Álgebra Lineal — 2005
Segundo Parcial: Soluciones

Ejercicio I

Sea V un espacio vectorial de dimensión n.

a) Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo diagonalizable que posee un vector cíclico. Entonces todos los autovalores de f son simples.

b) Si $f \in \operatorname{End}(V)$ es un endomorfismo con n autovalores distintos, y si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de autovectores, entonces $v_1 + \cdots + v_n$ es un vector f-cíclico.

a) Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalizable, y sea $v \in V$ un vector f-cíclico, de manera que es $\langle v \rangle_f = V$, y, en particular, $\operatorname{gr} m_{f,v} = \dim V$. Sabemos que $m_{f,v} | \chi_f$ y que $m_f | \chi_f$, así que mirando los grados, vemos que $m_f = \chi_f$. Esto nos dice que, cualquiera sea $\lambda \in k$, el bloque más grande correspondiente a λ en la forma normal de Jordan de f tiene tamaño igual a la multiplicidad de λ. Como f es diagonalizable por hipótesis, todos los bloques en la forma de Jordan tienen tamaño 1, y vemos que todos los autovalores son simples, como queríamos. □

a) Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalizable. Si para cada $\lambda \in k$ ponemos $V_\lambda = \ker(f - \lambda Id)$, es $V = \bigoplus_{\lambda \in k} V_l$. Para cada $\lambda \in k$ sea $p_\lambda \in \operatorname{End}(V)$ el proyector sobre V_λ correspondiente a esta descomosición en suma directa, de manera que es $p_\lambda | V_\lambda = Id_{V_\lambda}$ y $p_\lambda |_{\bigoplus_{\mu \in k \setminus \{\lambda\}} V_\mu} = 0$. Sabemos que p_λ conmuta con f ya que, de hecho, puede escribirse como un polinomio en f.

Sea $v \in V$ es un vector f-cíclico, de manera que $\langle v \rangle_f = V$. Sea $\lambda \in k$. Entonces es

$$\begin{aligned} V_\lambda &= p_\lambda(V) = p_\lambda(\langle \{f^k v\}_{k \geq 0} \rangle) = \langle \{p_\lambda f^k v\}_{k \geq 0} \rangle = \langle \{f^k p_\lambda v\}_{k \geq 0} \rangle \\ &= \langle p_\lambda v \rangle_f. \end{aligned}$$

Ahora bien, como por supuesto es $p_\lambda v \in V_\lambda$, es $f^k p_l v = \lambda^k p_\lambda v$ cualquiera sea $k \geq 0$, y vemos que

$$V_\lambda = \langle p_l v \rangle_f = \langle \{\lambda^k p_\lambda v\}_{k \geq 0} \rangle = \langle p_\lambda v \rangle.$$

En particular, $\dim V_\lambda \leq 1$, y todos los autovalores son simples. □

a) Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ un operador diagonalizable, y sea $\mathcal{B} = \{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una base de V de autovectores para f, de manera que, si $1 \leq i \leq n$, existe $\lambda_i \in k$ tal que $fv = \lambda_i v$.

Sea $v \in V$ un vector f-cíclico, de manera que $\langle v \rangle_f = V$ y de hecho $\mathcal{B}' = \{f^k v\}_{0 \le k < n}$ es una base de V. Como $\mathcal{B}$ es una base de V, existen coeficientes $\alpha_i \in k$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tales que $v = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i v_i$. Claramente es $f^k v = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \lambda^k v_i$.

La matriz de cambio de base $C_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ es entonces $(\alpha_i \lambda^k)_{i,k}$, y tiene determinante

$$\begin{aligned} 0 \neq \det C_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} &= \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1\lambda_1 & \alpha_2\lambda_2 & \dots & \alpha_n\lambda_n \\ \alpha_1\lambda_1^2 & \alpha_2\lambda_2^2 & \dots & \alpha_n\lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1\lambda_1^{n-1} & \alpha_2\lambda_2^{n-1} & \dots & \alpha_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \prod_{1 \le i \le n} \alpha_i \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j) \end{aligned}$$

En particular, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, y todos los autovalores de f son simples. □

a) Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalizable y supongamos que $v \in V$ es un vector f-cíclico, de manera que en particular $\mathcal{B} = \{f^k v\}_{0 \le i < n}$ es una base de V y $\operatorname{gr} m_{f,v} = \dim V$.

