

# Álgebra Lineal — 2005

## Práctica 12: Espacios vectoriales con producto interno.

1. Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , y sea  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ .

a) Mostrar que existe exactamente un producto interno sobre  $V$  que hace de  $\mathcal{B}$  una base ortonormal.

b) Determinar ese producto interno explícitamente en los siguientes casos:

1)  $V = \mathbb{R}^2, k = \mathbb{R}, \mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, -2)\};$

2)  $V = \mathbb{R}^3, k = \mathbb{R}, \mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\};$

3)  $V = \mathbb{C}^3, k = \mathbb{C}, \mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\};$

4)  $V = \mathbb{C}^4, k = \mathbb{C}, \mathcal{B} = \{(1, 0, 0, i), (0, 1, 0, i), (i, i, i, 0), (0, 2, 0, 0)\};$

5)  $V = \mathbb{R}[X]_3, k = \mathbb{R}, \mathcal{B} = \{x^i\}_{i=0}^3;$

6)  $V = \mathbb{R}[X]_3, k = \mathbb{R}, \mathcal{B} = \{(x-1)^i\}_{i=0}^3.$

2. Determinar para que valores de  $a, b, c \in \mathbb{R}$  la forma bilineal

$$\phi(x, y) = ax_1y_2 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1+b)x_3y_3 + cx_1y_3$$

resulta un producto interno en  $\mathbb{R}^3$ .

3. a) Determinar condiciones sobre una matriz  $B \in M_n(\mathbb{R})$  de manera que  $\langle x, y \rangle = x^t B y$  resulte un producto interno sobre  $\mathbb{R}^n$ .

b) Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno  $\langle -, - \rangle_V$ , y sea  $T : W \rightarrow V$  una transformación lineal. Definamos

$$\langle x, y \rangle_W = \langle Tx, Ty \rangle_V, \quad \forall x, y \in W.$$

Determinar condiciones necesarias y suficientes para que  $\langle -, - \rangle_W$  resulte un producto interno.

4. Hallar los complementos ortogonales de los siguientes subespacios, describiendo bases ortonormales de los mismos:

a)  $V = \mathbb{R}^3, S = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ , con respecto al producto interno usual;

b)  $V = \mathbb{R}^3, S = \langle (1, 2, 1) \rangle$ , con respecto al producto interno dado por

$$\phi(x, y) = x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1;$$

- c)  $V = \mathbb{R}[X]_4$ ,  $S = \langle x^2, x^4 + x^2 + 1 \rangle$ , con respecto al producto interno dado por

$$\phi(p, q) = \int_0^1 pq \, dx;$$

- d)  $V = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset C^\infty(\mathbb{R})$  con  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = e^x$  y  $f_3(x) = x^2$ ,  $S = \langle f_1 + f_2 \rangle$ , y

$$\phi(f, g) = f(0)g(0) + \frac{1}{2}f(1)g(1) + f\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{2}\right);$$

5. Sea  $V = M_n(\mathbb{C})$ , y  $\phi(A, B) = \text{tr } AB^*$ . Mostrar que  $\phi$  es un producto interno sobre  $V$ , y determinar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.
6. a) Sea  $w : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función continua y positiva. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $V = \mathbb{R}[X]_n$ , y definamos

$$\phi(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x) \, dx.$$

Muestre que  $\phi$  es un producto interno sobre  $V$ .

- b) Realice el proceso de Gram-Schmidt a la base  $\{1, X, X^2, X^3\}$  cuando  $n = 3$  y  $w(x) \equiv 1$ .

7. Sea  $p$  la proyección ortogonal de  $V = \mathbb{R}^3$  sobre su subespacio  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : 2x_1 - x_2 = 0\}$  con respecto al producto interno usual.

- a) Encontrar todas las rectas  $L \subset V$  tales que  $p(L) = \{(1, 2, 1)\}$ .
- b) Encontrar una recta  $L_1 \subset V$  tal que  $p(L_1) = L_2$ , si  $L_2 = \{x \in V : 2x_1 - x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$ .

