Álgebra Lineal — 2005

Práctica V: Cambios de base. Matrices.

1. En cada caso, encontrar las coordenadas de v en términos de la base $\mathcal{B}$ dada para cada uno de los siguientes espacios vectoriales.

   a) $V = k^3, v = (1,2,3), \mathcal{B} = \{(1,2,1),(1,-2,1),(0,3,0)\}$.

   b) $V = k[X]_3, v = X^3 - X^2 + 1, \mathcal{B} = \{(X-1)^i : i = 0,\dots,3\}$.

   c) $V = M_4(k), v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\}$.

2. *a*) Sean $A, B \in M_n(k)$ tales que $Av = Bv$ cualquiera sea $v \in k^n$. Mostrar que $A = B$.

   b) Sea V un espacio vectorial sobre k de dimensión finita, y sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ tres bases de V. Mostrar que
   $$C(\mathcal{B},\mathcal{B}'') = C(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')C(\mathcal{B},\mathcal{B}').$$

   c) Deducir del item anterior que $C(\mathcal{B},\mathcal{B}') = C(\mathcal{B}',\mathcal{B})^{-1}$.

3. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base d4 k^3. Encontrar bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ tales que sea $C(\mathcal{B},\mathcal{B}') = C(\mathcal{B}'', B) = M$.

4. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales $f : V \to W$ y pares de bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de V y W, respectivamente, determine $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

   a) $V = W = k^3, f(x_1,x_2,x_3) = (2x_3 + 3x_1, 2x_1 + x_2, x_3 - x_2), \mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canónica de k^3.

   b) $V = W = k^3, f(x_1,x_2,x_3) = (2x_3 + 3x_1, 2x_1 + x_2, x_3 - x_2)$, $\mathcal{B}$ la base canónica y $\mathcal{B}' = \{(1,2,3),(2,3,4),(3,0,1)\}$. base canónica de k^3.

   c) $V = k[X]_n, f(p) = p', \mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{x^i : i = 0,\dots,n\}$.

   d) $V = k[X]_n, f(p) = p', \mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{(x-\lambda)^i : i = 0,\dots,n\}$, con $l \in k$.

   e) $V = k[X]_n, f(p) = \int_0^X p(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{x^i : i = 0,\dots,n\}$.

   f) $V = M_3(k), f(A) = A^t, \mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canónica de $M_3(k)$.

5. Sea $\mathcal{B} = \{v_i : i = 1,\dots,3\}$ una base de k^3, $\mathcal{B}'\{w_i : i = 1,\dots,4\}$ una base de k^4, y sea $f : k^3 \to k^4$ la transformación lineal tal que
   $$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Determine $f(v_1 + 2v_2 + 3v_3)$ en término de sus coordenadas en la base $\mathcal{B}'$.

b) Describa $\ker f$ y $\operatorname{im} f$.

c) Describa $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

6. Recordemos que si $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$, la traza de A es $\operatorname{tr} A = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$. Sea V un espacio vectorial sobre k y $f \in \operatorname{End}(V)$, y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de V. Mostrar que

$$\operatorname{tr}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \operatorname{tr}[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$$

de manera que tiene sentido definir la traza de f como

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}},$$

ya que esta definición no depende de $\mathcal{B}$.

7. **Bases adaptadas**

a) Sea V un espacio vectorial sobre k de dimensión n finita, y sea $f \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo de V tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Muestre que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que

$$([f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) Sea V un espacio vectorial sobre k de dimensión n finita, y sea $p \in \operatorname{End}(V)$ un proyector. Muestre que existe una base $\mathcal{B}$ de V y un entero d con $0 \leq d \leq n$ tal que

$$([p]_{\mathcal{B},\mathcal{B}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) Sean V y W espacio vectorial sobre k de dimensiones n y m finitas respectivamente, y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Muestre que existe una base $\mathcal{B}$ de V, una base $\mathcal{B}'$ de W, y un entero no negativo s tal que

$$([f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8. Sean $A, B \in M_n(k)$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Existe $C \in GL_n(k)$ tal que $A = CBC^{-1}$.

b) Data una base $\mathcal{B}$ de k^n, existe una transformación lineal $f : k^n \to k^n$ y una base $\mathcal{B}'$ tales que $[f]_{\mathcal{B}} = A$ y $[f]_{\mathcal{B}'} = B$.