Sea $\lambda \in k$ y sea $w \in V \setminus 0$ un autovector de f de autovalor λ. Como $\mathcal{B}$ es una base de V, existen coeficientes $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in k$ tales que $w = \sum_{0 \le k < n} \alpha_k f^k v$. Sea $p = \sum_{0 \le k < n} \alpha_i X^k \in k[X]$; claramente, $p \neq 0$, $\operatorname{gr} p < n$ y $w = p(f)v$.

Ahora bien, como w es un autovector, tenemos que

$$\lambda p(f)v = \lambda w = fw = fp(f)v,$$

de manera que es $(f - \lambda Id)p(f)v = 0$ y vemos que $m_{f,v} | (X - \lambda)p(X)$. Como ambos polinomios tiene el mismo grado, existe $r \in k \setminus 0$ tal que

$$p = r \frac{m_{f,v}}{X - \lambda}.$$

En particular, si llamamos $p_0 = m_{f,v}/(X - \lambda) \in k[X]$ y $w_0 = p_0(f)v$, vemos que $w \in \langle w_0 \rangle$.

Luego $\langle w_0 \rangle$ contiene todos los autovectores de f correspondientes al autovalor λ, y, como tiene dimensión a lo sumo 1, λ tiene multiplicidad a lo sumo 1 como autovalor. □

a) Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ arbitrario, y supongamos que existe $v \in V$ f-cíclico. Consideremos el subespacio $C_f = \{g \in \operatorname{End}(V) : gf = fg\}$ de $\operatorname{End}(V)$, y definamos $\phi : g \in V_f \mapsto fv \in V$; es claro que se trata de una aplicación lineal. Afirmo que se trata de un isomorfismo.

Verifiquemos esta afirmación. Se trata de un monomorfismo: si $g \in C_f$ es tal que $\phi(g) = gv = 0$, entonces cualquiera sea $k \ge 0$ es $gf^k v = f^k gv = 0$, y como $V = \langle \{f^k v\}_{0 \le k < n} \rangle$, vemos que $g = 0$. Sea, por otro lado,$w \in V$.

Existe un elemento $g \in \operatorname{End}(V)$ tal que $gf^k v = f^k w$ si $0 \leq k < n$, porque $\mathcal{B} = \{f^k v\}_{0 \leq k < n}$ es una base de V. Más aun, $fg = gf$: para verlo, basta verificarlo sobre los elementos de $\mathcal{B}$, y sobre ellos es inmediato. Luego $g \in C_f$. Como claramente $\phi(g) = gv = w$, $w \in \operatorname{im} \phi$, como queríamos ver.

Como ϕ es un isomorfismo, $\dim C_f = \dim V$. El ejercicio sigue ahora del siguiente lema:

Lema. Supongamos que $f \in \operatorname{End}(V)$ es diagonalizable. Entonces f tiene autovalores simples sii $\dim C_f = \dim V$.

Demostración. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$ los autovalores distintos de f. Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, sea $V_i = \ker(f - \lambda_i Id)$. Por hipótesis, es

$$V = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} V_i. \tag{1}$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, sea $q_i : V_i \to V$ la inclusión, y sea $p_i : V \to V_i$ la proyección sobre V_i correspondiente a la descomposición (1). Es claro que

$$fq_i = \lambda_i q_i : V_i \to V \tag{2}$$

y que

$$p_i f = \lambda_i p_i : V \to V_i. \tag{3}$$

Sea $\pi : \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \operatorname{End}(V_i) \to \operatorname{End}(V)$ definida de la siguiente manera: si $g = (g_1, \ldots, g_r) \in \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \operatorname{End}(V_i)$, ponemos

$$\pi(g) = \sum_{1 \leq i \leq r} q_i g_i p_i \in \operatorname{End}(V)$$

Se trata claramente de una aplicación lineal. Notemos que $\operatorname{im} \pi \subset C_f$: en efecto, si $g = (g_1, \ldots, g_r) \in \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \operatorname{End}(V_i)$,