8. Sea  $V = \mathbb{R}^3$  con producto interno determinado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea  $\phi \in V^*$  tal que  $\phi(x) = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3$ . Encontrar  $v \in V$  tal que  $\phi = \langle -, v \rangle$ .

9. Determinar  $f^*$  si

- a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_3)$ ;
- b)  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1 - i)x_2, x_2 + (3 + 2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$ ;

c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que si  $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ , entonces

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

d)  $f : \mathbb{R}[X]_3 \rightarrow \mathbb{R}[X]_2$  tal que  $f(p) = p'$ , con respecto a los productos internos dados por  $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$ ;

e)  $f : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  tal que  $f(A) = PAP^{-1}$ , para una matriz invertible fija  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  y el producto interno  $\langle A, B \rangle = \text{tr } AB^*$  en  $M_n(\mathbb{C})$ .

10. a) Sea  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  tal que en la base canónica es

$$[f] = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar un producto interno en  $\mathbb{R}^3$  para el que  $f$  resulte autoadjunta.

b) ¿Es cierto que para todo endomorfismo  $f \in \text{End}(V)$  de un espacio vectorial real de dimensión finita existe un producto interno  $\langle -, - \rangle$  para el cual  $f^* = f$ ?

11. Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión finita con un producto interno, y  $S \subset V$  un subespacio. Mostrar que la proyección ortogonal de  $V$  en  $S$  es un endomorfismo autoadjunto de  $V$ . Determine sus autovalores. ¿Hay otros proyectores de  $V$  con imagen  $S$  que sean autoadjuntos?

12. a) Encontrar  $P \in O_n(\mathbb{R})$  tal que  $PAP^t$  sea diagonal, si

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Encontrar  $U \in U_n(\mathbb{C})$  tal que  $PAP^*$  sea diagonal, si

$$1) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

13. Sea  $V = M_n(\mathbb{C})$  con producto interno  $\langle A, B \rangle = \text{tr } AB^*$ . Si  $M \in M_n(\mathbb{C})$ , sea  $t_M : A \in V \rightarrow MA \in V$ . Mostrar que  $t_M$  es un endomorfismo unitario sii  $M$  es unitaria.
14. a) Si  $V$  es un espacio vectorial real con un producto interno, es
- $$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2,$$
- cualesquiera sean  $x, y \in V$ .
- b) Si  $V$  es un espacio vectorial complejo con un producto interno, es
- $$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2 + \frac{i}{4}\|x + iy\|^2 + \frac{i}{4}\|x - iy\|^2,$$
- cualesquiera sean  $x, y \in V$ .
- c) Mostrar que la suma de dos productos internos es un producto interno.
15. Sea  $V$  un espacio vectorial complejo de dimensión finita con un producto interno, y sea  $T \in \text{End}(V)$  un endomorfismo autoadjunto. Mostrar:
- a)  $\|v + iTv\| = \|v - iTv\|$ , cualquiera sea  $v \in V$ ;
- b)  $v + iTv = w + iTw$  sii  $v = w$ ;
- c)  $Id + iT$  e  $Id - iT$  son inversibles;
- d)  $U = (Id + iT)(Id - iT)^{-1} \in \text{End}(V)$  es unitario— $U$  se llama la *transformada de Cayley* de  $T$ ;
- e) el endomorfismo  $U$  determina a  $T$ .
16. Sea  $V$  un espacio vectorial complejo de dimensión finita con un producto interno, y sea  $T$  un operador normal, de manera que  $TT^* = T^*T$ .
- a)  $T = T_1 + iT_2$  con  $T_1, T_2 \in \text{End}(V)$  operadores autoadjuntos que conmutan.
- b) Si  $T$  es nilpotente,  $T = 0$ .
- c) Existe  $f \in \mathbb{C}[X]$  tal que  $T^* = f(T)$ .
17. Una matriz real cuadrada simétrica  $A$  posee una raíz cúbica simétrica.



David Hilbert