

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Una Interpretación Geométrica de la
Cohomología en Grados Dos y Tres
de una Variedad Diferenciable

Tesis de Licenciatura

Alumno: Anibal Amoreo

Director: Dr. Jorge A. Devoto

Diciembre de 2004

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	v
1. Nociones Preliminares.	1
1.1. Categorías y Cohomología.	1
1.1.1. Categorías y Funtores.	1
1.1.2. Cohomología de de Rham.	5
1.1.3. La Definición de Haz y Cohomología de Čech.	6
1.1.4. Sucesiones Exactas de Haces.	21
1.2. Variedades de Dimensión Infinita.	32
1.2.1. Diferenciabilidad.	32
1.3. Preliminares de Análisis Funcional.	34
1.3.1. Grupos de Operadores.	34
1.3.2. Producto Tensorial de Espacios de Hilbert.	38
2. Fibrados.	41
2.1. Definiciones básicas.	41
2.1.1. Ejemplos de Fibrados Vectoriales.	44
2.2. Fibrados Isomorfos y Relaciones entre sus Cociclos.	45
2.3. Secciones.	46
2.4. Reconstrucción de un Fibrado a partir de sus Cociclos.	48
2.5. Fibrados Inducidos y Operaciones.	49
2.5.1. Subfibrado.	49
2.5.2. Suma directa externa.	50
2.5.3. Pullback.	50
2.5.4. Suma de Whitney.	51
2.5.5. El fibrado de homomorfismos.	52
2.5.6. El fibrado dual.	52
2.5.7. Producto tensorial de fibrados.	52
2.5.8. Complexificación.	54
2.5.9. El producto alternado de fibrados.	54
2.5.10. La construcción general.	55
2.6. Sucesiones Exactas.	56
2.7. Fibrados de Línea.	57
2.8. Fibrados Principales.	59
2.8.1. Fibrados Asociados.	63

2.8.2. Fibrados Asociados a Fibrados de Línea.	69
3. Cohomología en Grado 2.	71
3.1. La Relación entre Fibrados de Línea y Cohomología.	71
3.2. Fibrados con Conexiones.	75
3.2.1. Conexiones en Fibrados de Línea.	75
3.2.2. Conexiones en Fibrados Principales.	84
3.2.3. Secciones Planas.	92
3.2.4. La Categoría de Fibrados de Línea con Conexiones.	94
3.3. Complejos de Haces e Hipercohomología.	98
3.4. Caracterización Cohomológica de los Fibrados de Línea con Conexiones.	103
3.5. Curvatura y Cohomología.	105
3.5.1. La Curvatura de una Conexión.	105
3.5.2. La Relación con las Cohomologías de de Rham y Deligne.	108
4. Cohomología en Grado 3.	113
4.1. Cohomología No Abelianas.	113
4.2. Planteo del Problema.	116
4.3. Cohomología en Grado 3 y Fibrados Principales.	117
4.3.1. La estructura de Grupo en $\check{H}^1(X; \mathbb{P}U(H)_X)$	120
4.4. Conexiones y Curvatura.	121

Introducción.

Si bien las construcciones clásicas de la topología algebraica tienen lugar dentro del contexto de la categoría de espacios topológicos mas tarde se descubrió que trabajando en la categoría de variedades diferenciables muchas de estas construcciones tienen un modelo analítico o geométrico. Una primera muestra de este fenómeno es la existencia de la cohomología de de Rham. La experiencia ha demostrado que estos modelos geométricos posibilitan la interacción y la aplicación de métodos de la topología algebraica a numerosas ramas de la matemática y la física.

En un contexto algebraico, podemos citar como ejemplos las distintas teorías de cohomología existentes, como ser la singular, la simplicial, la de Čech, la de Alexander-Spanier, entre otras.

En el contexto de la teoría de homotopía, tenemos las construcciones debidas a S. Eilenberg y S. MacLane, hechas entre 1943 y 1954. Ellos crearon y estudiaron una clase de espacios que llevan sus nombres. Un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo (π, n) , donde $n \in \mathbb{N}$ y π es un grupo abeliano si $n \geq 2$ ó un grupo cualquiera para $n = 1$ es un espacio topológico $K(\pi, n)$ con la particularidad que su único grupo de homotopía no trivial es el n -ésimo y además es isomorfo a π . Uno de los resultados fundamentales al que Eilenberg llegó a partir del estudio de estos espacios es mostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el funtor de cohomología singular $X \mapsto H^n(X; \pi)$, donde X es un complejo CW conexo y π un grupo abeliano, es representable por $K(\pi, n)$, esto es, existe un isomorfismo natural

$$H^n(X; \pi) \cong [X, K(\pi, n)],$$

donde $[X, Y]$ indica la clase de homotopía de aplicaciones $X \rightarrow Y$.

Además de representar el funtor de cohomología para cada grado, este isomorfismo natural provee una interpretación homotópica de un objeto puramente algebraico como es $H^n(X; \pi)$. Clases de cociclos módulo cobordes pasan a ser clases de homotopía de funciones continuas.

Una caracterización geométrica análoga a la anterior es más difícil de obtener. En primer lugar, solo se pudo hasta ahora avanzar grado por grado; no existe ninguna caracterización completa en términos de objetos geométricos para las cohomologías en grados arbitrarios de una variedad diferenciable X , a pesar de que se tienen sospechas de los posibles objetos que podrían resolver este problema, las n -categorías.¹ Este trabajo trata, entre otras cosas, sobre estas caracterizaciones para grado 2 y 3.

En lo que sigue se considera $\pi = \mathbb{Z}$ y X una variedad suave.

¹Existen varias definiciones de estas categorías de orden superior, pero hasta la fecha no se ha demostrado si son todas equivalentes.

Grado 2.

Valiéndonos de los resultados de Eilenberg, una forma de llegar a una interpretación geométrica del grupo $H^2(X; \mathbb{Z})$ es tratando de descubrir que objetos geométricos están relacionados con los espacios $K(\mathbb{Z}, n)$ y con las clases de homotopía de aplicaciones $X \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$. Existe una caracterización topológica de estos espacios de Eilenberg-MacLane en términos de productos simétricos, que no es adecuada para lo que se busca en este caso.

Más útil es notar que un espacio de Eilenberg-MacLane del tipo $(\mathbb{Z}, 2)$ tiene el tipo de homotopía del espacio proyectivo infinito $\mathbb{C}P^\infty$. Esto es, el espacio $\mathbb{C}P^\infty$ es un espacio de Eilenberg-MacLane del tipo $(\mathbb{Z}, 2)$ y

$$H^n(X; \mathbb{Z}) \cong [X, \mathbb{C}P^\infty].$$

Más aún, $\mathbb{C}P^\infty$ es la grassmaniana $G_1(\mathbb{C}^\infty)$ de subespacios de dimensión 1 del espacio \mathbb{C}^∞ y, de la teoría de fibrados vectoriales² se sabe además que existe una biyección entre el conjunto $[X; G_1(\mathbb{C}^\infty)]$ y el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados de línea sobre X , que notamos $\text{Pic}^\infty(X)$. Así obtenemos isomorfismos

$$H^2(X; \mathbb{Z}) \cong [X, K(\mathbb{Z}, 2)] \cong [X, G_1(\mathbb{C}^\infty)] \cong \text{Pic}^\infty(X).$$

Estos isomorfismos y las observaciones anteriores indican claramente que los objetos a considerar en este caso son los fibrados de línea. Se llega a una interpretación geométrica del grupo $H^2(X; \mathbb{Z})$ construyendo clases de cohomología considerando ciertas funciones asociadas a fibrados de línea, llamadas cociclos. Dado un fibrado de línea L , esta correspondencia entre (clases de isomorfismo de) fibrados de línea y clases de cohomología define una clase $c_1(L) \in H^2(X; \mathbb{Z})$, llamada la primer clase de Chern de L .

Conexiones y Curvatura.

Al igual que se hace para el fibrado tangente de una variedad suave, en un fibrado de línea L podemos también definir una conexión y su curvatura. Considerando esta estructura extra, e invirtiendo lo hecho anteriormente, buscamos ahora obtener una interpretación cohomológica de las clases de isomorfismo de fibrados de línea dotados de una conexión y su relación con la curvatura.

La información adicional dada por la conexión hace insuficiente trabajar con grupos de cohomología usuales. Considerando un sistema de coeficientes que pueda procesar la estructura extra de las conexiones, se llega a una tal caracterización cohomológica y, siendo la curvatura una forma cerrada, también a la relación con la cohomología de de Rham (teoría de Chern-Weil).

²Un fibrado vectorial de rango n es, a grandes rasgos, una variedad diferenciable E sobre otra variedad X que localmente es un producto $U \times V$, para U un abierto de X y V un espacio vectorial de dimensión n . Si $n = 1$, se les da el nombre de fibrados de línea. En el capítulo 2 de este trabajo se da una introducción a estos objetos.

Grado 3.

Para X una variedad diferenciable y G un grupo de Lie, existe un isomorfismo entre el grupo de clases de isomorfismo de ciertas fibraciones sobre X con fibra difeomorfa al grupo G , llamadas G -fibrados principales,³ y el grupo de clases de homotopía de aplicaciones $X \rightarrow BG$, donde BG indica el espacio clasificante⁴ del grupo G . Más aún, si G es un espacio del tipo (\mathbb{Z}, n) , entonces BG resulta ser un espacio del tipo $(\mathbb{Z}, n + 1)$. Luego, se tienen definidos isomorfismos

$$H^{n+1}(X; \mathbb{Z}) \cong [X, K(\mathbb{Z}, n + 1)] \cong [X; BK(\mathbb{Z}, n)].$$

Para el caso particular anterior, en grado 2, la grassmaniana $G_1(\mathbb{C}^\infty)$ resulta ser el espacio clasificante del grupo \mathbb{C}^* , que es un espacio del tipo $(\mathbb{Z}, 1)$, y el grupo $\text{Pic}^\infty(X)$ isomorfo al grupo de clases de isomorfismo de \mathbb{C}^* -fibrados principales sobre X . Es decir, podríamos haber llegado a una caracterización geométrica análoga considerando \mathbb{C}^* -fibrados principales en lugar de fibrados de línea.

Este enfoque será de particular utilidad para relacionar a las clases de cohomología en grado 3 con objetos puramente geométricos, como son los G -fibrados principales. Para eso, usaremos una caracterización de los espacios de Eilenberg-MacLane del tipo $(\mathbb{Z}, 3)$.

Consideremos un espacio de Hilbert separable H y llamemos $\Sigma(H)$ al espacio (de Hilbert) de operadores de Hilbert-Schmidt; estos son operadores $A : H \rightarrow H$ tales que la traza de AA^* es finita.

Al ser $\Sigma(H)$ separable, el grupo unitario $U(\Sigma(H))$ de H resultará ser contráctil. Por otro lado, se tiene una acción por conjugación del grupo unitario $U(H)$ en $\Sigma(H)$, lo que a su vez induce una acción libre del grupo de automorfismos proyectivos $\mathbb{P}U(H)$ del espacio H en $\Sigma(H)$. Esto hace de $U(\Sigma(H)) \rightarrow U(\Sigma(H))/\mathbb{P}U(H)$ un $\mathbb{P}U(H)$ -fibrado principal. Mas aún, es el $\mathbb{P}U(H)$ -fibrado universal, y luego el cociente $U(\Sigma(H))/\mathbb{P}U(H)$ resulta ser el espacio clasificante $B\mathbb{P}U(H)$.

Ahora bien, siendo $U(H)$ contráctil y $U(H) \rightarrow \mathbb{P}U(H)$ un S^1 -fibrado principal, el grupo $\mathbb{P}U(H)$ resulta ser también un espacio de Eilenberg-MacLane del tipo $(\mathbb{Z}, 2)$. Luego, el espacio clasificante $B\mathbb{P}U(H)$ es un espacio de Eilenberg-MacLane del tipo $(\mathbb{Z}, 3)$. Combinando estos resultados se obtienen entonces isomorfismos

$$H^3(X; \mathbb{Z}) \cong [X, K(\mathbb{Z}, 3)] \cong [X, B\mathbb{P}U(H)],$$

que explicitan la relación entre las clases de cohomología en grado 3 y los $\mathbb{P}U(H)$ -fibrados principales. El isomorfismo entre el grupo $H^3(X; \mathbb{Z})$ y el grupo de clases de isomorfismo de $\mathbb{P}U(H)$ -fibrados principales se debe a J. Dixmier y A. Douady. El isomorfismo que vincula estos fibrados principales y la cohomología en grado 3

³Los G -fibrados principales se estudian en el capítulo 2. A grandes rasgos, son espacios P provistos de una proyección $P \rightarrow X$ para los cuales existe una acción del grupo G a derecha, y tales que, localmente, son difeomorfos a un producto $U \times G$, donde $U \subset X$ es un subconjunto abierto.