$$f \circ \pi(g) = f \circ \left(\sum_{1 \leq i \leq r} q_i g_i p_i \right) = \sum_{1 \leq i \leq r} f q_i g_i p_i = \sum_{1 \leq i \leq r} \lambda_i q_i g_i p_i$$

en vista de (2), mientras que

$$\pi(g) \circ f = \left(\sum_{1 \leq i \leq r} q_i g_i p_i \right) \circ f = \sum_{1 \leq i \leq r} q_i g_i p_i f = \sum_{1 \leq i \leq r} \lambda_i q_i g_i p_i$$

en vista de (3), de manera que $f \circ \pi(g) = \pi(g) \circ f$.

La aplicación π es un monomorfismo. En efecto, supongamos que $g = (g_1, \ldots, g_r) \in \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \operatorname{End}(V_i)$ es tal que $\pi(g) = 0$. Si $1 \leq l \leq r$ y $v \in V_l$, es

$$0 = \pi(g)v = \sum_{1 \leq i \leq r} q_i g_i p_i v = q_l g_l v,$$

y esto muestra que $g_l = 0$ en $\operatorname{End}(V_l)$ porque q_l es inyectiva. Así, $g = 0$, como queríamos.

Como π es un monomorfismo, vemos que

$$\dim C_F \geq \dim \bigoplus_{1\leq i\leq r} \operatorname{End}(V_i) = \sum_{1\leq i\leq r} \dim \operatorname{End}(V_i) = \sum_{1\leq i\leq r} (\dim V_i)^2$$

Si ponemos $m_i = \dim V_i$, entonces, tenememos que

$$\sum_{1\leq i\leq r} m_i = \dim V \qquad \text{y} \qquad \sum_{1\leq i\leq r} m_i^2 \leq \dim C_f.$$

Como $m_i \geq 1$ cualquiera sea i, vemos que $\dim C_f = \dim V$ sii $m_i = 1$ para todo i, y esto es precisamente el enunciado del lema. □

Ejercicio II

Sea $k = \mathbb{C}$.

a) *Sea $N \in M_n(k)$ una matriz nilpotente de índice máximo, de manera que $N^n = 0$ y $N^{n-1} \neq 0$. Muestre que N y N^t son semejantes.*

b) *Muestre que toda matriz en $M_n(k)$ es semejante a su transpuesta.*

Ejercicio III

En un espacio con producto interno, y $p \in \operatorname{End}(V)$ un proyector. Son equivalentes:

a) *p es ortogonal;*

b) *$p = p^*$;*

c) *p es normal;*

d) *$\|p(v)\| \leq \|v\|$ para todo $v \in V$.*

Es claro que los autovalores de p están en $\{0, 1\}$, y que p^* es un proyector.

$(a) \Rightarrow (b)$: Si $u = u' + u'', v = v' + v'' \in V$ con $u', v' \in \operatorname{im} p$ y $u'', v'' \in \ker p$, es

$$\begin{aligned}\langle pu, v\rangle - \langle u, pv\rangle &= \langle pu' + pu'', v' + v''\rangle - \langle u' + u'', pv' + pv''\rangle \\ &= \langle u', v'\rangle - \langle u', v'\rangle = 0\end{aligned}$$

de manera que $p^* = p$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Como $\ker p^* = (\operatorname{im} p)^\perp = \ker p = (\operatorname{im} p^*)^\perp$, p^* es ortogonal, e $\operatorname{im} p^* = \operatorname{im} p$. Luego $p = p^*$.

$(a) \Rightarrow (d)$: So $v \in V$, es $v = pv + (v - pv)$, con $\langle pv, v - pv\rangle = 0$ ya que $pv \in \operatorname{im} p$ y $v - pv \in \ker p$. Luego $\|v\|^2 = \|pv\|^2 + \|v - pv\|^2 \geq \|pv\|^2$, y, por supuesto, $\|v\| \geq \|pv\|$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Si $u \in \operatorname{im} p$ y $v \in \ker p$, es $\langle u, v\rangle = \langle pu, v\rangle = \langle u, pv\rangle = \langle u, 0\rangle = 0$. Esto muestra que $\operatorname{im} p \perp \ker p$, y que, entonces, p es ortogonal.

