Álgebra Lineal — 2005
Primer parcial (Segundo recuperatorio)

1. Calcule el determinante de

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b & \cdots \\ b & 1+a & b & a & \cdots \\ a & b & 1+a & b & \cdots \\ b & a & b & 1+a & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

   si $a, b \in \mathbb{C}$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que con respecto a las bases canónicas es

$$[f] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Encuentre $S \subset \mathbb{R}^4$ tal que $S^\circ \oplus \operatorname{im} f^t = (\mathbb{R}^4)^*$, y dé la matriz con respecto a la base canónica de un proyector p de $\mathbb{R}^4$ con imagen S y tal que sea $\ker p \cap \ker f = 0$.

3. Sean $f, g \in \operatorname{End}(V)$ tales que $f^2 = f$ y $gf = 0$. Muestre que

$$\operatorname{im}(f+g) = \operatorname{im} f + \operatorname{im} g.$$

   Las condiciones son necesarias para que esto suceda?

4. Sean $A, B \in M_n(k)$ tales que existe $p \in k[X]$ tal que $p(0) \neq 0$ y $AB = p(A)$. Mostrar que $AB = BA$.