⁴Dada una variedad arbitraria X y el grupo G , se puede construir un G -fibrado principal con espacio total EG y base BG con la propiedad de que todo G -fibrado principal sobre X es el pullback del fibrado $EG \rightarrow BG$ por una aplicación $X \rightarrow BG$. Por esto BG recibe el nombre de *espacio clasificante* de G y $EG \rightarrow BG$ de *G -fibrado universal*.

se obtiene también independientemente de las clases de homotopía de aplicaciones $X \rightarrow BPU(H)$.

Y, repitiendo el esquema seguido para grado 2, podemos también definir conexiones y curvatura en estos fibrados principales y relacionar estas construcciones con la cohomología.

Además de haber resultado de importancia dentro de la matemática, estas construcciones tienen aplicaciones importantes a la física, por ejemplo en el monopolo de Dirac. Dentro de la matemática, estas relaciones geométricas motivaron la aparición de las llamadas teorías de cohomología suave.

Contenidos.

A continuación, una breve reseña de lo estudiado en cada capítulo.

En el primer capítulo se dan las nociones introductorias y las herramientas necesarias para lo que se desarrolla luego, como por ejemplo la noción de prehaz y haz y diferentes construcciones con ellos. A continuación se estudia la cohomología de Čech de una variedad diferenciable y su relación con la cohomología de de Rham. Se verá también una muy breve introducción a las variedades de dimensión infinita, para finalizar con algunos resultados sobre el grupo de automorfismos de un espacio de Hilbert y la definición del producto tensorial de dichos espacios.

A continuación, en el capítulo 2, se da una introducción a los fibrados vectoriales y los fibrados principales; estos son precisamente los objetos geométricos que permitirán la caracterización geométrica de la cohomología.

Los últimos dos capítulos tratan precisamente sobre las caracterizaciones geométricas de la cohomología, como así también de una interpretación cohomológica de fibrados con conexiones.

En la primera parte del capítulo 3 se llega al isomorfismo entre $H^2(X; \mathbb{Z})$ y el grupo de clases de isomorfismo de fibrados vectoriales de rango 1. A este isomorfismo se llegará independientemente de considerar espacios de Eilenberg-MacLane. Es decir, se construyen clases de cohomología directamente a partir de los cociclos de un fibrado de línea. A continuación se define la noción de conexión en un fibrado de línea y su curvatura, para luego buscar una caracterización cohomológica del grupo de clases de isomorfismos de fibrados de línea dotados de una conexión; siendo insuficiente para este trabajo la cohomología de Čech, se define y se dan también algunas propiedades de la cohomología con coeficientes en un complejo de haces, también llamada hipercohomología, y en particular, de la cohomología suave de Deligne, para finalizar con una interpretación cohomológica de la curvatura, que vincula la cohomología de de Rham con las construcciones anteriores.

Para finalizar, en el último capítulo se desarrolla lo mismo que en el capítulo anterior pero para la cohomología en grado 3. La dificultad principal en este caso será la aparición en los desarrollos de grupos y álgebras de dimensión infinita.

Capítulo 1

Nociones Preliminares.

Será útil aclarar algunas pocas nociones y notaciones que se van a utilizar a lo largo del texto.

Cuando, sin aclarar, nos refiramos a una variedad suave X , estaremos suponiendo que X es paracompacta. En la mayoría de los casos, las construcciones más importantes tanto para variedades suaves como para espacios topológicos explotan fuertemente la paracompacidad de los espacios involucrados.

Si $U \subset X$ es un subconjunto abierto e Y es una variedad suave, $C^\infty(U, Y)$ denota el conjunto de aplicaciones suaves $U \rightarrow Y$. Si $Y = \mathbb{R}$, usualmente se nota $C^\infty(U, \mathbb{R})$ por $C^\infty(U)$.

Diferenciable ó C^∞ se usarán como sinónimos de la palabra suave.

1.1. Categorías y Cohomología.

1.1.1. Categorías y Funtores.

Una categoría \mathcal{C} consta de lo siguiente:

1. una familia de *objetos*, notada $\text{Ob } \mathcal{C}$,
2. una familia de flechas entre objetos de \mathcal{C} , notada $\text{Fl } \mathcal{C}$, cuyos elementos se denominan *morfismos*. Si X e Y son objetos de \mathcal{C} , entonces la familia de morfismos $X \rightarrow Y$ se nota $\text{Mor}(X, Y)$;
3. una operación binaria $\text{Fl } \mathcal{C} \times \text{Fl } \mathcal{C} \rightarrow \text{Fl } \mathcal{C}$, $(f, g) \mapsto fg$, tal que
 - a) si $h \in \text{Mor}(X, Y)$, $g \in \text{Mor}(Y, Z)$ y $f \in \text{Mor}(Z, W)$, entonces $(fg)h = f(gh)$;
 - b) para cada objeto X de \mathcal{C} existe un morfismo $\text{id}_X : X \rightarrow X$ tal que, si $f \in \text{Mor}(X, Y)$ y $g \in \text{Mor}(Y, X)$, entonces $f \text{id}_X = f$ y $\text{id}_X g = g$.

Ejemplo 1.1.1. Como ejemplos de categorías se pueden dar los siguientes:

1. La categoría \mathcal{Sets} , donde $\text{Ob } \mathcal{Sets}$ está formado por todos los conjuntos y $\text{Fl } \mathcal{Sets}$ por todas las funciones entre conjuntos.

2. La categoría \mathcal{T}_{op} , donde los objetos son los espacios topológicos y las flechas las funciones continuas.
3. La categoría \mathcal{G}_r , con objetos los grupos y las flechas los homomorfismos de grupos.
4. La categoría \mathcal{A} de grupos abelianos.
5. La categoría \mathcal{V}_K de K -espacios vectoriales de dimensión finita, donde las flechas son los isomorfismos.
6. Dado un espacio topológico X , queda definida una categoría $\text{Open}(X)$ cuyos objetos son los subconjuntos abiertos de X y las flechas las inclusiones.
7. Cualquier grupo G se puede considerar como una categoría con un único objeto, que denotaremos \bullet , y tal que, para cada $g \in G$, se tiene definida una flecha $g : \bullet \rightarrow \bullet$, con inversa $g^{-1} : \bullet \rightarrow \bullet$.

Dadas dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} , un *funtor covariante* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste de dos aplicaciones $F : \text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$ y $F : \text{Fl } \mathcal{C} \rightarrow \text{Fl } \mathcal{D}$, tales que

1. si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en \mathcal{C} , entonces $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ es un morfismo en \mathcal{D} ,
2. $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$,
3. $F(fg) = F(f)F(g)$.

La definición de *funtor contravariante* es análoga, solo que, si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en \mathcal{C} , entonces $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$ y $F(fg) = F(g)F(f)$.

Ejemplo 1.1.2. 1. El funtor de olvido $|\cdot|$ de la categoría de espacios topológicos en la categoría de conjuntos, definido en los objetos por $|X| = X$, o sea $|X|$ es el conjunto subyacente del espacio topológico X , y en los morfismos por $|X \xrightarrow{f} Y| = |X| \xrightarrow{f} |Y|$. Es decir, este funtor "olvida" la estructura de espacio topológico.

2. El funtor dual $D : \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, definido en los objetos por $D(V) = V^*$ y en los morfismos por $D(V \xrightarrow{f} W) = W^* \xrightarrow{f^*} V^*$.

Dados funtores covariantes $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} , una *transformación natural* θ de F en G , que notamos $\theta : F \rightarrow G$ es una familia de morfismos $\{\theta_X : F(X) \rightarrow G(X) \mid X \in \text{Ob } \mathcal{C}\}$ tales que, para cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} , el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{\theta_X} & G(X) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
 F(Y) & \xrightarrow{\theta_Y} & G(Y)
 \end{array}$$

conmuta. Es claro que, si $\theta : F \rightarrow G$ y $\eta : G \rightarrow H$ son transformaciones naturales entre funtores covariantes, entonces la composición $\eta\theta : F \rightarrow H$ definida por $(\eta\theta)_X = \eta_X\theta_X$ es una transformación natural (estas definiciones se extienden de manera obvia a funtores contravariantes). Dos funtores $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, ambos covariantes ó contravariantes, se dicen *naturalmente isomorfos* si existen transformaciones naturales $\theta : F \rightarrow G$, $\eta : G \rightarrow F$ tales que, para cada par de objetos X, Y de \mathcal{C} , $\theta_Y\eta_Y = \text{id}_{G(Y)}$ y $\eta_X\theta_X = \text{id}_{F(X)}$.

Dadas entonces dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} podemos definir la categoría $\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ cuyos objetos son los funtores $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y las flechas las transformaciones naturales entre estos funtores.

Definición 1.1.3. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Se dice que son *equivalentes* si existen funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tales que FG es naturalmente isomorfo al funtor identidad de \mathcal{D} y GF al funtor identidad de \mathcal{C} . Las categorías se dicen *isomorfas* si existen funtores F y G definidos como antes, y tales que $FG = \text{id}_{\mathcal{D}}$ y $GF = \text{id}_{\mathcal{C}}$.

A continuación definimos el colímite de un funtor.

Definición 1.1.4. Sea Γ una categoría. Decimos que es *filtrante* si y solo si

1. Dados $\alpha, \beta \in \text{Ob } \Gamma$ existe un objeto γ y morfismos $\alpha \rightarrow \gamma$, $\beta \rightarrow \gamma$ y
2. Dados dos morfismos $f, g : \alpha \rightarrow \beta$, existe un objeto γ y un morfismo $h : \beta \rightarrow \gamma$ tal que $hf = hg$.

Los números naturales forman una categoría, con las flechas definidas como sigue: dados $n, m \in \mathbb{N}$, existe un morfismo $n \rightarrow m$ si y solo si $n \leq m$. Por las propiedades de los números naturales, esta categoría resulta filtrante. En general, cualquier conjunto dirigido es también una categoría filtrante¹.

Sea ahora Γ una categoría filtrante y $F : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}_{ob}$ un funtor, que normalmente se llama un *diagrama* en \mathcal{S}_{ob} . Si $f_{\alpha\beta} : \alpha \rightarrow \beta$ es un morfismo en Γ , llamemos, a menos que sea necesario especificar, $F_{\alpha\beta}$ a la función $F(f_{\alpha\beta})$ y F_α a la imagen $F(\alpha)$. Se define el *colímite*² de F como

$$C = \text{colim}_{\Gamma} F = \coprod_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha / \sim,$$

con $(x, \alpha) \sim (y, \beta)$ si y solo si existe un $\gamma \in \Gamma$ y morfismos $f_{\alpha\gamma} : \alpha \rightarrow \gamma$, $f_{\beta\gamma} : \beta \rightarrow \gamma$ tales que, $F_{\alpha\gamma}(x) = F_{\beta\gamma}(y)$. Es decir, dos elementos coinciden en C si y solo si ya coincidían en algún F_γ para cierto $\gamma \in \Gamma$.

Este objeto puede ser caracterizado por la siguiente propiedad universal: Si X es un conjunto para el cual, dados $\alpha, \beta \in \Gamma$ arbitrarios, existen aplicaciones

¹Recordar que un conjunto I se dice *dirigido* si tiene definida una relación \leq tal que

1. $i \leq i$ para todo $i \in I$.
2. Si $i \leq j$ y $j \leq k$, entonces $i \leq k$.
3. Si i y j son elementos cualesquiera de I , entonces existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.

²También llamado en la literatura *colímite filtrante* ó *límite directo*.

$g_\alpha : F_\alpha \rightarrow X$ y $g_\beta : F_\beta \rightarrow X$, entonces existe una única función $f : C \rightarrow X$ tal que el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccc}
 F_\alpha & & & & \\
 & \searrow^{g_\alpha} & & & \\
 & & & & X \\
 & f_\alpha \searrow & & f \rightarrow & \\
 & & C & & \\
 & f_\beta \nearrow & & & \\
 F_\beta & & & \nearrow^{g_\beta} &
 \end{array}$$

conmuta.

