Álgebra Lineal — 2005
Primer parcial

1. Sean $f : V \to W$ y $g : W \to U$ transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo k. Mostrar que

$$\dim\ker g \circ f \leq \dim\ker f + \dim\ker g.$$

2. Sea $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ y $S = \langle v \rangle \subset \mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la única aplicación lineal tal que

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y sea $U_1 = \ker\left(f^* : (\mathbb{R}^4)^* \to (\mathbb{R}^2)^*\right)$. Sea, finalmente,

$$U_2 = \langle \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Encontrar, si es posible, un subespacio $T \subset \mathbb{R}^4$ tal que

$$\left(S^\circ \cap (U_1 + U_2)\right) \oplus T^\circ = (\mathbb{R}^4)^*.$$

3. Sea V un espacio vectorial y $f \in \operatorname{End}(V)$. Mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$;

   b) $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2$;

   c) $\ker f = \ker f^2$.

4. Calcular

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & 0 & a_1 + a_2 & \dots & a_1 + a_n \\ 1 & a_2 & a_2 + a_1 & 0 & \dots & a_2 + a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n + a_1 & a_n + a_2 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$