^3$.

32. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}-$espacio vectorial, M una variedad lineal de $\mathbb{V}$ y S el subespacio de $\mathbb{V}$ paralelo a M. En cada uno de los siguientes casos determinar una $f \in GA(\mathbb{V})$ tal que $f(S) = M$

a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ y $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$

b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ y $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = a(-1,0,2) + (1,1,1)\}$

33. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x) = (x_1 - 1, x_1 - x_2, x_3)$. Hallar su matriz en los sistemas de coordenadas:

$$S = \{(1,1,1);(1,2,0),(2,1,1),(0,1,2)\} \quad \text{y} \quad S' = \{(0,0,1);(2,2,1),(1,0,0).(0,1,1)\}$$

34. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}-$espacio vectorial, $\dim \mathbb{V} = n$ y M una variedad lineal de $\mathbb{V}$ de dimensión r. Si $m = n - r$, sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ tales que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A,b) = m$. Probar que existe un sistema de coordenadas afines $S = \{B; w_1, \ldots, w_n\}$ con la propiedad que

$$M = \left\{ w = \sum_{i=1}^{n} x_i \underset{B}{\cdot} w_i \Big/ A. \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \right\}$$

35. Sean en $\mathbb{R}^4$ dos planos alabeados π y π' y dos rectas paralelas L y L'. Construir una transformación afín $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(\pi) = L$ y $f(\pi') = L'$.

36. Definir una trasnformación afín $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(\pi) = \pi'$, $f(\pi') = \pi$, siendo π y π' los planos cuyas ecuaciones respecto del sistema canónico son

$$\pi \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad \text{y} \qquad \pi' \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

37. Sean en $\mathbb{R}^3$ la variedades lineales cuyas ecuaciones respecto del sistema canónico son:

$$M \ : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \qquad , \qquad M' \ : \ \{ \ x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Construir una transformación afín $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(M') = M$ y $f(M) = M'$.

38. Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ $\mathbb{R}-$espacios vectoriales y $f : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ afín. Probar

a) si $A, B, C \in \mathbb{V}$ son puntos alineados, entonces $f(A)$, $f(B)$ y $f(C)$ lo son.

b) si M y M' son variedades paralelas de $\mathbb{V}$, entonces $f(M)$ y $f(M')$ lo son.

39. Sean L y $'$ dos rectas en $\mathbb{V}$. Probar

a) si $L \parallel L'$, existe un plano π tal que $L \subset \pi$ y $L' \subset \pi$.

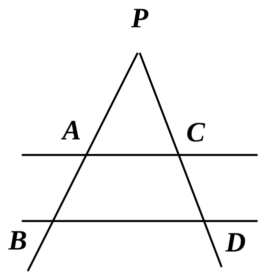
b) si $L \cap L' = \{p\}$, existe un plano π tal que $L \subset \pi$ y $L' \subset \pi$.

c) si existe un plano π tal que $L \subset \pi$ y $L' \subset \pi$, entonces $L \parallel L'$ o $L \cap L' = \{p\}$.

40. Teorema de Thales

Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos contenidos en un plano π tal que no hay tres de ellos contenidos en una recta y las rectas L_{AC} y L_{BD} son paralelas.

a) Si $L_{AB} \cap L_{DC} = \{P\}$ y $P = \lambda.B + (1-\lambda)A = \gamma.D + (1-\gamma)C$, probar que $\lambda = \gamma$



b) Si $L_{AB} \parallel L_{DC}$, sean $P \in L_{AB}$ y $Q \in L_{DC}$ tales que $L_{PQ} \parallel L_{AC}$. Si $P = \lambda.B + (1-\lambda)A$ y $Q = \gamma.D + (1-\gamma)C$, probar que $\lambda = \gamma$.

41. Dados dos planos M y M' de $\mathbb{R}^3$ por sus ecuaciones paramétricas respecto de un sistema de coordenadas $S = \{A; v_1, v_2, v_3\}$

$$M \ : \begin{cases} x_1 = 6\lambda + 5\gamma + 1 \\ x_2 = \gamma + 2 \\ x_3 = 3\lambda - 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad M' \ : \begin{cases} x_1 = \lambda + 5\gamma + 6 \\ x_2 = -\lambda + \gamma \\ x_3 = 3\lambda + 5\gamma + 4 \end{cases}$$

determinar ecuaciones paramétricas en el mismo sistema de

a) rectas L y L' paralelas tales que $L \subset M$ y $L' \subset M$

b) rectas L y L' alabeadas tales que $L \subset M$ y $L' \subset M'$

c) una recta $L \subset M'$ que contenga al punto de coordenadas $(6, 0, 4)$ y sea paralela a la recta

$$T \ : \begin{cases} x_1 = -2\lambda + 1 \\ x_2 = \ \ 2\lambda + 2 \\ x_3 = -6\lambda - 1 \end{cases}$$

42. Sean M_1 y M_2 las variedades lineales de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones respecto del sistema de coordenadas canónico son

$$M_1 \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad M_2 \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Hallar las ecuaciones de $M_1 \vee M_2$.

43. Hallar un conjunto de generadores afinmente independientes para $M = M_1 \vee M_2$ siendo M_1 y M_2 las variedades de $\mathbb{R}^3$ dadas por sus ecuaciones paramétricas (sistema canónico)

$$M_1 \ : \ \begin{cases} x_1 = \lambda + 1 \\ x_2 = -\lambda + 2 \\ x_3 = 2\lambda - 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad M_2 \ : \ \begin{cases} x_1 = \lambda - 1 \\ x_2 = 2\lambda + 1 \\ x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$$

44. Sean M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{V}$. Probar que el conjunto

$$M = \left\{ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \Big/ x \in M_1 \ , \ y \in M_2 \right\}$$

es una variedad lineal. Dar condiciones suficientes para que $M_1 \subset M$ y $M_2 \subset M$.

45. Sean en $\mathbb{R}^2$ los untos $A = (2,1)$, $B = (-1,3)$, $x_1 = (2,0)$, $x_2 = (1,1)$ y $x_3 = (0,-2)$. Calcular

a) $x_1 \underset{A}{+} x2$

b) $(-3) \underset{A}{\cdot} x_1 \underset{A}{+} 2 \underset{A}{\cdot} x_2 \underset{A}{+} 5 \underset{A}{\cdot} x_3$

c) $2 \underset{A}{\cdot} (x_1 \underset{A}{-} x_2)$

d) $2 \underset{B}{\cdot} (x_1 \underset{B}{+} (-2) \underset{B}{\cdot} x_3)$

e) $(-1) \underset{B}{\cdot} x_2 \underset{B}{+} 2 \underset{B}{\cdot} x_2$

f) $3 \underset{B}{\cdot} (2 \underset{B}{\cdot} x_1 \underset{B}{-} x_2) \underset{B}{+} 2 \underset{B}{\cdot} x_3$

Representar en el plano.

46. En $\mathbb{R}^3$ sea $A = (1,-1,2)$

a) Determinar una base de $\mathbb{R}^2_A$ que contenga a $x_1 = (1,0,-1)$ y $x_2 = (2,-1,1)$

b) ¿Existe una base de $\mathbb{R}^2_A$ que contenga a $y_1 = (2,0,1)$ e $y_2 = (3,1,0)$?

47. Sean M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^3$ tales que $\dim M_1 = s \leqslant t = \dim M_2$. Probar que si $M_1 \parallel M_2$, entonces $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ o $M_1 \subset M_2$.

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)