Si el functor F toma valores en la categoría de grupos (resp. grupos abelianos), es decir, F es un *diagrama* de grupos (resp. grupos abelianos), existe una única estructura de grupo en C tal que las aplicaciones $f_\alpha : F_\alpha \rightarrow C$ dadas por $x \mapsto [x, \alpha]$ resultan homomorfismos de grupos. Además, si F toma valores en \mathcal{A} , C resulta ser abeliano. Para este caso, se reemplaza la unión disjunta por la suma directa.³

Considerando, para fijar ideas, la categoría de diagramas de grupos $\text{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}_r)$, el colímite filtrante es un functor

$$\text{colim} : \text{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}_r) \rightarrow \mathcal{G}_r.$$

Definición 1.1.5. Dados, para cada $n \in \mathbb{Z}$, funtores $F^n \in \text{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}_r)$ y transformaciones naturales $\theta^n : F^n \rightarrow F^{n+1}$, decimos que forman una sucesión

$$\dots \rightarrow F^{n-1} \xrightarrow{\theta^{n-1}} F^n \xrightarrow{\theta^n} F^{n+1} \rightarrow \dots \quad (1.1)$$

en $\text{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}_r)$ si para cada $\gamma \in \Gamma$,

$$\dots \rightarrow F_\gamma^{n-1} \xrightarrow{\theta_\gamma^{n-1}} F_\gamma^n \xrightarrow{\theta_\gamma^n} F_\gamma^{n+1} \rightarrow \dots \quad (1.2)$$

es una sucesión en \mathcal{G}_r . Decimos que la sucesión (1.1) es *exacta* si para cada $\gamma \in \Gamma$ lo es la sucesión (1.2).

La siguiente proposición será de utilidad luego; su demostración es directa.

Proposición 1.1.6. *El functor $\text{colim} : \text{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}_r) \rightarrow \mathcal{G}_r$ es exacto; es decir, dada una sucesión exacta en $\text{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}_r)$ como (1.1), entonces la sucesión inducida en \mathcal{G}_r*

$$\dots \rightarrow \text{colim}_\Gamma F^{n-1} \xrightarrow{\theta^{n-1}} \text{colim}_\Gamma F^n \xrightarrow{\theta^n} \text{colim}_\Gamma F^{n+1} \dots$$

*es exacta.*⁴

³La definición general de colímite es usando el coproducto; para la categoría de conjuntos, el coproducto es la unión disjunta y para la de grupos la suma directa.

⁴Los homomorfismos de grupos $\underline{\theta}^n$ vienen definidos por $\underline{\theta}^n[x, \gamma] = [\theta_\gamma^n(x), \gamma]$.

1.1.2. Cohomología de de Rham.

Sea X una variedad suave de dimensión k y $U \subset X$ un abierto. Notaremos $\Gamma(U, \Lambda^n(X))$ ó $\Omega^n(U)$ al $C^\infty(U)$ -módulo de n -formas diferenciales⁵ reales sobre U , donde $\Lambda^n(X) = \Lambda^n(TX)$ es el conjunto de tensores alternados sobre X .⁶ Si $U = X$, en lugar de $\Gamma(X, \Lambda^n(X))$ se escribirá $\Gamma(\Lambda^n(X))$. El *operador de diferenciación exterior* $d : \Gamma(U, \Lambda^n(X)) \rightarrow \Gamma(U, \Lambda^{n+1}(X))$ es el homomorfismo, de grado $+1$, definido como sigue:

1. Si $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una 0-forma, entonces $d\lambda : U \rightarrow TX^*$, donde TX^* es el fibrado cotangente de X , es la 1-forma $d\lambda(x) = d\lambda_x$. Equivalentemente, si $\varphi = (x^1, \dots, x^k) : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una carta de X , entonces $d\lambda = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} dx^i$.
2. Si ahora $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_n} \lambda_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \dots dx^{i_n}$ es una n -forma, definimos $d\omega$ por

$$d\omega = \sum_{i_1, \dots, i_n} d\lambda_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \dots dx^{i_n}.$$

Se puede ver fácilmente que $dd = d^2 = 0$, lo que básicamente es consecuencia de que las derivadas mixtas conmutan, obteniéndose así el *complejo de de Rham*

$$\Gamma(U, \Lambda^0(X)) = C^\infty(U) \xrightarrow{d} \Gamma(U, \Lambda^1(X)) = TU^* \xrightarrow{d} \Gamma(U, \Lambda^2(X)) \rightarrow \dots,$$

donde $\Gamma(U, \Lambda^n(X)) = 0$ para $n < 0$. Notar que también $\Gamma(U, \Lambda^n(X)) = 0$ para $n > k$ ya que $\Lambda^n(X) = 0$. Decimos que una n -forma es

1. *cerrada* si y solo si $d\omega = 0$ (esto es, las formas cerradas son el núcleo del operador d), y
2. *exacta* si y solo si existe una $(n-1)$ -forma τ tal que $d\tau = \omega$.

Como $d^2 = 0$, toda forma exacta es cerrada. Se define entonces el n -ésimo *grupo de cohomología de de Rham* como

$$H^n(X; \mathbb{R}) = \{n\text{-formas cerradas}\} / \{n\text{-formas exactas}\}.$$

Usamos la notación $H^\bullet(X; \mathbb{R})$ cuando se consideren todos los grupos de cohomología, es decir $H^\bullet(X; \mathbb{R}) = (H^n(X; \mathbb{R}))_{n \geq 0}$, y llamaremos a $H^\bullet(X; \mathbb{R})$ la *cohomología de de Rham de X con coeficientes en \mathbb{R}* .

Definición 1.1.7. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial, $U \subset X$ un abierto y notemos con $\Lambda^n(U) \otimes V$ al conjunto $\coprod_{x \in U} \Lambda^n(TX_x^\vee) \otimes_{\mathbb{R}} V \cong \coprod_{x \in U} \Lambda^n(TX_x) \otimes_{\mathbb{R}} V$. Una n -forma diferencial en U a valores en V es una aplicación $\omega : U \rightarrow \Lambda^n(U) \otimes V$ tal que $\omega(x) = \omega_x \in \Lambda^n(TX_x) \otimes_{\mathbb{R}} V$ y que se puede expresar, sobre U , por

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_n} f_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \dots dx^{i_n},$$

⁵La primer notación quedará aclarada en la siguiente sección, cuando se estudien los fibrados vectoriales.

⁶Recordar que para cada n existe un isomorfismo canónico entre $\Lambda^n(TX^\vee)$ y $\Lambda^n(TX)$.

⁷En realidad, \mathbb{R} -espacio vectorial.

donde $(x^1, \dots, x^k) : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una carta de X y $f_{i_1 \dots i_n} : U \rightarrow V$ son aplicaciones suaves. Equivalentemente, si $\Gamma(TU)$ denota el espacio de campos de vectores definidos sobre U , una n -forma a valores en V es una aplicación $C^\infty(U, \mathbb{R})$ -multilineal $\omega : \Gamma(TU)^n \rightarrow C^\infty(U, V)$, con $\Gamma(TU)^n = \Gamma(TU) \times \dots \times \Gamma(TU)$ (n -veces).

Así, por ejemplo, si $V = \mathbb{C}$, se pueden construir los grupos de cohomología de de Rham con coeficientes complejos $H^n(X; \mathbb{C})$, considerando el complejo de formas diferenciales a valores en \mathbb{C} .

1.1.3. La Definición de Haz y Cohomología de Čech.

Sea X un espacio topológico paracompacto arbitrario.

Definición 1.1.8. Un *prehaz* F de conjuntos sobre X es una correspondencia que a cada abierto U de X le asigna un conjunto $F(U)$ y a cada inclusión $i_{UV} : U \subset V$, una función $F(i_{UV}) = \rho_{VU} : F(V) \rightarrow F(U)$, llamado *morfismo de restricción*, o simplemente *restricción*, tal que

1. $F(\text{id})$ es la identidad y $F(\emptyset) = \emptyset$.
2. Si se tienen inclusiones $i_{UV} : U \rightarrow V$, $i_{VW} : V \rightarrow W$, entonces $F(i_{VW}i_{UV}) = F(i_{UV})F(i_{VW})$.

Si $U \subset V$ y $a \in F(V)$, la imagen $\rho_{VU}(a) \in F(U)$ se llamará la *restricción de a a U* , y se usará también la notación $a|_U$.

Si $F : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{S}_{\text{ob}}$ es un prehaz y U es un abierto de X , se define el prehaz *restricción* $F|_U : \text{Open}(U) \rightarrow \mathcal{S}_{\text{ob}}$ de la manera obvia: si W es un abierto de U , entonces existe un abierto V de X tal que $W = V \cap U$. Luego, $F|_U(W) = F(V \cap U)$. Análogamente para los morfismos. Usaremos también la notación F_U para este prehaz.

Un *morfismo* u *homomorfismo de prehaces* $\theta : F \rightarrow G$ es una familia de funciones $\{\theta_U : F(U) \rightarrow G(U)\}_{U \in \text{Open}(X)}$ tal que, para cada inclusión $i_{UV} : U \rightarrow V$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(V) & \xrightarrow{\theta_V} & G(V) \\ \rho_{VU} \downarrow & & \downarrow \rho_{VU} \\ F(U) & \xrightarrow{\theta_U} & G(U) \end{array}$$

Las definiciones anteriores se pueden resumir en la siguiente: si $\text{Open}(X)$ denota la categoría de los abiertos del espacio X , con morfismos las inclusiones, entonces un prehaz de conjuntos sobre X es un functor contravariante $F : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{S}_{\text{ob}}$. Un morfismo de prehaces $\theta : F \rightarrow G$ es una transformación natural del functor F en el functor G .

Se pueden definir, en forma completamente análoga, prehaces de grupos, anillos, A -módulos, etc. En general, dada cualquier categoría \mathcal{C} , un prehaz sobre el espacio topológico X es un functor contravariante $F : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{C}$.

Es de fácil verificación que, dada una categoría \mathcal{C} y fijado un espacio topológico X , los prehaces sobre X a valores en \mathcal{C} forman una categoría.

Definición 1.1.9. Sea F un prehaz, digamos, de conjuntos para fijar ideas, sobre el espacio X . Un prehaz G de conjuntos sobre X se dice un *subprehaz* del prehaz F si para cada abierto U de X , $G(U)$ es un subconjunto de $F(U)$.

Ejemplo 1.1.10. Dado un grupo G , se define el *prehaz constante* como el funtor $\underline{G} : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{G}$ que a cada abierto U de X le asigna el conjunto de funciones localmente constantes $U \rightarrow G$, y a cada inclusión $U \subset V$ la restricción correspondiente.

Ejemplo 1.1.11. Sea (Y, y_0) un espacio topológico. Se nota con ΩY al espacio de lazos $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ basados en y_0 , es decir, si $\gamma \in \Omega Y$, $\gamma(0) = \gamma(1) = y_0$. En los cursos de teoría de homotopía se demuestra que el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $Z \rightarrow \Omega \Omega Y = \Omega^2 Y$, notado $[Z, \Omega^2 Y]$, es un grupo abeliano para todo espacio topológico con un punto base Z . Se tiene entonces el prehaz $[-, \Omega^2 Y] : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{A}$, definido en los objetos por $U \mapsto [U, \Omega^2 Y]$ y en los morfismos por $(i : U \rightarrow V) \mapsto i^* : [V, \Omega^2 Y] \rightarrow [U, \Omega^2 Y]$, donde $i^*([f]) = [fi]$. Se puede definir análogamente un prehaz $[-, \Omega Y]$, pero en este caso, $[Z, \Omega Y]$ es un grupo (no necesariamente abeliano).

Ejemplo 1.1.12. Si X es una variedad diferenciable de dimensión n y $\Gamma(\Lambda^k(X))$ son las k -formas diferenciales sobre X , se tiene el prehaz $\Omega_X^k : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{A}$ definido por: $\Omega_X^k(U) = \Gamma(U, \Lambda^k(X)) = \Omega^k(U)$, y si $i : U \rightarrow V$ es una inclusión, $\Omega_X^k(i) = \rho_{VU} : \Gamma(V, \Lambda^k(X)) \rightarrow \Gamma(U, \Lambda^k(X))$ es el morfismo

$$\rho_{VU} \left(\sum_{j_1 < \dots < j_k} f_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \dots dx^{j_k} \right) = \sum_{j_1 < \dots < j_k} f_{j_1 \dots j_k}|_U dx^{j_1} \dots dx^{j_k},$$

donde $f_{j_1 \dots j_k} : V \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables. El morfismo de restricción ρ_{VU} también se nota i_{VU}^* . Si ω es una n -forma definida en X , la restricción $i_{XU}^*(\omega)$ de ω a un abierto U de X se notará simplemente $\omega|_U$. Análogamente podemos definir el prehaz de k -formas diferenciales a valores complejos $\Omega_{X, \mathbb{C}}^k$.

