

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Práctica N°8: Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Utilizar el método de Euler para resolver $\begin{cases} y' = 2y & \text{en } [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

empleando pasos $h = 0.1$, $h = 0.05$ y $h = 0.01$. Graficar las tres soluciones numéricas obtenidas junto con la solución exacta.

2. Hacer el mapa de curvas integrales en la región $[0, 10] \times [0, 10]$ de la ecuación diferencial

$$y'(t) = (y(t) - 5) \cdot (\cos^2(t) - 0.5),$$

graficando simultáneamente, para $k = 0, 1, \dots, 10$, la solución que se obtiene utilizando el método de Euler con paso $h = 0.01$ y con condición inicial

$$y(0) = k.$$

3. Considerar el problema $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

(a) Probar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0 \quad i = 0, 1, \dots$$

(b) Mostrar que si $\lambda < 0$, la solución exacta tiende a cero a medida que x crece.

(c) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$.

4. Se considera el problema

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2 + 3 & \text{en } [0, 2] \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

(a) Demostrar que la solución es una función convexa.

(b) Utilizar los métodos de Euler explícito e implícito, con paso $h = 0.05$ para obtener dos aproximaciones de la solución y graficarlas. Decidir en que región del gráfico deberá situarse la solución analítica del problema.

(c) Graficar la solución que se logra al utilizar el comando `ode45` de `Matlab`.

5. Se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) - 5 \sin(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

cuya solución exacta es la función $y(t) = 2 \sin(t) + \cos(t)$. Graficar simultáneamente en el intervalo $[0, 4]$ la solución exacta y las que se obtienen con los métodos de Euler y Taylor de orden 2, ambos con paso $h = 0.05$.

6. Escriba un programa que resuelva la ecuación diferencial del Ejercicio 5 por algún método de Runge-Kutta de orden 2 y de orden 4. Agregar estas soluciones al gráfico realizado en dicho ejercicio.

7. Verificar que la función error, **erf**, puede ser definida como la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Utilizar un método de Runge-Kutta de orden 2 para hallar $\text{erf}(t_i)$ con $t_i = 0, 0.05, 0.1, 0.15, \dots, 1$. Comparar con los valores obtenidos directamente con el comando **erf** de Matlab.

8. Considerar la ecuación

$$y' = y^2, \quad y(0) = 0.5$$

(a) Calcular el tiempo T en que la solución analítica explota.

(b) Calcular y graficar en el intervalo $[0, T - 0.1]$ la aproximación a la solución de la ecuación utilizando el método de Euler adaptativo de parámetro λ con un λ tal que el tiempo en que explota la solución numérica T_λ diste de T en menos que 10^{-1} .

(c) Agregar al gráfico anterior las aproximaciones obtenidas en el mismo intervalo con el método de Euler usual con paso $h = 0.05$ y con el comando **ode45**.

9. Probar que los métodos de Euler, Runge-Kutta y Taylor son consistentes.

10. Hallar el error local para los métodos de Euler explícito e implícito.

11. Se quiere estimar, aplicando el método de Euler, el valor de e como $y(1)$ donde $y(t)$ es solución de $y' = y$, $y(0) = 1$. Hallar un paso h de modo que el error cometido resulte menor que 10^{-3} . Realizar el mismo trabajo para el método de Taylor de orden 2.

12. Considerar el problema $y' = -2ty$, $y(0) = 1$, con $t \geq 0$.

(a) Determinar una cota, en términos de h , para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular $y(1)$.

(b) ¿Cómo debería tomar h si se desea que el error cometido sea menor que 10^{-2} ?

(c) Calcular la solución en $t = 1$ usando el valor de h obtenido en el item previo, y verificar las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

13. Repetir los items (a) y (b) del ejercicio anterior para el problema:

$$\begin{cases} y'(t) = t \sin^2(y(t)) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

14. La trayectoria de una partícula que se mueve en el plano está dada por las curvas $(y_1(t), y_2(t))$, donde las funciones y_1, y_2 son la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t) \end{cases} .$$

Resolver este sistema en el intervalo $[0, 20]$ con el método de Euler utilizando paso $h = 0.05$ y graficar la trayectoria de la partícula, sabiendo que en tiempo $t = 0$ se encontraba en el punto $(1, -1)$. Realizar nuevamente el gráfico utilizando la solución obtenida con el comando **ode45**.

15. Probar que una ecuación de orden n se puede escribir como un sistema de n ecuaciones de primer orden. Mostrar que un problema de valores iniciales para la primera se transforma en un problema de valores iniciales para el sistema.
16. Considerar el siguiente problema:

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad \text{con } y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Resolver la ecuación analíticamente y aproximar el valor $y(1)$ con un método de Runge-Kutta de orden 2 para distintos valores de h .

17. Considerar la ecuación $y'(t) = f(t, y(t))$.

(a) Deducir la fórmula de Milne:

$$y_n = y_{n-2} + h\left(\frac{1}{3}f_n + \frac{4}{3}f_{n-1} + \frac{1}{3}f_{n-2}\right),$$

aproximando la integral

$$\int_{t_{n-2}}^{t_n} f(t, y(t)) dt = \int_{t_{n-2}}^{t_n} y'(t) dt = y(t_n) - y(t_{n-2}),$$

con la fórmula de Simpson.

(b) Analizar la convergencia (estabilidad y consistencia) del método y calcular su orden.

18. Analizar la convergencia de los siguientes métodos y calcular su orden.

- **Adams-Bashforth.**

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n).$$

- **Adams-Moulton.**

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(5f_{n+3} + 8f_{n+2} - f_{n+1}).$$

19. Considerar el método de 2 pasos

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + ay_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_{n+1}).$$

Determinar $a, \beta_2, \beta_1, \beta_0$ de modo que el método resultante tenga orden 4.

20. Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el siguiente método multipaso sea convergente:

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + (3 - a^2)y_{n+1} + (a^2 - 1)y_n = h[5f_{n+2} + (-a^2 - 5)f_n].$$

21. **Miscelánea.** Considerar la ecuación $y' = \sqrt{|y|}$.

(a) Para el valor inicial $y(0) = 0$, seguir las iteraciones del método de Euler, con paso $h = 0.1$ hasta llegar al valor de $y(10)$.

(b) Graficar la solución que se obtiene al aplicar el método de Euler, si el valor de $y(0)$ es dado con un error de 10^{-6} , es decir $y(0) = 0.000001$.

Nota: La gran propagación del error en el dato inicial se debe a que esta ecuación tiene infinitas soluciones si $y(0) = 0$. En particular, cualquiera sea $\alpha > 0$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \alpha \\ \frac{(t - \alpha)^2}{4} & t > \alpha \end{cases}$$

es solución de la misma.