Álgebra Lineal — 2005

Práctica 6: Espacio dual

1. Hallar bases de S° en los siguientes casos:

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1,-1,5), (1,5,0) \rangle$;

   b) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1,-1,1-,1), (1,2,3,4) \rangle$;

   c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, x_1 - 3x_3 = 0\}$;

   d) $V = \mathbb{R}^5$, $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_1 + 2x_2 = 0, x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$;

   e) $V = \mathbb{R}[X]_4$, $S = \{1 + X + X^2, 2 + X^3 + 2X^4, X^3\}$.

2. Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea $W = \{A \in M_2(k) : AB = 0\}$. Determinar W°.

3. Determinar bases de $(S+T)^\circ$ y de $(S \cap T)^\circ$:

   a) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1,-1,2,1), (2,-1,3,1) \rangle$, $T = \langle (3,-2,5,1), (0,1,1,1) \rangle$;

   b) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1,2,1,2), (1,-2,1,-2) \rangle$, $T = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y - 2z + w = 0, x + y + z = 0\}$.

   c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\}$, $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0, 2y - 2z = 0\}$.

4. Si V es un espacio vectorial, y S, T son subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Entonces $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

5. Sea k un cuerpo finito, y V un espacio vectorial de dimensión n sobre k. Sea $0 \leq l \leq n$. Mostrar que V posee tantos subespacios de dimensión l como subespacios de dimensión $n - l$.

6. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión finita. Mostrar que f posee núcleo no trivial sii f^t posee nucleo no trivial.

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $S \subset V$ un subconjunto, y $L : V \to V^{**}$ es isomorfismo canónico. ¿Qué relación hay entre $L(S)$, $S^{\circ\circ}$ y S?

8. Sea X un conjunto y k^X el espacio vectorial de las funciones sobre X con valores en k. Sea $W \subset k^X$ un subespacio de dimensión n. Mostrar que existen puntos $s_1, \ldots, s_n \in S$ y funciones $f_1, \ldots, f_n \in W$ tales que $f_i(s_j) = \delta_{i,j}$.

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^*$. Mostrar que $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es una base de V^* sii

$$\bigcap_{1 \le i \le n} \ker \phi_i = 0.$$

10. Sea V un espacio vectorial, y $f, g \in V^*$. Mostrar que si $fg \in V^*$, entonces $f = 0$ o $g = 0$.