Ejemplo 1.1.13. Si X e Y son espacios topológicos, sea $F : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{Ses}$ el funtor dado por

$$F(U) = \{f : U \rightarrow Y \mid f \text{ es continua}\} = C(U, Y)$$

$$F(U \rightarrow V)(f : V \rightarrow Y) = f|_U : U \rightarrow Y.$$

El funtor F define un prehaz de conjuntos sobre el espacio topológico X . Si X e Y son variedades diferenciables podemos también definir el prehaz de funciones diferenciables $F : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{Ses}$ dado por $F(U) = C^\infty(U, Y)$. A estos haces los notaremos indistintamente por Y_X , quedando claro del contexto cual de ellos estamos utilizando.

Definición 1.1.14. Decimos que un prehaz F sobre X es un *haz* si para cada abierto $U \subset X$, cada cubrimiento abierto $\{U_i \mid i \in I\}$ de U y cada familia $(a_i)_{i \in I}$, con $a_i \in F(U_i)$, tal que

$$a_i|_{U_i \cap U_j} = a_j|_{U_i \cap U_j}$$

para cada par de índices $i, j \in I$, entonces se verifica que existe un único $a \in F(U)$ tal que

$$a|_{U_i} = a_i.$$

Es decir, F es un haz si dada cualquier familia (a_i) como antes, que se pegan bien en las intersecciones, entonces podemos obtener un elemento a pegando todos los a_i .

Como se puede apreciar de la definición anterior, los haces prestan fundamental atención a los datos locales, los cuales se pierden completamente considerando prehaces. Para clarificar esta idea, sea G un grupo y consideremos el prehaz $F_G : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{G}$ que a cada abierto no vacío U de X le asigna el grupo G y a cada inclusión, la identidad $G \rightarrow G$.⁸ Sea ahora U un abierto desconexo de X y sean U_1 y U_2 sus componentes. Luego, $F_G(U) = F_G(U_1) = F_G(U_2) = G$. Si ahora $g_i \in F_G(U_i) = G$, $i = 1, 2$ son dos elementos distintos de G , entonces debería existir un elemento $g \in G$ tal que $g = g_1 = g_2$, lo que claramente es una contradicción. Esto dice precisamente que el prehaz F_G no es un haz.

Consideremos ahora el prehaz de funciones continuas $\underline{\mathbb{R}}_X$. Para comparar con el caso anterior, sea U como antes. Luego, $\underline{\mathbb{R}}_U = \underline{\mathbb{R}}_{U_1} \oplus \underline{\mathbb{R}}_{U_2}$, cosa que no ocurría en el ejemplo anterior.

Ejemplo 1.1.15. El prehaz constante \underline{G} definido previamente es un haz, como se puede verificar inmediatamente.

Ejemplo 1.1.16. Si F es un haz sobre X y $U \subset X$ es abierto, entonces la restricción $F|_U = F_U$ resulta un haz.

Ejemplo 1.1.17. Considerar el prehaz $[-, \Omega Y] : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{G}$, donde \mathcal{G} es la categoría de grupos y sea $U = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$. Para la inclusión $i_{\alpha} : V_{\alpha} \rightarrow U$, se tiene el morfismo $i_{\alpha}^* : [U, \Omega Y] \rightarrow [V_{\alpha}, \Omega Y]$ dado por

$$i_{\alpha}^*([f]) = [fi_{\alpha}],$$

donde los corchetes indican clase de homotopía. Sea y_0 el punto base del espacio Y y sea cte_{y_0} el lazo constante en y_0 . Entonces, para cualquier subconjunto V de X , el elemento neutro del grupo $[V, \Omega Y]$ es la clase $[\text{cte}_{y_0}]$.

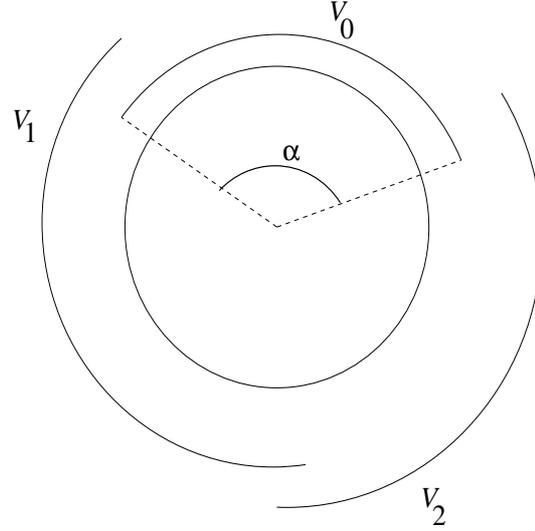
Lo primero que debe cumplir $[-, \Omega Y]$ para ser un haz es lo siguiente: si $f : U \rightarrow \Omega Y$ es una función continua tal que $[fi_{\alpha}] = [\text{cte}_{y_0}] = 0$, entonces debe pasar que $[f] = 0$, o sea f es homotópica a la función constante $U \rightarrow \Omega Y$, $x \mapsto \text{cte}_{y_0}$. Veamos que en general esto no se cumple.

Considerar $U = X = S^1$ y sea $Y = \mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Por un resultado de Milnor (ver [Mil56]) se tiene una equivalencia de homotopía

$$S^1 \simeq \Omega \mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty}.$$

Sean V_0, V_1, V_2 los siguientes abiertos de S^1 :

⁸Algunos autores definen al prehaz constante en G por el funtor F_G .



e $i_k : V_k \rightarrow S^1$ ($k = 0, 1, 2$) las inclusiones. El conjunto V_0 se puede expresar como

$$V_0 = \{e^{i\alpha t} : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Sea entonces $H_0 : V_0 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ la función dada por

$$H_0(e^{i\alpha t}, s) = e^{i\alpha(1-s)t}.$$

Esta función continua define una homotopía entre i_0 y la función constante en el punto $1 \in S^1$. En general, se tiene que, para cada k , i_k es homotópica a la función constante en 1, situación que notamos $i_k \simeq \text{cte}_1$.

Sea ahora $f : S^1 \rightarrow \Omega\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ una equivalencia de homotopía y sea g su inversa. Sea $\text{cte}_1 : V_k \rightarrow S^1$ la función constante en 1. Entonces

$$fi_k \simeq f\text{cte}_1 = \text{cte}_{f(1)} : V_k \rightarrow \Omega\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty.$$

Si f fuera homotópica a la función constante $\text{cte}_{f(1)} : S^1 \rightarrow \Omega\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$, $x \mapsto f(1)$, entonces se tendría que

$$\text{id}_{S^1} \simeq gf \simeq g\text{cte}_{f(1)} = \text{cte}_{g(f(1))},$$

lo que es absurdo.

Ejemplo 1.1.18. Los prehaces Ω_X^k e Y_X son haces, como se puede verificar fácilmente.

Dado un abierto U de X , consideremos la relación de equivalencia \sim en $Y_X(U) = C(U, Y)$ definida por: $f \sim g$ si y solo si existe un abierto $W \subset U$ tal que $f|_W = g|_W$. Entonces el funtor dado por $U \mapsto Y_X(U)/\sim$ es un haz, llamado el *haz de gérmenes* de funciones continuas. El mismo haz se puede definir también para funciones diferenciables. Notaremos a este haz por \underline{Y}_X^0 .

Ejemplo 1.1.19. Sean F y G haces de grupos sobre X . Definimos el funtor $F \oplus G : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{G}_r$ por

$$(F \oplus G)(U) = F(U) \oplus G(U)$$

$$(F \oplus G)(U \rightarrow V) = (F(U \rightarrow V), G(U \rightarrow V)).^9$$

Este funtor resulta un haz y se llama la *suma directa* de F y G . Más generalmente, dada una familia de haces de grupos $(F_i)_{i \in I}$, el producto $F = \prod_{i \in I} F_i$ definido por

$$F(U) = \prod_{i \in I} F_i(U)$$

es un haz. El caso del prehaz $F = \bigoplus_{i \in I} F_i$ es diferente, ya que, a menos que I sea finito, puede no ser un haz.

Al igual que para los prehaces, los haces sobre un espacio topológico X a valores en la categoría \mathcal{C} forman una categoría.

La noción de morfismo es la misma que para los prehaces.

Definición 1.1.20. Sea F un haz de conjuntos (resp. grupos) sobre el espacio X . Un haz G se dice un *subhaz* del haz F si y solo si

1. para cada abierto U de X , $G(U)$ es un subconjunto (resp. subgrupo) de $F(U)$ y
2. si $V \subset U$ y ρ_{UV}, τ_{UV} son los morfismos de restricción para F y G respectivamente, entonces $\tau_{UV} = \rho_{UV}|_{G(U)}$.

Gérmenes y Haces Asociados.

En esta sección, cuando se diga haz, estaremos haciendo referencia a un haz de conjuntos ó grupos.¹⁰

Definición 1.1.21. Sea x un punto del espacio topológico X y F un prehaz sobre X . El *germen* de F en x , notado F_x es el objeto definido por

$$F_x = \coprod_{U \ni x} F(U) / \sim,$$

donde la relación de equivalencia \sim , normalmente llamada *relación de gérmenes*, viene dada por: si $a \in F(U)$ y $a' \in F(V)$, entonces $a \sim a'$ si y solo si existe un abierto W , con $x \in W \subset U \cap V$ tal que $\rho_{UW}(a) = \rho_{VW}(a')$. La clase de equivalencia de $a \in F(U)$ se notará a_x .

Recordar que si F es un haz de grupos, el coproducto \coprod en la categoría \mathcal{G}_r es la suma directa.

Siendo $\{U \in \text{Open}(X) \mid x \in U\}$ una categoría filtrante, con las inclusiones como morfismos, se puede dar una definición equivalente de germen, vía colímites:

$$F_x = \text{colim}_{x \ni U} F(U).$$

⁹Si $f : G \rightarrow H$ y $f' : G' \rightarrow H'$ son homomorfismos de grupos, definimos el homomorfismo $(f, f') : G \oplus G' \rightarrow H \oplus H'$, también notado $f \oplus g$, por $(f, f')(g, g') = (f(g), f'(g'))$. La misma consideración se aplica al producto directo.

¹⁰Lo desarrollado en esta sección podría hacerse en general para haces a valores en cualquier categoría que tenga colímites filtrantes.

Ejemplo 1.1.22. Considerando el haz de gérmenes de funciones continuas sobre el espacio topológico X del ejemplo 1.1.18, si $x \in X$, entonces la clase f_x de una aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto de aplicaciones $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, con $x \in V$, para las cuales existe una vecindad W de x , $W \subset U \cap V$, tal que f y g coinciden en el abierto W . La clase f_x de una función f se llama el *germen de f en x* .

Ejemplo 1.1.23. Sea G un grupo y consideremos el haz constante \underline{G} . Entonces, para cada $x \in X$, la aplicación $\varphi_x : \underline{G}_x \rightarrow G$ dada por

$$\varphi_x(f_x) = f(x)$$

es un isomorfismo de grupos.

Dados dos haces de conjuntos ó grupos F y G sobre el espacio X y un morfismo de haces $\theta : F \rightarrow G$, para cada $x \in X$ queda inducido un morfismo de gérmenes $\theta_x : F_x \rightarrow G_x$, dado por

$$\theta_x(a_x) = \theta(a)_x.$$

Lema 1.1.24. Sean F y F' dos subhaces de un haz G . Entonces $F = F'$ si y solo si los gérmenes $F_x, F'_x \subset G_x$ coinciden.

Demostración. Sea U un abierto de X y $a \in F(U) \subset G(U)$. Si $x \in U$, entonces $a_x \in F_x = F'_x$. Luego, sea $V \subset X$ un abierto, tal que $x \in V$ y $a' \in F'(V)$, con $a'_x = a_x$. En particular, $a \in G(U)$ y $a' \in G(V)$; luego, existe un abierto $W_x \subset U \cap V$ tal que $a|_{W_x} = a'|_{W_x}$. Llamemos $a'(x) \in F'(W_x)$ a $a'|_{W_x}$.

Haciendo esto para cada $x \in U$ obtenemos un cubrimiento $\{W_x \mid x \in U\}$ de U y una familia $\{a'(x) \mid x \in U\}$ tal que, para cada $x \in U$,

$$a|_{W_x} = a'(x).$$

Luego, al ser F' un haz, podemos asegurar la existencia de un elemento $a' \in F'(U)$ tal que $a'|_{W_x} = a'(x) = a|_{W_x}$. Y, como G es un haz, necesariamente $a = a'$. Q.E.D.

Sea ahora G un grupo; definimos a continuación un nuevo haz de grupos con una particularidad: está "concentrado" en un punto x del espacio X . Dado $x \in X$, se define el haz *rascacielos* \underline{G}_x por

$$\underline{G}_x(U) = \begin{cases} G, & \text{si } x \in U, \\ 0, & \text{si no,} \end{cases}$$

donde 0 indica el grupo trivial. La verificación de que \underline{G}_x es un haz es inmediata. Y tiene la particularidad de que, si y es un elemento distinto de x en X , $(\underline{G}_x)_y = 0$ y para x , $(\underline{G}_x)_x = G$. Por esto el nombre rascacielos.