$(b) \Rightarrow (c)$: Si $p = p^*$, $pp* = pp = p^*p$.

$(b) \Rightarrow (d)$: Si $u \in V$ es tal que $pu = 0$, entonces es claro que $\|pv\| \leq \|v\|$. Supongamos entonces que $pu \neq 0$. En ese caso,

$$\|pu\|^2 = |\langle pu, pu\rangle| = |\langle pu, u\rangle| \leq \|pu\|\|u\|,$$

y, dividiendo esta desigualdad por $\|pu\|$, vemos que $\|pu\| \leq \|u\|$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Como p y p^* conmutan, todo subespacio p-invariante es también p^*-invariante; en particular, $p^*(\operatorname{im} p) \subset \operatorname{im} p$. Ahora, si $s \in \operatorname{im} p$, es $\langle s - p^*s, s\rangle = \langle p(s - p^*s), s\rangle = \langle s - p^*s, p^*s\rangle$, así que, restando, vemos que $\langle s - p^*s, s - p^*s\rangle = 0$, o, lo que es lo mismo, que $s = p^*s$.

$(c) \Rightarrow (b)$: Como p es normal, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que $[p]_\mathcal{B}$ es diagonal. Como los autovalores de p son reales, $[p]_\mathcal{B}$ es real, y entonces, $[p^*]_\mathcal{B} = \overline{[p]_\mathcal{B}}^t = [p]_\mathcal{B}$, de manera que $p = p^*$.

$(c) \Rightarrow (d)$: Si p es normal, $q = pp^*$ es un proyector; en efecto, $q^2 = pp^*pp* = p^2p^{*2} = pp^* = q$. Más aún, q es claramente autoadjunto. Como $(b) \Rightarrow (d)$, si $v \in V$, es

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &\geq \|pp^*v\|^2 = \langle pp^*v, pp^*v\rangle = \langle pp^*v, p^*pv\rangle = \langle p^2p^*, pv\rangle \\ &= \langle pp^*, pv\rangle = \langle p^*pv, pv\rangle = \langle pv, p^2v\rangle = \langle p, pv\rangle \\ &= \|pv\|^2. \end{aligned}$$

Luego, en cualquier caso es $\|v\| \geq \|pv\|$, como queríamos.

$(d) \Rightarrow (a)$: Supongamos que p no es ortogonal. En ese caso, existen $s \in \operatorname{im} p$ y $t \in \ker p$ tales que $\|s\| = \|t\| = 1$ y $u = \langle s, t\rangle \neq 0$. Sea $v = -u^{-1}s + t$; claramente, $\|pv\| = |u|^{-1}$, y, por hipótesis entonces es

$$\begin{aligned} |u|^{-2} = \|pv\|^2 \leq \|v\|^2 = \langle v, v\rangle &= |u|^{-2} + 1 + \Re\left(-2u^{-1}\langle s, t\rangle\right) \\ &= |u|^{-2} - 1, \end{aligned}$$

y, restando $|u|^{-2}$ en ambos extremos de esta desigualdad, vemos que nuestra hipótesis implica que $0 \leq -1$, lo que, por supuesto, es absurdo.

Ejercicio IV

Sea $V = \mathbb{R}^4$, y sea $\langle -, -\rangle$ el único producto interno en V tal que

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\1\\1\end{pmatrix}\}$$

es una base ortonormal de V. Sea $\phi \in V^*$ tal que

$$\phi(\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}) = 2x - 3y + z - 4w.$$

y sean $v_0 \in V$ tal que $\phi(u) = \langle v_0, u\rangle$ para todo $u \in V$ y $S = \langle v_0\rangle$.

Sea $f : V \to V$ tal que

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3x + 2y + z + 2w\\2x + z\\z\\y + w + z\end{pmatrix}.$$

Encuentre un proyector ortogonal de V sobre $S^\perp \cap (\ker f^*)^\perp$.

Hay que calcular $S^\perp \cap (\ker f^*)^\perp$.

Primero, $S^\perp = \{v \in V : \langle v_0, u\rangle = 0\} = \ker \phi$, así que