Álgebra Lineal — 2005

Práctica II: Más generalidades

1. *a*) Encontrar un sistema de generadores de
$$S = \langle (1,-1,2,1),(3,1,0,-1),(1,1,-1,-1)\rangle \subset \mathbb{R}^4.$$
   b) ¿$(2,1,3,5)$ está en S?
   c) ¿Es $S \subset \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$?
   d) ¿Es $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subset S$?

2. Determine dos sistemas de generadores para cada uno de los siquientes espacios vectoriales:
   a) k^n sobre k;
   b) $k[X]_n = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \leq n\}$ sobre k;
   c) $k[X]$ sobre k;
   d) $\mathbb{C}^n$, con $k = \mathbb{R}$;
   e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x - y = 0\}$, con $k = \mathbb{R}$;
   f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x - y = 0\}$, con k arbitrario;
   g) $\{f \in k[X]_4 : f(1) = 0, f(2) = f(3)\}$, con $k = \mathbb{Q}$;
   h) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''' = 0\}$, con $k = \mathbb{R}$.

3. Sea X un conjunto no vacío.
   a) Si X es finito, determine un sistema de generadores para k^X.
   b) Sea
$$k_0^X = \{f \in k^X : \text{existe } Y \subset X \text{ finito tal que } f|_{X\setminus Y} \text{ es constante}\},$$
   el conjunto de las funciones sobre X que son constantes fuera de un conjunto finito.
   Encuentre un sistema de generadores para k_0^X.
   *c) ¿Puede encontrar un sistema de generadores para $k^{\mathbb{N}}$?
   c) Si X es finito, y V es un k-espacio vectorial, determine un sistema de generadores para V^X.

4. Mostrar que los siguientes conjuntos no son sub-$\mathbb{R}$-espacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.
   a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$.

5. Sea $V = \mathbb{R}^+$, y consideremos la operación $+$ definida sobre V por

$$+ : (u,v) \in V \times V \mapsto uv \in V,$$

donde uv es el *producto* usual calculado en $\mathbb{R}^+$, y la acción de $\mathbb{R}$ sobre V dada por

$$\cdot : (\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V \mapsto v^\lambda \in V.$$

Muestre que $(V, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Algunos ejemplos que involucran otros cuerpos

6. Suponga que k es un cuerpo y que $l \subset k$ es un subcuerpo de k. Muestre que k es, de manera natural, un l-espacio vectorial.

7. *a*) Sea k un cuerpo, y sea $k(X)$ el conjunto de todas las funciones racionales en la variable X, es decir, de todas las expresiones de la forma p/q con p, $q \in k[X]$ dos polinomios, y $q \neq 0$. Muestre que $k(X)$ es resulta ser un cuerpo con respecto a las operaciones 'apropiadas'.

   b) Sea $L \subset k(X)$ el subconjunto de las funciones racionales en X que son pares, es decir, de los cocientes p/q con p, $q \in k[X]$ con $q \neq 0$ y

$$\frac{p(-X)}{q(-X)} = \frac{p(X)}{q(X)}.$$

   Muestre que L es un subcuerpo de $k(X)$.

   c) Encuentre generadores para $k(X)$ considerado como espacio vectorial sobre L.

8. Sea $d \in \mathbb{Z}$, y sea $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Observe que este conjunto no depende de cuál de las dos raices de d es utilizada a la derecha. Muestre que $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$.

9. Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos una relación entre elementos de $\mathbb{Z}$ poniendo

$$a \equiv b \quad \text{sii} \quad n | b - a.$$

   a) Verifique que se trata de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

   b) Escribamos $\mathbb{Z}_n$ al conjunto de clases de equivalencia de $\equiv$ en $\mathbb{Z}$. Si $a \in \mathbb{Z}$, escribimos $[a]$ a la clase de equivalencia de a. Consideremos la operación

$$+ : ([a],[b]) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \mapsto [a] + [b] := [a + b] \in \mathbb{Z}_n.$$

   Muestre que está bien definida y que $(\mathbb{Z}_n, +)$ es un grupo abeliano.

c) Definamos ahora un producto en $\mathbb{Z}_n$ poniendo

$$\cdot : ([a],[b]) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \mapsto [a] \cdot [b] := [ab] \in \mathbb{Z}_n.$$

Muestre que está bien definido y que $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ es un anillo.

d) Muestre que si n es un número primo, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ es un *cuerpo*.

e) Determine todos los valores de n para los cuales $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ es un cuerpo.

10. Determine *todos* los cuerpos con 2, 3, 4 y 5 elementos. ¿Hay algún cuerpo con 6 elementos?

11. Encuentre todos los subespacios vectoriales de los $\mathbb{Z}_p$-espacios vectoriales $\mathbb{Z}_p^2$ y $\mathbb{Z}_p^3$ para $p \in \{2, 3\}$.