La construcción de gérmenes permite dar una nueva interpretación de un haz de conjuntos o grupos sobre un espacio topológico X . Para fijar ideas, sea $F : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{G}$ un haz de grupos, y consideremos el conjunto

$$\mathcal{E}(F) = \coprod_{x \in X} F_x.$$

Tenemos entonces una proyección canónica $\pi : \mathcal{E}(F) \rightarrow X$ dada por $\pi(a_x) = x$. Dado ahora un abierto U de X , llamemos $\rho_{U,x}$ a la aplicación canónica al colímite $F(U) \rightarrow F_x$, para $x \in U$. Topologizamos al conjunto $\mathcal{E}(F)$ definiendo como base de abiertos a los conjuntos

$$O_{U,a} = \{\rho_{U,x}(a) \mid x \in U\},$$

para $U \in \text{Open}(X)$ y $a \in F(U)$. Es decir, la base de abiertos está formada por las imágenes de las aplicaciones $U \rightarrow \coprod_{x \in U} F_x$, $x \mapsto \rho_{U,x}(a)$. Como se puede esperar, no será una topología agradable; como ejemplo, el espacio $\mathcal{E}(F)$ con esta topología generalmente ni siquiera resulta un espacio de Hausdorff.

Definición 1.1.25. El espacio topológico $\mathcal{E}(F)$ se llama el *espacio étale* del haz F .

Dado un abierto U de X , una aplicación continua $s : U \rightarrow \coprod_{x \in U} F_x$ se llama una *sección* sobre U si $s(x) \in F_x$; equivalentemente si $\pi s = \text{id}$. Llamemos $\Gamma(U, F)$ al conjunto de secciones continuas definidas sobre U . Siendo F un haz de grupos, podemos multiplicar secciones, obteniendo así una estructura de grupo en $\Gamma(U, F)$. Definiendo ahora el funtor $\Gamma_F : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{G}$ por $\Gamma_F(U) = \Gamma(U, F)$ se obtiene, como se puede verificar directamente, un haz de grupos que llamaremos \widehat{F} . Y si en lugar de partir de un haz partimos de un prehaz F , entonces \widehat{F} sigue siendo un haz. Mas aún, vale la siguiente

Proposición 1.1.26. Sea F un prehaz de grupos. Entonces F es un haz si y solo si es naturalmente isomorfo al haz \widehat{F} .

Demostración. Por un lado, si F es naturalmente isomorfo a \widehat{F} , entonces resulta un haz, puesto que \widehat{F} lo es. Si ahora F es un haz, entonces resulta naturalmente isomorfo a \widehat{F} definiendo la transformación natural $\theta : F \rightarrow \widehat{F}$ dada por

$$\theta_U(a)(x) = \rho_{U,x}(a).$$

Q.E.D.

El resultado precedente sugiere la siguiente

Definición 1.1.27. Si F es un prehaz, el haz \widehat{F} se llama el *haz asociado* a F .

Ejemplo 1.1.28. Si F y G son haces de grupos abelianos sobre X , entonces el prehaz $F \otimes G$ no siempre resulta un haz. Luego, llamamos $F \otimes G$ al haz asociado al prehaz $U \mapsto F(U) \otimes G(U)$.

Al conmutar el colímite con la suma directa y el producto tensorial, valen los siguientes isomorfismos

1. $(F \oplus G)_x \cong F_x \oplus G_x$.
2. $(F \otimes G)_x \cong F_x \otimes G_x$.

Dado entonces un haz F , se puede obtener un espacio topológico $\mathcal{E}(F)$ sobre X y viceversa, vía la construcción anterior del haz asociado. Muchos autores definen los haces como espacios topológicos sobre X , definición que veremos en breve.

La demostración de la proposición siguiente se puede ver en [War83].

Proposición 1.1.29. Sea F un haz y $\pi : \mathcal{E}(F) \rightarrow X$ la proyección del espacio étale de F sobre X . Entonces,

1. para cada abierto U de X y cada elemento $a \in F(U)$, la restricción

$$\pi_{U,a} := \pi|_{O_{U,a}} : O_{U,a} \rightarrow \pi(O_{U,a})$$

es un homeomorfismo. Es decir, π es un homeomorfismo local;

2. El producto $\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(x)$ es una aplicación continua.

Y recíprocamente, como los gérmenes en cada punto $x \in X$ determinan completamente el haz, podemos dar entonces la definición equivalente de haz de grupos.

Definición 1.1.30. Un haz de grupos sobre X es un espacio topológico F sobre X , junto con una proyección continua $\pi : F \rightarrow X$ que verifican

1. π es un homeomorfismo local.
2. Para cada $x \in X$, la fibra $\pi^{-1}(x)$ es un grupo.
3. Para cada $x \in X$, la operación del grupo $\pi^{-1}(x)$ es una aplicación continua $\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(x)$.

Sean ahora F y G haces de grupos sobre X y consideremos los isomorfismos naturales $F \rightarrow \widehat{F}$ y $G \rightarrow \widehat{G}$ de 1.1.26. Dado un morfismo de haces $\theta : F \rightarrow G$ queda entonces inducida una aplicación continua, que también llamamos $\theta : \mathcal{E}(F) \rightarrow \mathcal{E}(G)$,

$$\theta(a_x) = \theta(a)_x$$

y luego también, para cada U en X , una aplicación $\widehat{\theta}_U : \widehat{F}(U) \rightarrow \widehat{G}(U)$,

$$\widehat{\theta}(s)(x) = \theta_x(s(x)),$$

que hacen conmutar los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(F) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{E}(G) \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\theta} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{F} & \xrightarrow{\widehat{\theta}} & \widehat{G} \end{array}$$

Ejemplo 1.1.31. Sea G un grupo. Por definición, tenemos que para cada abierto U de X , $\underline{G}_X^0(U) = \underline{G}_X(U) / \sim$, donde \sim es la relación de gérmenes. Llamemos π a la proyección al cociente; es decir, $\pi_U : \underline{G}_X^0(U) \rightarrow \underline{G}_X(U) / \sim$. Un cálculo directo muestra que, para cada $x \in X$, $\pi_x : \underline{G}_{X,x} \rightarrow \underline{G}_{X,x}^0$ es un isomorfismo. Podemos entonces definir la aplicación $\pi : \mathcal{E}(\underline{G}_X) \rightarrow \mathcal{E}(\underline{G}_X^0)$ por

$$\pi|_{\underline{G}_{X,x}} = \pi_x,$$

que resulta un homeomorfismo. Luego, los haces \underline{G}_X y \underline{G}_X^0 son naturalmente isomorfos.

Esta construcción del espacio étale de un haz permite definir fácilmente la preimagen de un haz por una aplicación continua. Para eso, sea $f : X \rightarrow Y$ continua y sea F un haz de grupos sobre Y ; podemos considerar a F como el haz de secciones \widehat{F} . La *preimagen de F por f* es el haz $f^{-1}(F)$ que, para un abierto U de X tiene asignado el grupo de secciones continuas $s : U \rightarrow \prod_{x \in X} F_{f(x)}$. De esta definición se aprecia inmediatamente que, dado $x \in X$, el germen de $f^{-1}(F)$ en x es precisamente $F_{f(x)}$.

Usando este haz podemos dar la siguiente

Definición 1.1.32. Sea F un haz sobre X , $K \subset X$ un subconjunto cerrado e $i : K \rightarrow X$ la inclusión. La *restricción $F|_K$* , que también notamos F_K , de F a K es el haz definido por

$$F_K = i^{-1}(F).$$

Lema 1.1.33. Sean F un haz de grupos sobre X , $U \subset X$ un abierto no vacío y $s, s' : U \rightarrow \prod_{x \in U} F_x$ dos secciones para las cuales existe un $x_0 \in U$ tal que $s(x_0) = s'(x_0)$. Entonces existe una vecindad $V \subset U$ de x_0 tal que $s|_V = s'|_V$.

Demostración. Podemos considerar a s y s' como elementos de $F(U)$. Entonces se verifica que las clases s_{x_0} y s'_{x_0} en F_{x_0} coinciden. Luego, por definición de relación de gérmenes, existe una vecindad V de x_0 contenida en U tal que $s|_V = s'|_V$. Q.E.D.

Extensión de un Haz por Cero.

Sea U un subconjunto abierto del espacio X y $F : \text{Open}(U) \rightarrow \mathcal{G}_r$ un haz de grupos sobre U . Consideremos ahora el funtor $F' : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{G}_r$ definido como sigue

$$F' = \begin{cases} F(V) & \text{si } V \subset U, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

donde 0 es el grupo trivial. Este funtor no necesariamente resulta un haz. Consideramos entonces el haz asociado a este prehaz.

Definición 1.1.34. La *completación por cero* del haz F es el haz \widehat{F} . Se notará \overline{F} .

De la definición se desprende inmediatamente que el germen de \overline{F} en un punto $x \in U$ es igual al germen F_x y es 0 para $x \notin U$, como así también que la restricción \overline{F}_U es igual, como es de esperar, a F . Mas aún, \overline{F} es el único haz con estas propiedades.

Extensión de la Definición de Haz.

En lo que sigue se encontrará que es necesario definir un haz solo en ciertos abiertos del espacio X , y no en todos. Más detalles pueden verse en [EH00].

Definición 1.1.35. Sea \mathfrak{B} una base de abiertos de un espacio topológico X , considerada como una categoría, donde los morfismos son las inclusiones. Un funtor $F : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{A}$ se llama un \mathfrak{B} -prehaz. Se dice que F es un \mathfrak{B} -haz si cumple la condiciones de la definición de haz, considerando abiertos de \mathfrak{B} y cubrimientos

por abiertos también de \mathfrak{B} , y, en lugar de pedir que $\rho_{V_\alpha V_{\alpha\beta}}(g_\alpha) = \rho_{V_\beta V_{\alpha\beta}}(g_\beta)$, se debe pedir que para cada abierto $V \in \mathfrak{B}$ con $V \subset V_{\alpha\beta}$, se cumpla que $\rho_{V_\alpha V}(g_\alpha) = \rho_{V_\beta V}(g_\beta)$.

Proposición 1.1.36. *Si \mathfrak{B} es una base de abiertos de un espacio topológico X , entonces todo \mathfrak{B} -haz F se extiende de forma única a un haz \tilde{F} sobre X .*

Demostración. Definimos la extensión \tilde{F} por

$$\tilde{F}(U) = \lim_{U \supset V \in \mathfrak{B}} F(V),$$

donde \lim es el objeto dual al colímite; ver [ML71].

Q.E.D.

Corolario 1.1.37. *Sea \mathfrak{U} un cubrimiento abierto del espacio topológico X . Suponer que para cada $U \in \mathfrak{U}$, F_U es un haz sobre U y, si $U, V, W \in \mathfrak{U}$ son abiertos cualesquiera con intersección no vacía, las aplicaciones*

$$\rho_{UV} : F_U|_{U \cap V} \rightarrow F_V|_{U \cap V}$$

son isomorfismos que satisfacen

$$\rho_{VW}\rho_{UV} = \rho_{UW}$$

en $U \cap V \cap W$. Entonces existe un único haz F cuya restricción a cada $U \in \mathfrak{U}$ es F_U .

Cohomología con Coeficientes en un Haz.

Sea ahora X un espacio topológico, I un conjunto de índices y $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de X . Consideramos el conjunto \mathfrak{U} como una categoría cuyos objetos son los abiertos U_i y morfismos las inclusiones. Sea $F : \mathfrak{U} \rightarrow \mathcal{A}$ un haz de grupos abelianos. Se definen las 0-cocadenas con valores en el haz F como el conjunto de funciones que asignan a cada U_i un elemento del grupo abeliano $F(U_i)$. Si se denota a las 0-cocadenas por $C^0(\mathfrak{U}, F)$, entonces

$$C^0(\mathfrak{U}, F) = \prod_{i \in I} F(U_i).$$

Las 1-cocadenas son los elementos del grupo

$$C^1(\mathfrak{U}, F) = \prod_{(i,j) \in I^2} F(U_i \cap U_j),$$

. En general, usando la notación $U_{i_0 \dots i_n}$ para $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}$, las n -cocadenas son los elementos de $\prod_{(i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}} F(U_{i_0 \dots i_n})$.

