Álgebra Lineal — 2005

Práctica III: Bases y dimensión. Transformaciones lineales.

1. Determinar si las siguiente afirmaciones son válidas:

   a) $\langle u, v\rangle = \langle u, v'\rangle \Rightarrow v = v'$, con $u, v, v' \in V$

   b) $S + T = S + T' \Rightarrow T = T'$, con $S, T, T' \subset V$ subespacios.

   c) $S + T = S + T' \Rightarrow \dim T = \dim T'$, con $S, T, T' \subset V$ subespacios.

2. Sea $V \subset \mathbb{R}$ el $\mathbb{Q}$-subespacio vectorial generado por $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$.

   a) Mostrar que existe $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$ y $\deg f \leq 4$. Determinar un tal f explícitamente.

   b) Determinar $\dim V$.

   c) Determine el menor grado de un polinomio no nulo con coeficientes racionales que se anula en $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

3. Sea $A \in M_n(k)$ una matriz. Muestre que $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n^2-1}\}$ no es un subconjunto linealmente independiente de $M_n(k)$.

4. Sea $V = \{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \forall n \geq 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$.

   a) Determine una base de V formada por sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ de la forma $a_n = \alpha^n$ para algún $\alpha \geq 0$. forma

   b) Encuentre una fórmula cerrada para la sucesión $(F_n)_{n\geq 0} \in V$ de Fibonacci, caracteriza por $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$.

5. Sea V un espacio vectorial, $S, T, U \subset V$ subespacios, y supongamos que

   $$S \cap T = S \cap U, \qquad S + T = S + U, \quad \text{y} \quad T \subset U.$$

   Muestre que $T = U$. ¿La conclusión puede alcanzarse si se elimina alguna de las tres hipótesis?

6. Sean S, T, U subespacios de un espacio vectorial V.

   a) Muestre que

   $$S \cap T + S \cap U \subset S \cap (T + U).$$

   b) De un ejemplo que muestre que en general no vale la igualdad.

Transformaciones lineales

7. *a*) Encuentre un ejemplo de un espacio vectorial V y una aplicación $f : V \to V$ tal que sea $f(v+w) = f(v) + f(w)$ para todo par de vectores $v, w \in V$, pero que no sea lineal.

   b) Encuentre un ejemplo de un espacio vectorial V y una aplicación $g : V \to V$ tal que $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ para todo $\lambda \in k$, $v \in V$ pero que no sea lineal.

8. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

   a) $\operatorname{tr} : M_n(k) \to k$.

   b) $L_A : B \in M_{n,m}(k) \mapsto AB \in M_{p,m}(k)$, para cada $A \in M_{p,n}(k)$.

   c) $\frac{d}{dx} : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

   d) $\operatorname{ev}_a : p \in k[X] \mapsto p(a) \in k$, con $a \in k$.

   e) $t : z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.

   f) $\Im : z \in \mathbb{C} \mapsto \Im z \in \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.

   g) $I : f \in C_{\mathbb{R}}([0,1]) \mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$.

   h) $L : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \to C_{\mathbb{R}}([0,1])$ con $Lf(x) = \int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

9. Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ transformaciones lineales. Muestre que

   a) $\ker f \subset \ker g \circ f$.

   b) $\ker f = \ker g \circ f$ si $\ker f \cap \ker g = 0$.

   c) $\operatorname{im} g \supset \operatorname{im} g \circ f$.

   d) $\operatorname{im} g = \operatorname{im} g \circ f$ si $\operatorname{im} f = V$.

10. Sean $\alpha_i, \beta_i \in k$ para $i = 0, \dots n$. Muestre que existe exactamente un polinomio $p \in \mathbb{R}[X]$ de grado n tal que $p(\alpha_i) = \beta_i$ si $0 \leq i \leq n$. Para ello considere la aplicación

$$p \in \mathbb{R}[X]_n \mapsto \begin{pmatrix} p(\alpha_0) \\ \vdots \\ p(\alpha_n) \end{pmatrix} \in k^{n+1}.$$

11. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V. Muestre que

   a) $\dim \ker f \cap \operatorname{im} f = \dim \operatorname{im} f - \dim \operatorname{im} f^2$.

   b) $\ker f \subset \operatorname{im} f$ sii $\dim \ker f = \dim \operatorname{im} f - \dim \operatorname{im} f^2$.

   c) $\operatorname{im} f \subset \ker f$ sii $f^2 = 0$..

   d) $\operatorname{im} f = \ker f$ sii $f^2 = 0$ y $\dim \operatorname{im} f = \dim \ker f$.

12. ¿Qué sucesiónes $(d_k)_{k\geq 1}$ se pueden obtener a partir de un endomorfismo $f : V \to V$ de un espacio vectorial de dimensión n poniendo $d_k = \dim\ker f^k$?

13. Si $f, g : V \to V$ son endomorfismos,

$$\dim \operatorname{im} f \circ g \leq \text{mín}\{\dim \operatorname{im} f, \dim \operatorname{im} g\}.$$

¿Hay un enunciado similar para las dimensiones de los núcleos?

14. Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ transformaciones lineales.

    a) Si $g \circ f$ es un monomorfismo, f es un monomorfismo.

    b) Si $g \circ f$ es un epimorfismo, g es un epimorfismo.

Morfismos nilpotentes

15. *a*) Un endomorfismo $f : V \to V$ es nilpotente sii $f^n = 0$ con $n = \dim V$.

    b) Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Construya, para cada $1 \leq k < n$, endomorfismos $f_k : V \to V$ de manera que $f^k = 0$ pero $f^{k-1} \neq 0$.

    c) Muestre que si $f, g : V \to V$ son endomorfismos nilpotentes son tales que $f \circ g = g \circ f$, entonces $f + g$ y $f \circ g$ son nilpotentes. ¿Es necesaria la hipótesis?

16. Sea V un espacio vectorial sobre k de dimensión $n \geq 1$, y sea $f : V \to V$ un endomorfismo nilpotente de V de índice de nilpotencia n, de manera que es $f^n = 0$ pero $f^{n-1} \neq 0$. Muestre que existe una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $f(v_i) = f(v_{i+1})$ si $0 \leq i < n$, y $f(v_n) = 0$.

17. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo nilpotente de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

    a) Sea $t \in k$ y $\exp tf : V \to V$ el endomorfismo

    $$\exp tf = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k f^k}{n!}.$$

    Observe que esta definición tiene sentido porque la suma es finita.

    1) $\exp tf$ es un automofismo de V y $(\exp tf)^{-1} = \exp(-t)f$.
    2) $\exp(t+s)f = \exp tf \cdot \exp sf$.

    b) Sea $g = \sum_{k\geq 0} f^k$. Muestre que g y $1 - f$ son automorfismos inversos de V.

Cuerpos finitos

Sea k un cuerpo finito de q elementos.

18. Determine el número de bases que posee k^n.

19. Determine el número $(n)_q!$ de automorfismos que posee k^n.

20. Determine el número $\binom{n}{l}_q$ de subespacios que posee k^n de dimensión l para cada $0 \leq l \leq n$.

21. *a*) Muestre que

$$\binom{n}{l-1}_q + q^l \binom{n}{l}_q = \binom{n+1}{l}_q.$$

    b) Muestre que

$$\binom{n}{l}_q = \frac{(n)_q!}{(l)_q!(n-l)_q!}.$$

22. Determine el número de morfismos $k^n \to k^m$. ¿Cuántos de éstos son monomorfismos? ¿Cuántos epimorfismos?