Álgebra Lineal — 2005

Primer parcial (Recuperatorio)

1. Sea $V = \mathbb{R}^4$ y consideremos la base $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ de V. Sea $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ la base dual a $\mathcal{B}$ en V^*, y pongamos $S = \langle \phi_1 + 2\phi_2, \phi_3 - 3\phi_4 \rangle \subset V^*$.

   Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f : V^* \to \mathbb{R}^2$ tal que
   $$[f]_{\mathcal{B}^*,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}.$$
   Determinar para qué valores de a hay exactamente un proyector $p \in \operatorname{End}(V)$ tal que $\ker p = S^\circ$ e $\operatorname{im} p = \operatorname{im} f^t$, y, para esos valores, encontrar $[p]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$.

2. Determine, para cada $n \in \mathbb{N}$, el valor de
   $$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}.$$

3. Sean $p, q \in \operatorname{End}(V)$ proyectores. Entonces son equivalentes:
   (a) $p + q$ es un proyector;
   (b) $pq + qp = 0$;
   (c) $\operatorname{im} p \subset \ker q$ y $\operatorname{im} q \subset \ker p$.

   Si estas condiciones se cumplen, determinar $\operatorname{im}(p+q)$ y $\ker(p+q)$ en término de la imagen y núcleo de p y q.

4. (a) Sean $f, g \in \operatorname{End}(V)$ tales que $fg = 0$ y $f + g$ es inversible. Entonces
   $$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim V.$$
   (b) Si $f, g \in \operatorname{End}(V)$, entonces $\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$, y vale la igualdad sii $\operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g = 0$ y $\ker f + \ker g = V$.