Se tienen las inclusiones $\partial_k : U_{i_0 \dots i_n} \rightarrow U_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_n}$, donde \hat{i}_k indica que el conjunto U_{i_k} fue omitido. Estas inclusiones inducen entonces morfismos de restricción $F(\partial_k) : F(U_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_n}) \rightarrow F(U_{i_0 \dots i_n})$. Se define ahora un homomorfismo de grupos $\delta^n = \delta : C^n(\mathfrak{U}, F) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{U}, F)$ de la siguiente manera: Sea ω una n -cocadena. Entonces ω se puede representar como una upla $(\omega_{i_0 \dots i_n})$, donde $\omega_{i_0 \dots i_n} \in \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_n})$;

la imagen de ω por el morfismo δ está en $C^{n+1}(\mathfrak{U}, F)$. Si $(\delta\omega)_{i_0 \dots i_{n+1}}$ es la coordenada $i_0 \dots i_{n+1}$ de $\delta\omega$, entonces se define

$$\begin{aligned} (\delta\omega)_{i_0 \dots i_{n+1}} &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \omega_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{n+1}} |_{U_{i_0 \dots i_{n+1}}} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j F(\partial_j)(\omega_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{n+1}}) \end{aligned}$$

La expresión $F(\partial_j)(\omega_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{n+1}}) = \omega_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{n+1}} |_{U_{i_0 \dots i_{n+1}}}$ se abreviará generalmente por $\omega_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{n+1}}$, quedando claro del contexto a que conjunto se restringe.

Lema 1.1.38. *La sucesión de morfismos y grupos abelianos*

$$0 \rightarrow C^0(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \dots \rightarrow C^n(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{\delta} C^{n+1}(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \dots$$

es un complejo de cocadenas.

En general, un complejo como el anterior se nota $(C^n(\mathfrak{U}, F), \delta^n)_{n \geq 0}$, $(C^\bullet(\mathfrak{U}, F), \delta)$ o simplemente por $C^\bullet(\mathfrak{U}, F)$.

Demostración. Solo se debe verificar que $\delta^2 = 0$.

$$\begin{aligned} (\delta(\delta\omega))_{i_0 \dots i_{n+2}} &= \sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j (\delta\omega)_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{n+2}} \\ &= \sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \omega_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_k \dots i_{n+2}} \\ &= \sum_{j < k} (-1)^j (-1)^{k-1} \omega_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_k \dots i_{n+2}} + \sum_{k < j} (-1)^j (-1)^k \omega_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots \hat{i}_j \dots i_{n+2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Los elementos $\omega \in C^n(\mathfrak{U}; F)$ tales que $\delta\omega = 0$ se llaman *n-cociclos de Čech asociados al cubrimiento \mathfrak{U}* . Notaremos $Z^n(\mathfrak{U}; F)$ al subgrupo formado por dichos elementos; si ω es una *n-cocadena* para la cual existe una $(n-1)$ -cocadena τ y $\delta\tau = \omega$, entonces ω se llama un *n-coborde de Čech asociado al cubrimiento \mathfrak{U}* . El subgrupo de *n-cobordes* se notará $B^n(\mathfrak{U}; F)$. Como $\delta^2 = 0$, todo coborde es un cociclo. Se define entonces el *n-ésimo grupo de cohomología de Čech de \mathfrak{U} con coeficientes en F* como

$$H^n(\mathfrak{U}; F) = Z^n(\mathfrak{U}; F) / B^n(\mathfrak{U}; F).$$

La notación $H^\bullet(\mathfrak{U}; F)$ es la utilizada para representar a todos los grupos de cohomología, es decir $H^\bullet(\mathfrak{U}; F) = (H^n(\mathfrak{U}; F))_{n \geq 0}$. Llamamos a $H^\bullet(\mathfrak{U}; F)$ la *cohomología de Čech del cubrimiento \mathfrak{U} con coeficientes en F* .

Notar que se hubieran obtenido los mismos grupos de cohomología suponiendo que I es un conjunto dirigido y definiendo las *n-cocadenas* como $C^n(\mathfrak{U}; F) = \prod_{i_0 < \dots < i_n} F(U_{i_0 \dots i_n})$.

Ejemplo 1.1.39. Sea $X = S^1$ y \mathfrak{U} el cubrimiento de S^1 del ejemplo 1.1.17. Se obtiene entonces el complejo

$$0 \rightarrow C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

donde

$$\begin{aligned} C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) &= C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ C^n(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) &= 0 \quad (n \neq 0, 1). \end{aligned}$$

El morfismo δ^0 viene dado por

$$\delta^0 \omega = \delta^0(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = (\omega_1 - \omega_0, \omega_2 - \omega_0, \omega_2 - \omega_1)$$

Se tiene entonces que $\ker \delta^0 = H^0(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. En grado 1 se obtiene la siguiente igualdad $H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) = C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{R})/\text{im } \delta^0$. Y como $\text{im } \delta^0 = \{(x_0, x_1, x_2) : x_2 = x_1 + x_3\} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$,

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} / \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}.$$

Proposición 1.1.40. Para cualquier cubrimiento \mathfrak{U} de X y cualquier haz $F : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{A}$, se tiene un isomorfismo

$$H^0(\mathfrak{U}; F) \cong F(X).$$

Demostración. Como $C^n(\mathfrak{U}; F) = 0$ para $n < 0$, vale la igualdad

$$H^0(\mathfrak{U}; F) = \ker \delta = \{\omega \in C^0(\mathfrak{U}; F) \mid \delta\omega = 0\}.$$

Si $\omega = (\omega_i)$, entonces $\omega \in H^0(\mathfrak{U}; F)$ si y solo si $0 = \delta(\omega_i) = (\omega_j - \omega_i)$, o sea, para cada par de índices i, j , $\omega_i = \omega_j$ en $F(U_{ij})$. En otras palabras, las restricciones de ω_i y ω_j a $F(U_{ij})$ coinciden. Sea entonces $\Phi : F(X) \rightarrow H^0(\mathfrak{U}; F)$ el homomorfismo dado por

$$\Phi(\omega) = (\omega|_{U_i}).$$

De la definición de haz se desprende fácilmente que este homomorfismo es entonces biyectivo: de la existencia del elemento a definido globalmente (en la definición) se desprende la sobreyectividad y de la unicidad la inyectividad. Q.E.D.

Observación 1. En realidad Φ es un isomorfismo si y solo si F es un haz.

Definición 1.1.41. Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ dos cubrimientos de X por subconjuntos abiertos. Se dice que \mathfrak{V} es un *refinamiento* de \mathfrak{U} , notado $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{V}$ si y solo si existe una función $\phi : J \rightarrow I$ tal que, para cada $j \in J$, $V_j \subset U_{\phi(j)}$.

La aplicación $\phi : J \rightarrow I$ de la definición anterior induce una aplicación entre los complejos de cocadenas $\phi_{\#} : C^{\bullet}(\mathfrak{U}; F) \rightarrow C^{\bullet}(\mathfrak{V}; F)$, o sea, para cada $n \geq 0$ se tiene un homomorfismo de grupos $\phi_{\#} : C^n(\mathfrak{U}; F) \rightarrow C^n(\mathfrak{V}; F)$ dado por

$$(\phi_{\#}(\omega))_{j_0 \dots j_n} = \omega_{\phi(j_0) \dots \phi(j_n)}|_{U_{i_0 \dots i_n}}.$$

También usaremos la notación $(\phi_{\#}(\omega))_{j_0 \dots j_n} = \omega_{\phi(j_0) \dots \phi(j_n)}$.

La demostración del siguiente lema es inmediata.

Lema 1.1.42. $\phi_{\#} : C^{\bullet}(\mathfrak{U}; F) \rightarrow C^{\bullet}(\mathfrak{V}; F)$ es un morfismo de complejos; esto es, para cada $n \geq 0$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^n(\mathfrak{U}, F) & \xrightarrow{\delta} & C^{n+1}(\mathfrak{U}, F) \\ \phi_{\#} \downarrow & & \downarrow \phi_{\#} \\ C^n(\mathfrak{V}, F) & \xrightarrow{\delta} & C^{n+1}(\mathfrak{V}, F) \end{array}$$

conmuta.

Ahora bien, si $[\omega] = [\omega']$ en $H^n(\mathfrak{U}; F)$, entonces $\omega - \omega'$ es un n -coborde, con lo cual existe una $(n-1)$ -cocadena τ tal que $\delta\tau = \omega - \omega'$. Luego, $\omega = \omega' + \delta\tau$ y $\phi_{\#}(\omega) = \phi_{\#}(\omega') + \phi_{\#}(\delta\tau)$. Pero $\phi_{\#}$ es un homomorfismo de complejos, y luego $\phi_{\#}(\delta\tau) = \delta\phi_{\#}(\tau)$, de donde se deduce entonces que

$$\phi_{\#}(\omega) = \phi_{\#}(\omega') + \delta\phi_{\#}(\tau).$$

Tomando clase de cohomología en esta igualdad se llega a que

$$[\phi_{\#}(\omega)] = [\phi_{\#}(\omega')],$$

lo que prueba la buena definición, para cada $n \geq 0$, de los homomorfismos en las cohomologías $\phi_{\bullet} : H^n(\mathfrak{U}; F) \rightarrow H^n(\mathfrak{V}; F)$ dados por

$$\phi_{\bullet}([\omega]) = [\phi_{\#}(\omega)].$$

Lema 1.1.43. Sea $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de X y $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un refinamiento. Sean $\phi, \psi : J \rightarrow I$ funciones tales que $V_j \subset U_{\phi(j)}$ y $V_j \subset U_{\psi(j)}$. Entonces existe un operador de homotopía $K : C^{\bullet}(\mathfrak{U}, F) \rightarrow C^{\bullet-1}(\mathfrak{V}, F)$ tal que

$$\psi_{\#} - \phi_{\#} = \delta K + K \delta.$$

Demostración. El operador buscado $K : C^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ es el definido por la fórmula

$$(K\omega)_{j_0 \dots j_n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \omega_{\phi(j_0) \dots \phi(j_k) \psi(j_k) \dots \psi(j_n)}.$$

Q.E.D.

Sea ahora $\text{Cov}(X)$ el conjunto de cubrimientos de X . Si \mathfrak{U} y \mathfrak{V} son cubrimientos, está definida una flecha $\mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{U}$ si y solo si \mathfrak{V} refina a \mathfrak{U} , o sea $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{V}$. Así, $\text{Cov}(X)$ resulta una categoría. Si $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ y $\mathfrak{V} = \{V_j \mid j \in J\}$ son cubrimientos de X , un refinamiento de ambos es el cubrimiento $\{U_i \cap V_j \mid (i, j) \in I \times J\}$ junto con las proyecciones canónicas $\pi_1 : I \times J \rightarrow I$ y $\pi_2 : I \times J \rightarrow J$.

Así, para cada entero n se tiene bien definido un funtor

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &\mapsto H^n(\mathfrak{U}; F) \\ (\mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{U}) &\mapsto (H^n(\mathfrak{U}; F) \xrightarrow{\phi_{\bullet}} H^n(\mathfrak{V}; F)) \end{aligned}$$

de la categoría de cubrimientos de X en la categoría de grupos abelianos. El colímite de este funtor,

$$\check{H}^n(X; F) = \operatorname{colim}_{\mathfrak{U}} H^n(\mathfrak{U}; F)$$

es el n -ésimo grupo de cohomología de Čech del espacio X con coeficientes en el haz F . Al igual que para la cohomología de un cubrimiento, cuando no se haga distinción del grado considerado, notaremos la cohomología de Čech del espacio X por $\check{H}^\bullet(X; F)$.

Observación 2. De acuerdo a lo expuesto anteriormente, se pueden calcular también los grupos

$$\check{C}^n(X; F) := \operatorname{colim}_{\mathfrak{U}} C^n(\mathfrak{U}; F).$$

Esta construcción da como resultado un complejo de cocadenas $\check{C}^\bullet(X; F)$ y la cohomología de este complejo resulta isomorfa a la cohomología de Čech; ver [Bre97].

Sea $\theta : F \rightarrow G$ un homomorfismo de haces y $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X . La transformación natural θ da origen a un homomorfismo de complejos $\theta_\bullet : C^\bullet(\mathfrak{U}; F) \rightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}; G)$ definido por

$$\theta_\bullet(\omega_{i_0 \dots i_n}) = \theta_{U_{i_0 \dots i_n}}(\omega_{i_0 \dots i_n}).$$

Este homomorfismo pasa a las cohomologías $\theta_\bullet^n = \theta_\bullet : H^n(\mathfrak{U}; F) \rightarrow H^n(\mathfrak{U}; G)$ del cubrimiento \mathfrak{U} definiendo

$$\theta_\bullet([\omega_{i_0 \dots i_n}]) = [\theta_{U_{i_0 \dots i_n}}(\omega_{i_0 \dots i_n})].$$

Y entonces, tomando colímites, llegamos a

$$\theta_\bullet : \check{H}^n(X; F) \rightarrow \check{H}^n(X; G).$$

Buenos Cubrimientos...ó Cómo Calcular Cohomologías.

