Álgebra Lineal — 2005

Práctica III: Dependencia lineal y bases

1. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o no. En caso no serlo, determine que elementos pueden eliminarse de manera que el conjunto residual sea linealmente independientes y genere el mismo subespacio que el conjunto original. Finalmente, complete cada conjunto a una base del espacio ambiente.

   a) $\{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

   b) $\{(1,0,-1),(1,1,2),(0,1,1)\}$ en $\mathbb{C}^3$.

   c) $\{(1,1,2),(1,4,3),(3,3,3),(e,\pi,\sqrt{2})\}$ en $\mathbb{R}^3$.

   d) $\{(1,1,1),(1,\alpha,\alpha^2),(1,\beta,\beta^2)\}$ en $\mathbb{R}^3$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

   e) $\{(1,1,1,1),(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3),(1,\beta,\beta^2,\beta^3)\}$ en $\mathbb{R}^4$ con $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

   f) $\{(\frac{1}{2}(X-1)(X-2),(X-1)(X-3),(X-2)(X-3)\}$ en $\mathbb{R}[X]_2$.

   g) $\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\1&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\}$ en $M_4(\mathbb{C})$.

2. Determinar todos los $\lambda\in k$ de manera que los siguientes conjuntos resulten linealmente independientes:

   a) $\{(1,2,k),(1,1,1),(0,1,1-k)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

   b) $\{kX^2+X,-X^2+k,k^2X\}$ en $\mathbb{R}[X]_4$.

   c) $\{\begin{pmatrix}1&k\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}k&1\\0&2k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\}$ en $M_4(\mathbb{C})$.

3. Encuentre bases para los siguientes espacios vectoriales

   a) $V=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}):A=A^t\}$ sobre $\mathbb{R}$.

   b) $V=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{C}):A=\bar{A}^t\}$ sobre $\mathbb{R}$.

   c) $V=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{C}):\operatorname{tr}A=0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

   d) $V=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}:\forall n\in\mathbb{N}_0, a_{n+1}=2a_n\}$ sobre $\mathbb{R}$.

   e) $V=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}:\forall n\in\mathbb{N}_0, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\}$ sobre $\mathbb{R}$.

   f) $V=\{p\in\mathbb{R}[X]_n:p(0)=p(1)=0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

   g) $V=\{p\in\mathbb{R}[X]_n:p(0)=p'(1)=0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

4. Sea $v_i=(a_{i1},\dots,a_{in})\in\mathbb{R}^n$ si $1\le i\le n$, y supongamos que $a_{ij}\le 0$ si $i\neq j$, y que $\sum_{j=1}^n a_{ij}>0$. Mostrar que $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

5. Sea $F = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}[X]$ tal que $\deg f_i = i$ si $i \in \mathbb{N}_0$. Mostrar que F es una base de $\mathbb{R}[X]$.

6. Sea $\alpha_i \in k$ para $1 \leq i \leq n$, y sea

$$v_i = (1, \alpha_i, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^{n-1}) \in k^n.$$

Determinar cuando $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente en k^n.

7. Sea V un espacio vectorial sobre k.

   a) $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente sii el conjunto $\{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

   b) Si $\lambda \in k \setminus \{0\}$, $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente sii el conjunto $\{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

   c) Si $\lambda \in k$, $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente sii el conjunto $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\}$