Álgebra Lineal — 2005

Segundo parcial (Recuperatorio)

1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita y con un producto interno.

   a) Sea $W \subset V$ un subespacio, sea $W^\perp$ su complemento ortogonal, y sea $f_W : V \to V$ la aplicacción lineal tal que $f_W(w + w') = w - w'$ si $w \in W$ y $w' \in W^\perp$. Muestre que cualquiera sea W, f_W es unitaria y autoadjunta.

   b) Muestre que todo endomorfismo f unitario y autoadjunto de V es de esta forma. Esto es, muestre que para cada $f \in \operatorname{End}(V)$ unitario y autoadjunto, existe un subespacio $W \subset V$ tal que $f = f_W$.

2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con un producto interno, y $s \in \operatorname{End}(V)$ tal que $s^2 = Id$. Entonces son equivalentes:

   (a) $s \in \mathcal{O}(V)$;

   (b) $\ker(s - Id) \perp \ker(s + Id)$; y

   (c) $s = s^*$.

3. Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ un automorfismo de un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Mostrar que f es diagonalizable sii f^2 lo es.

   Determinar si alguna de las dos implicaciones siguen valiendo cuando f no es un isomorfismo.