Los resultados siguientes dan una caracterización muy útil a la hora de querer calcular la cohomología de Čech de una variedad X . Las demostraciones de los resultados fundamentales se pueden encontrar en [God58] y [Bre97].

Definición 1.1.44. Sea $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un cubrimiento abierto de la variedad suave X , con $\dim X = k$. Se dice que \mathfrak{U} es un *buen cubrimiento* si todas las intersecciones no vacías $U_{i_0 \dots i_n}$ son difeomorfas a \mathbb{R}^k .

Se vió anteriormente que, dados cubrimientos abiertos \mathfrak{U} y \mathfrak{V} de una variedad X , entonces se puede encontrar un *refinamiento* para \mathfrak{U} y \mathfrak{V} . Considerando la relación de inclusión, el conjunto de todos los cubrimientos abiertos de X resulta ser un conjunto dirigido.

Definición 1.1.45. Sea I un conjunto dirigido. Un subconjunto $J \subset I$ se dice que es *cofinal* en I si y solo si para cada i en I existe un j en J tal que $i < j$. Notar que en ese caso, J también es un conjunto dirigido.

A partir de la definición de colímite filtrante se puede verificar fácilmente que, si I es un conjunto dirigido y $J \subset I$ es cofinal, tomar colímite sobre el subconjunto J da el mismo resultado que tomarlo sobre I .

La demostración del siguiente teorema se puede ver en [BT82].

Teorema 1.1.46. *Dada una variedad X y \mathfrak{U} un cubrimiento arbitrario, existe un buen cubrimiento \mathfrak{V} de X que refina a \mathfrak{U} .*

Es decir, toda variedad X tiene buenos cubrimientos y el subconjunto del conjunto de cubrimientos abiertos de X formado por los buenos cubrimientos es cofinal en dicho conjunto. Esto permite entonces restringirnos a los buenos cubrimientos al tomar colímite para definir la cohomología de Čech de X . Es decir, para cada n vale la igualdad

$$\check{H}^n(X; F) = \operatorname{colim}_{\mathfrak{U}} H^n(\mathfrak{U}; F),$$

donde el colímite se toma ahora sobre el subconjunto de buenos cubrimientos de X .

El siguiente resultado es el que muestra la importancia de estos buenos cubrimientos. La demostración se puede ver en [God58].

Proposición 1.1.47. *Si \mathfrak{U} es un buen cubrimiento de la variedad X , entonces el homomorfismo natural $H^n(\mathfrak{U}; F) \rightarrow \check{H}^n(X; F)$ es un isomorfismo para cada n .*

El Isomorfismo entre las Cohomologías de Čech y de Rham.

Por simplicidad, veremos solo el caso para $n = 2$. Es decir, se probará que $H^2(X; \mathbb{C}) \cong \check{H}^2(X; \mathbb{C})$. El caso general es análogo. Para discusiones más detalladas y generales se pueden consultar las referencias [God58], [Bre97], [Bry92], [BT82], entre otras.

Sea $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un buen cubrimiento de la variedad X y sea θ una 2-forma cerrada en X . Como cada $U_i \in \mathfrak{U}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^k , entonces $H^2(U_i; \mathbb{C}) = 0$ para todo $i \in I$, y luego, si $\theta_i = \theta|_{U_i}$ es la restricción de θ al abierto U_i , $[\theta_i] = 0$, donde los corchetes indican clase de cohomología. Esto es, θ_i es exacta en U_i y luego existe una 1-forma ω_i definida en U_i tal que

$$d\omega_i = \theta_i.$$

Ahora bien, $U_{ij} \neq \emptyset$ es también homeomorfo a \mathbb{R}^k , y entonces $H^2(U_{ij}; \mathbb{C}) = 0$, con lo cual, al ser $\omega_i - \omega_j$ cerrada en U_{ij} , se tiene que existe una 0-forma $f_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$df_{ij} = \omega_i - \omega_j.$$

En U_{ijk} vale la igualdad $d(f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}) = 0$ y luego, al ser \mathfrak{U} un buen cubrimiento, las aplicaciones $f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}$ son constantes sobre U_{ijk} , digamos

$$f_{ij} + f_{jk} - f_{ik} = a_{ijk} \in \mathbb{C}.$$

Las constantes a_{ijk} forman una 2-cocadena de Čech $a = (a_{ijk}) \in C^2(\mathfrak{U}; \mathbb{C})$. Aplicando el homomorfismo δ y haciendo un cálculo directo se llega a que a es en realidad un 2-cociclo y luego define una clase de cohomología $[a] \in H^2(\mathfrak{U}; \mathbb{C}) \cong \check{H}^2(X; \mathbb{C})$.

Se puede verificar que esta clase no depende del buen cubrimiento elegido, ni de la elección de las formas ω_i y f_{ij} . Es decir, queda bien definido un homomorfismo

$$\alpha : H^2(X; \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^2(X; \underline{\mathbb{C}})$$

$$[\theta] \mapsto [a],$$

que resulta ser biyectivo.

1.1.4. Sucesiones Exactas de Haces.

Sea $\theta : F \rightarrow G$ un morfismo de haces de grupos. Se definen los prehaces *núcleo* e *imagen* de θ por

$$(\text{Ker } \theta)(U) = \ker \theta_U \quad , \quad (\text{Ker } \theta)(U \rightarrow V) = \rho_{VU} | \ker \theta_V : \ker \theta_V \rightarrow \ker \theta_U$$

$$(\text{Im } \theta)(U) = \text{im } \theta_U \quad , \quad (\text{Im } \theta)(U \rightarrow V) = \rho_{VU} | \text{im } \theta_V : \text{im } \theta_V \rightarrow \text{im } \theta_U.$$

Notar que los morfismos están bien definidos ya que θ es una transformación natural.

El prehaz núcleo $\text{Ker } \theta$ resulta un haz, pero la imagen $\text{Im } \theta$ puede no serlo (se puede construir un contraejemplo considerando un espacio X desconexo y recordando que el prehaz $F_G(U) = G$ no es un haz en este caso).

Por ello, si $\theta : F \rightarrow G$ es un morfismo de haces de grupos, se llama haz *imagen* de θ al haz asociado al prehaz $\text{Im } \theta$. Abusando de la notación, notaremos también $\text{Im } \theta$ al haz asociado a este prehaz; siempre que se hable de la imagen de un morfismo de haces el texto hará referencia, sin aclaración, al haz asociado al prehaz $\text{Im } \theta$.

Decimos entonces que el homomorfismo de haces θ es *inyectivo* si $\text{Ker } \theta = 0$, el haz trivial; equivalentemente, si para cada abierto U , $\ker \theta_U = 0$ y *sobreyectivo* si los haces $\text{Im } \theta$ y G son iguales.

Definición 1.1.48. Una sucesión

$$\dots \rightarrow F^{i-1} \xrightarrow{\theta^{i-1}} F^i \xrightarrow{\theta^i} F^{i+1} \rightarrow \dots$$

de haces y morfismos se dice *exacta* si para cada i ,

$$\text{Ker } \theta^i = \text{Im } \theta^{i-1}.$$

Si para cada abierto U de X , la sucesión de grupos

$$\dots \rightarrow F^{i-1}(U) \xrightarrow{\theta_U^{i-1}} F^i(U) \xrightarrow{\theta_U^i} F^{i+1}(U) \rightarrow \dots$$

es exacta, entonces, por la proposición siguiente y exactitud del colímite, la sucesión de haces y morfismos de haces también es exacta. La afirmación recíproca no es válida en general, ya que la sucesión de haces y morfismos

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0 \tag{1.3}$$

puede ser exacta pero la sucesión de grupos

$$0 \rightarrow F'(X) \rightarrow F(X) \rightarrow F''(X) \rightarrow 0$$

no necesariamente lo es. Mas precisamente, la sucesión (1.3) puede ser exacta sin que los morfismos $F(U) \rightarrow F''(U)$ sean sobreyectivos. Para detallar más la situación, consideremos el funtor ev_X de la categoría de haces de grupos abelianos sobre X en la categoría de grupos abelianos dado por

$$\text{ev}_X(F) = F(X).$$

Lema 1.1.49. *El funtor ev_X es exacto a izquierda; esto es, si*

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta en la categoría de haces de grupos abelianos sobre X , entonces la sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$0 \rightarrow F'(X) \rightarrow F(X) \rightarrow F''(X)$$

es exacta.

La exactitud a derecha no vale en general; ver el ejemplo 1.1.52 más abajo.

Un criterio muy útil a la hora de verificar exactitud lo da la siguiente

Proposición 1.1.50. *Una sucesión de haces de grupos y morfismos*

$$0 \rightarrow F' \xrightarrow{\theta'} F \xrightarrow{\theta} F'' \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

es exacta si y solo si, para cada $x \in X$ lo es la sucesión de grupos

$$0 \rightarrow F'_x \xrightarrow{\theta'_x} F_x \xrightarrow{\theta_x} F''_x \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Demostración. Supongamos que la sucesión (1.4) es exacta. Entonces los subhaces $\text{Im } \theta'$ y $\text{Ker } \theta$ de F coinciden. Luego, por el lema 1.1.24, para cada $x \in X$ se verifica la igualdad

$$(\text{Im } \theta')_x = (\text{Ker } \theta)_x,$$

y como $(\text{Im } \theta')_x = \text{im } \theta'_x$ y $(\text{Ker } \theta)_x = \text{ker } \theta_x$, queda verificada la exactitud de (1.5) (la exactitud en F'_x y F''_x es inmediata).

La exactitud de (1.4) se deduce enseguida a partir también de 1.1.24. Q.E.D.

Ejemplo 1.1.51. Sea X una variedad suave y $\mathbb{Z}(1)$ el grupo abeliano $2\pi i\mathbb{Z}$. Consideremos los haces sobre X de funciones diferenciables \mathbb{C}_X y \mathbb{C}_X^* . Entonces la sucesión

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}(1) \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}_X \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}_X^* \rightarrow 0$$

es exacta, donde $\iota_U : \mathbb{Z}(1) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C})$ y $\exp_U : C^\infty(U, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C}^*)$ vienen dadas por

$$\iota_U(2\pi in) = \text{cte}_{2\pi in},$$

$$\exp_U(f)(x) = e^{f(x)}.$$

Ejemplo 1.1.52. Si $X = S^1$ entonces el homomorfismo de grupos $\exp = \exp_{S^1} : C^\infty(S^1, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(S^1, \mathbb{C}^*)$ dado por

$$\exp(f)(x) = e^{f(x)}$$

no es sobreyectivo.

Ejemplo 1.1.53. Sea F un haz (digamos de grupos abelianos para fijar ideas) sobre el espacio topológico X y G un subhaz de F . El prehaz cociente F/G no necesariamente resulta un haz. Definimos entonces el *haz cociente* como el haz asociado al prehaz F/G , y lo notamos, como hicimos con la imagen, F/G . Considerando esto, la sucesión de haces y homomorfismos

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{\pi} F/G \rightarrow 0,$$

resulta exacta, donde ι es la inclusión y π la proyección canónica (esto es básicamente consecuencia de que para cada x se tiene un isomorfismo $(F/G)_x \cong F_x/G_x$).

A pesar de no ser exacto el funtor de evaluación, siempre podemos encontrar abiertos U de X en donde, dado un morfismo sobreyectivo $F \rightarrow G$, el homomorfismo inducido $F(U) \rightarrow G(U)$ también lo sea. Más aún, estos abiertos forman un cubrimiento de X , como veremos a continuación. Para probar esto, se usará la definición equivalente de haz vista anteriormente.

Proposición 1.1.54. Sean F y G haces de grupos sobre X y $\theta : F \rightarrow G$ un morfismo de haces sobreyectivo. Entonces existe un cubrimiento \mathfrak{U} de X tal que, para cada $U \in \mathfrak{U}$, el homomorfismo de grupos $F(U) \rightarrow G(U)$ es sobreyectivo.

Demostración. Considerando la proposición 1.1.29, sea $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un cubrimiento de X tal que las proyecciones $\pi_F : \mathcal{E}(F) \rightarrow X$ y $\pi_G : \mathcal{E}(G) \rightarrow X$ son homeomorfismos locales sobre $\pi_F^{-1}(U_i)$ y $\pi_G^{-1}(U_i)$ respectivamente. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F(U_i) & \xrightarrow{\theta_i} & G(U_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{F}(U_i) & \xrightarrow{\widehat{\theta}_i} & \widehat{G}(U_i), \end{array}$$

donde $\theta_i = \theta_{U_i}$, $\widehat{\theta}_i = \widehat{\theta}_{U_i}$ y las flechas verticales son los isomorfismos naturales entre los haces F y G y sus haces asociados. Basta ver entonces que $\widehat{\theta}_i$ es sobreyectiva.

