Álgebra Lineal — 2005

Práctica 9: Autovalores

1. *a*) Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de las siguientes matrices, considerando por separado el caso en que los coeficientes están en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$:

   1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$;

   2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

   3) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$;

   4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

   5) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$;

   6) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$;

   7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$;

   8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

   9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   En todos los casos, $a \in \mathbb{K}$.

   b) Interprete cada una de las matrices del ítem anterior como la matrix de una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente) con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^n$, y encuentre, cuando es posible, una base $\mathcal{B}$ de manera tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ es diagonal; en ese caso, encuentre la matrix de cambio de base $C(\mathcal{E}, \mathcal{B})$.

2. *a*) Sean $A, D \in M_n(k)$ y $C \in \mathrm{GL}_n(k)$ tales que $A = CDC^{-1}$. Mostrar que $A^k = CD^kC^{-1}$ cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$.

   b) Calcular

   $$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^n$$

   para cada $n \in \mathbb{N}$.

   c) El objetivo de esta parte es encontrar una formula cerrada para la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ tal que $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ y, si $n \geq 0$,

   $$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n.$$

   Considere el endomorfismo $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que, en la base canónica, está representado por la matriz

   $$[f] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Muestre que, para cada $n \geq 0$ es

$$f\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Encuentre ahora una base que diagonalice a f cuando esto sea posible, y use la primera parte de este ejercicio y el hecho de que

$$f^n\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

para obtener una fórmula cerrada para a_n en esos casos.

3. *a*) Determinar que matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in k$, $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_5\}$, son diagonalizables.

   b) Mostrar que toda matrix $A \in M_2(\mathbb{C})$ es o bien diagonalizable o bien similar a una matrix de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ para algún $a \in \mathbb{C}$.

4. *a*) Sea $A \in M_2(\mathbb{C})$ tal que todos sus coeficientes son reales y tal que $\left(\begin{smallmatrix} 1+i \\ 2-i \end{smallmatrix}\right)$ es un autovector correspondiente al autovalor $1 + 3i$. Mostrar que A es diagonalizable, encontrar una base de autovectores, y determinar A.

   b) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ es un autovector de autovalor $\sqrt{2}$, y tal que $\chi_A \in \mathbb{Q}[t]$. Determinar si A es diagonalizable. ¿Cuántas matrices satisfacen estas condiciones?.

5. *a*) Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{tr} A = -4$. Calcular los autovalores de A sabiendo que los de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8.

   b) Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $\det A = 6$, tiene a 1 y a -2 como autovalores, y tal que $A - 3$ tiene a -4 como autovalor. Determinar los restantes autovalores de A

6. *a*) Sea $A \in M_n(k)$. Mostrar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Mostrar con un ejemplo que no sucede lo mismo con los autovectores.

   b) ¿Qué puede decir de los autovalores de A^k si conoce los de A?

7. Determinar los autovalores y autovectores de

$$D : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

8. *a*) Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ un proyector de un espacio vectorial de dimensión finita V tal que $\dim \operatorname{im} f = s$. Determinar su polinomio característico, y mostrar que es diagonalizable.

b) Sea $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo nilpotente de índice de nilpotencia l. Determinar su polinomio característico. ¿Cuándo es diagonalizable?

c) Sea $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo de un espacio vectorial real tal que $f^2 + I = 0$. Mostrar que f es un automorfismo y que $\dim V$ es par.

9. Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ de rango 1 es diagonalizable sii $\ker f \cap \operatorname{im} f = 0$.

10. Sean $A \in M_{m,n}(k)$ y $B \in M_{n,m}(k)$. Mostrar que las matrices de bloques

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

de $M_{n+n}(k)$ son semejantes. Concluir que

$$\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$$

11. Sea $A \in M_n(k)$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ las raices de su polinomio característico contadas con multiplicidad. Mostrar que $\operatorname{tr} A = \sum \lambda_i$ y que $\det A = \prod \lambda_i$.