Álgebra Lineal — 2005
Práctica I: Generalidades

1. Sea V un espacio vectorial sobre k. Mostrar las siguientes afirmaciones:
   a) $0v = 0, \forall v \in V$;
   b) $\lambda 0 = 0, \forall \lambda \in k$;
   c) $(-1)v = v, \forall v \in V$;
   d) $-(-v) = v, \forall v \in V$;
   e) $\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = 0$;
   f) $-0 = 0$.

2. *a*) Sea X un conjunto no vacío. Sea $k^X = \{f : X \to k\}$ el conjunto de todas las funciones de X a k. Mostrar que las operaciones

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
   $$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

   hacen de k^X un espacio vectorial sobre k.
   Decimos que estas operaciones están definidas *punto a punto*.

   b) ¿Bajo que condiciones es k^X de dimensión finita? Cuando se cumplen, encuentre una base.

3. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un abierto no vacío. Muestre que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.
   a) $C^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es infinitamente diferenciable$\}$;
   b) $\mathbb{R}^X$;
   c) $C^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es continua$\}$;
   d) $L = \{f \in C^1(X) : \forall x \in X, f'(x) = f(x)\}$;
   e) $C^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es derivable$\}$;
   f) $V(x_0) = \{f \in C^1(X) : \forall x \in X, f(x_0) + 3f'(x_0)\}$ para $x_0 \in X$.

   Determine todas las inclusiones entre estos espacios.

4. Sea X un conjunto no vacío, V un espacio vectorial sobre k y sea $V^X = \{f : X \to V\}$, el conjunto de todas las funciones de X en V.
   a) Mostrar que es posible definir sobre V^X operaciones de suma y de producto por elementos de k de forma natural, de manera de que V^X resulte, con respecto a esas operaciones, un espacio vectorial sobre k.

b) Si $Y \subset X$ es un subconjunto no vacío, ¿puede verse a V^Y como supespacio de V^X?

c) Si $W \subset V$ es un subespacio vectorial, ¿puede verse a W^X como subespacio de V^X?

5. Sea $A \in M_{n,m}(k)$ una matrix $n \times m$ con coeficientes en k, y sea $S = \{x \in k^m : Ax = 0\}$ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo asociado a A.

   Muestre que S es un subespacio vectorial de k^m.

6. Sean S y T subespacios de un k-espacio vectorial V.

   a) $S \cap T$ es un subespacio de V.

   b) Si $S \cup T$ es un subespacio de V entonces $S \subset T$ ó $T \subset S$.

7. Decidir cuales de los siguientes subconjuntos S son sub-k-espacios de V

   a) $S = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (1,1,1),\ \text{con}\ a, b \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$, $k = \mathbb{R}$;

   b) $S = \{ai : a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $k = \mathbb{R}$;

   c) $S = \{ai : a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $k = \mathbb{C}$;

   d) $S = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \geq 2\}$, $V = k[X]$;

   e) $S = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \leq 5\}$, $V = k[X]$;

   f) $S = \{M \in M_{4,4}(k) : M^t = M\}$, $V = M_{4,4}(k)$;

   g) $S = \{M \in M_{4,4}(k) : \operatorname{tr} M = 0\}$, $V = M_{4,4}(k)$;

   h) $S = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''(1) = f(2)\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $k = \mathbb{R}$.