Álgebra Lineal — 2005

Práctica 10: Más diagonalización.

1. *a*) Mostrar que si $p, q \in k[X]$ son coprimos, $f \in \operatorname{End}(V)$, y $v \in V$ son tales que $p(f)(v) = q(f)(v) = 0$, entonces $v = 0$.

   b) ¿Es cierto que si $p, q \in k[X]$ y $f \in \operatorname{End}(V)$ son tales que $p(f)q(f) = 0$, entonces $p(f) = 0$ ó $q(f) = 0$?

   c) Muestre que existe $p \in k[X]$ tal que hay más de $\deg p$ matrices $A \in M_n(k)$ tales que $p(A) = 0$.

2. Mostrar que si $A, B \in M_n(k)$ son semejantes, entonces $\chi_A = \chi_B$ y que $m_A = m_B$. ¿Vale la recíproca?

3. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrar que el polinomio minimal de A considerada como matrix real coincide con el polinomio minimal de A considerada como matrix compleja.

4. Determinar los polinomios minimal y característico de las siguientes transformaciones lineales:

   a) $f : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_3$ dada por $f(p) = p' + 2p$;

   b) $f : M_n(k) \to M_n(k)$ dada por $f(A) = A^t$;

   c) $f : M_n(k) \to M_n(k)$ dada por $f(A) = BA$ para una matrix $B \in M_n(k)$ fija.

5. Mostrar que si $d : f \in \mathbb{R}[X] \mapsto f' \in \mathbb{R}[X]$ es el endomorfismo de $\mathbb{R}[X]$ dado por la derivación, no existe $p \in \mathbb{R}[R] \setminus 0$ tal que $p(d) = 0$.

6. *a*) Calcular A^{1000} si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, determinar A^{-1}, A^3 y A^{-3}.

7. Mostrar que $f \in \operatorname{End}(V)$ es un isomorfismo sii $\chi_f(0) \neq 0$. En ese caso, determinar a f^{-1} como polinomio en f.

8. Mostrar que un endomorfismo f de un espacio vectorial complejo V de dimensión finita tal que su único autovalor es 0 es nilpotente. ¿Qué sucede en el caso real?

9. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{tr} A = 0$. Mostrar que A es semejante a una matriz B que tiene su diagonal nula.

10. Determinar el polinomio minimal de un proyector $p \in \operatorname{End}(V)$ tal que $\dim \operatorname{im} p = s$.

11. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita.

    a) Si $f \in \operatorname{End}(V)$ es diagonalizable, y $S \subset V$ es un subespacio f-invariante, entonces $f|_S$ es diagonalizable.

    b) Sean $f, g \in \operatorname{End}(V)$ tales que $fg = gf$. Mostrar que si $\lambda \in k$ y $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$, entonces V_λ es g-invariante.

    c) Sean $f, g \in \operatorname{End}(V)$ dos endomorfismos diagonalizables de V tales que $fg = gf$. Entonces son diagonalizables *simultáneamente*, es decir, existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[f]_B$ y $[g]_B$ son simultáneamente diagonales.

    d) Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalizable y con exactamente $\dim V$ autovalores distintos. Mostrar que si $g \in \operatorname{End}(V)$ es tal que $fg = gf$, entonces g es diagonalizable. ¿Qué sucede cuando f posee autovalores con multiplicidad más grande que 1?

12. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Determine todos los endomorfismos $f \in \operatorname{End}(V)$ tales que todo subespacio $S \subset V$ es f-invariante.

13. Un endomorfismo $f \in \operatorname{End}(V)$ de un espacio vectorial es *semisimple* si todo subespacio f-invariante $S \subset V$ admite un complemento en V que es f-invariante.

    a) Muestre que un endomorfismo diagonalizable es semisimple.

    b) Muestre que si k es algebraicamente cerrado, todo endomorfismo semisimple es diaginalizable.

    c) Dé un ejemplo de un endomorfismo semisimple no diagonalizable

14. Mostrar que si k es un cuerpo algebraicamente cerrado, V un espacio vectorial de dimensión finita sobre k y $f \in \operatorname{End}(V)$, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior.

    ¿Es necesaria la hipótesis hecha sobre el cuerpo?

15. Determinar *todas* las matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ tales que $A^2 + \mathbb{I}d = 0$.

16. Mostrar que $\chi_{A^t} = \chi_A$ y que $m_{A^t} = m_A$ cualquiera sea $A \in M_n(k)$.

17. *a*) Dar un ejemplo de un par de matrices A y B tal que $m_{AB} \neq m_{BA}$.

    b) Mostrar que si $f \in k[X]$ y $A, B \in M_n(k)$, entonces $ABf(AB) = Af(BA)B$.

c) Mostrar que si $A, B \in M_n(k)$, entonces $m_{AB} = m_{BA}$ ó $m_{AB} = Xm_{BA}$ ó $m_{BA} = Xm_{AB}$.

d) Mostrar que si $A, B \in M_n(k)$, entonces $\mathbb{Id} - AB$ es inversible sii $\mathbb{Id} - BA$ es inversible.

18. Determine la validez de los siguientes enunciados:

    a) Si A es diagonalizable, A^2 también.

    b) Si A es diagonalizable y $\lambda \in k$, entonces, λA es diagonalizable.

    c) Si A y B son diagonalizables, $A + B$ es diagonalizable.

    d) Si A y B son diagonalizables, AB es diagonalizable.

    e) Si A y B son diagonalizables y $AB = BA$, entonces $A + B$ y AB son diagonalizables.

19. Mostrar que en $M_2(\mathbb{C})$ no hay tres matrices linealmente independientes que conmuten entre sí.

    ¿Puede determinar el tamaño máximo de un conjunto de matrices linealmente independientes que conmutan entre sí en $M_3(\mathbb{C})$?