Sea entonces $t : U_i \rightarrow \coprod_{x \in U} G_x = \pi_G^{-1}(U_i)$ una sección continua. El siguiente diagrama conmutativo nos indica como definir una sección s tal que $\widehat{\theta}_i(s) = t$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_F^{-1}(U_i) & & \\ & \nearrow s & \downarrow & \searrow \pi_F & \\ U_i & \xrightarrow{t} & \pi_G^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\pi_G} & U_i, \end{array}$$

donde la flecha vertical es la aplicación inducida por θ en los gérmenes. Sea entonces $s : U_i \rightarrow \pi_F^{-1}(U_i)$ dada por

$$s = \pi_F^{-1} \pi_G t = \pi_F^{-1}.$$

Como π_G es un homeomorfismo sobre $\pi_G^{-1}(U_i)$ y $\pi_G t = \text{id}$, entonces $t = \pi_G^{-1}$. Luego,

$$\widehat{\theta}_i(s)(x) = \theta_x(s(x)) = \pi_G^{-1}(x) = t(x).$$

Q.E.D.

Volviendo nuevamente al contexto de la cohomología, tenemos el siguiente resultado, cuya demostración se puede ver en [Bre97].

Lema 1.1.55. *Sea \mathfrak{U} un cubrimiento abierto de X . Si $0 \rightarrow F' \xrightarrow{\theta} F \xrightarrow{\eta} F'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de haces, entonces la sucesión*

$$0 \rightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}; F') \xrightarrow{\theta^*} C^\bullet(\mathfrak{U}; F) \xrightarrow{\eta^*} C^\bullet(\mathfrak{U}; F'') \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

es exacta.

A partir de la sucesión (1.6), se obtiene una sucesión exacta larga

$$0 \rightarrow H^0(\mathfrak{U}; F') \xrightarrow{\theta^*} H^0(\mathfrak{U}; F) \xrightarrow{\eta^*} H^0(\mathfrak{U}; F'') \xrightarrow{\partial} H^1(\mathfrak{U}; F') \rightarrow \dots$$

de grupos de cohomología asociados al cubrimiento \mathfrak{U} . Luego, al ser el colímite un funtor exacto por 1.1.6, obtenemos el siguiente

Lema 1.1.56. *La sucesión exacta de haces $0 \rightarrow F' \xrightarrow{\theta} F \xrightarrow{\eta} F'' \rightarrow 0$ induce una sucesión exacta de grupos de cohomología de Čech*

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X; F') \rightarrow \check{H}^0(X; F) \rightarrow \check{H}^0(X; F'') \rightarrow \check{H}^1(X; F') \rightarrow \dots$$

Veamos como se define el morfismo $\partial : H^n(\mathfrak{U}; F'') \rightarrow H^{n+1}(\mathfrak{U}; F')$. Considerar el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^{n-1}(\mathfrak{U}; F') & \xrightarrow{\theta} & C^{n-1}(\mathfrak{U}; F) & \xrightarrow{\eta} & C^{n-1}(\mathfrak{U}; F'') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \\ 0 & \longrightarrow & C^n(\mathfrak{U}; F') & \xrightarrow{\theta} & C^n(\mathfrak{U}; F) & \xrightarrow{\eta} & C^n(\mathfrak{U}; F'') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{n+1}(\mathfrak{U}; F') & \xrightarrow{\theta} & C^{n+1}(\mathfrak{U}; F) & \xrightarrow{\eta} & C^{n+1}(\mathfrak{U}; F'') & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Sea $[a] \in H^n(\mathfrak{U}; F'')$. Entonces $\delta a = 0$. Como η es sobreyectiva, existe $b \in C^n(\mathfrak{U}; F)$ tal que $\eta b = a$; y como $\eta \delta = \delta \eta$, entonces $\eta \delta b = 0$. Así, $\delta b \in \ker \eta = \text{im } \theta$, y por ser θ inyectiva, existe un único elemento en $C^{n+1}(\mathfrak{U}; F')$, llamémoslo c , tal que

$$\theta c = \delta b.$$

Además, c es un $(n+1)$ -cociclo: por ser $\delta^2 = 0$, $\delta \theta c = 0$. Pero $\delta \theta = \theta \delta$, con lo cual $\theta \delta c = 0$; y como θ es un homomorfismo inyectivo, necesariamente $\delta c = 0$.

Se define entonces $\partial[a] = [c]$. A este homomorfismo se lo conoce usualmente como *homomorfismo de conexión*.

Haces Inyectivos.

La siguiente es la generalización a los haces del concepto de grupo inyectivo. La definición, como muchas otras definiciones de haces particulares que toman el nombre de una cierta clase de objetos en la categoría en la que toman valores, es una copia apropiada de la definición de grupo inyectivo.

Definición 1.1.57. Un haz de grupos abelianos I sobre X se dice *inyectivo* si cada vez que se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\theta} & I \\ \downarrow \iota & & \\ G & & \end{array}$$

en la categoría de haces de grupos abelianos sobre X , con $\text{Ker}(\iota) = 0$ (es decir, $\ker \iota_U = 0$ para cada abierto U de X), entonces existe una transformación natural $\eta : G \rightarrow I$ que "extiende" a θ , o sea $\eta\iota = \theta$.¹¹

Recordar que un grupo abeliano G es inyectivo si y solo si el homomorfismo $G \rightarrow G$, $x \mapsto nx$ es sobreyectivo, esto es, si y solo si G es divisible; ver [ML94].

En analogía con los grupos abelianos inyectivos, se tiene el siguiente lema:

Lema 1.1.58. *Sea*

$$0 \rightarrow I \xrightarrow{\theta} F \rightarrow G \rightarrow 0 \tag{1.7}$$

una sucesión exacta de haces de grupos abelianos sobre X , con I inyectivo. Entonces existe un morfismo de haces $\pi : F \rightarrow I$ que hace que la sucesión 1.7 se escinda; es decir, $\pi\theta = \text{id}_I$.

Demostración. Es inmediata, considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\text{id}_I} & I \\ \theta \downarrow & & \\ F & & \end{array}$$

El morfismo θ es inyectivo por ser exacta la sucesión (1.7). Luego, el resultado se desprende de la inyectividad del haz I . Q.E.D.

Lema 1.1.59. *Sea I un conjunto de índices y, para cada $i \in I$, sea I_i un haz inyectivo. Entonces el haz producto*

$$I(U) = \prod_{i \in I} I_i(U)$$

es inyectivo.

¹¹La definición de grupo abeliano inyectivo es completamente análoga, reemplazando los haces por grupos abelianos y los morfismos de haces por homomorfismos de grupos.

Demostración. Sean F y G haces de grupos abelianos, $F \rightarrow G$ un monomorfismo y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \prod_{i \in I} I_i \\ \downarrow & & \\ G & & \end{array}$$

Para cada índice $j \in I$ tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & I_j \\ \downarrow & \nearrow \eta_j & \\ G & & \end{array}$$

Luego, queda probada la inyectividad del haz producto, definiendo el morfismo $\eta : G \rightarrow \prod_{i \in I} I_i$ de la manera obvia

$$\eta = (\eta_i)_{i \in I}.$$

Q.E.D.

Para lo que sigue, vamos a necesitar el siguiente

Lema 1.1.60. *Sea I un grupo abeliano inyectivo. Entonces, para cada $x \in X$, el haz rascacielos \underline{I}_x también es inyectivo.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama en la categoría de haces

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\theta} & \underline{I}_x \\ \downarrow \iota & & \\ G & & \end{array}$$

donde ι es un morfismo inyectivo. Entonces, por ser I un haz inyectivo, para un abierto U de X que contiene a x , existe un homomorfismo de grupos $\eta_U : G(U) \rightarrow \underline{I}_x(U) = I$ tal que $\eta_U \iota_U = \theta_U$. Si ahora $x \notin U$, entonces $\underline{I}_x(U) = 0$ y entonces η_U es el homomorfismo nulo. Q.E.D.

Para demostrar el lema que sigue se necesita su versión análoga para grupos abelianos, cuya demostración se puede ver en [ML94]:

Teorema 1.1.61. *Todo grupo abeliano es subgrupo de un grupo inyectivo. Es decir, dado un grupo abeliano G cualquiera, existe un grupo inyectivo I y un monomorfismo $G \rightarrow I$.*

Lema 1.1.62. *Si F es un haz de grupos abelianos sobre el espacio X , entonces existe un haz inyectivo I y un monomorfismo $\theta : F \rightarrow I$.*

Demostración. Por el teorema anterior, para cada $x \in X$ existe un grupo abeliano inyectivo I_x y un monomorfismo $F_x \rightarrow I_x$.

Notaremos por \underline{I}_x al haz rascacielos, cuyo germen en x es el grupo abeliano inyectivo I_x .

Considerando el homomorfismo natural $F(U) \rightarrow F_x$ se construye el homomorfismo

$$F(U) \rightarrow F_x \rightarrow I_x = \underline{I_x}(U) \quad (1.8)$$

que llamaremos $\theta_U^{(x)}$. Si $x \notin U$, esta aplicación es claramente el homomorfismo nulo.

Sea ahora I el haz definido por

$$I(U) = \prod_{x \in X} \underline{I_x}(U) = \prod_{x \in U} \underline{I_x}(U),$$

que resulta inyectivo por 1.1.59 y 1.1.60. Se define entonces la transformación natural $\theta : F \rightarrow I$ dada por

$$\theta = (\theta^{(x)})_{x \in X}.$$

Veamos que es el monomorfismo buscado.

Sea U un abierto de X y supongamos que $\theta_U^{(x)}(a) = \theta_U^{(x)}(a')$ para cada $x \in X$. Podemos obviamente suponer que $x \in U$. Por definición de $\theta^{(x)}$ y por ser inyectivo el homomorfismo $F_x \rightarrow I_x$, necesariamente a y a' tienen la misma proyección al colímite, vía la aplicación $F(U) \rightarrow F_x$; es decir, $a_x = a'_x$. Luego, cada x tiene una vecindad $W_x \subset U$ tal que

$$a|_{W_x} = a'|_{W_x}.$$

Entonces, al ser F un haz, necesariamente $a = a'$, y el lema queda demostrado. Q.E.D.

El siguiente lema será útil en la siguiente sección.

Lema 1.1.63. *Sea I un haz inyectivo sobre X y sea $U \subset X$ un abierto. Entonces la restricción I_U de I a U también es un haz inyectivo.*

Demostración. Supongamos que F y G son haces sobre U , $F \rightarrow G$ un monomorfismo y $F \rightarrow I_U$ una transformación natural. Consideremos las extensiones por cero \overline{F} y \overline{G} de F y G respectivamente. Por definición, se puede verificar fácilmente que la transformación natural inducida $\overline{F} \rightarrow \overline{G}$ sigue siendo un monomorfismo. Consideramos entonces, para $V \subset U$ abierto, el diagrama en \mathcal{A}

$$\begin{array}{ccc} \overline{F}(V) = F(V) & \longrightarrow & I(V) = I_U(V). \\ \downarrow & & \\ \overline{G}(V) = G(V) & & \end{array}$$

Por ser I inyectivo, existe un homomorfismo $\overline{G} \rightarrow I$ que factoriza a $\overline{F} \rightarrow I$. Restringiendo entonces esta transformación natural al abierto U , se obtiene la factorización buscada. Q.E.D.

La siguiente proposición caracteriza el comportamiento de los haces inyectivos en lo que se refiere a la cohomología. La demostración se puede ver en [Bry92]. Se puede definir una cohomología con coeficientes en haces, a partir de ciertas sucesiones exactas llamadas resoluciones. En el caso de un haz inyectivo, estas resoluciones son triviales; luego, el resultado queda establecido a partir del isomorfismo entre esta cohomología de haces y la cohomología de Čech.

Proposición 1.1.64. Si I es un haz inyectivo sobre X , entonces $\check{H}^n(X; I) = 0$ para cada $n \geq 1$.

Haces "Flabby" y Suaves.

Vamos a extender ahora la definición de haz de grupos abelianos sobre un espacio topológico X de tal forma de poder tomar en cuenta no solo los subconjuntos abiertos de X , sino también los cerrados. Esta construcción, que será de utilidad en esta sección, en donde se probará un resultado fundamental, es una generalización directa de la definición de gérmenes dada anteriormente.

Recordemos que X es un espacio topológico paracompacto.

Definición 1.1.65. Sea $K \subset X$ un subconjunto cerrado y $F : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{A}$ un haz sobre X de grupos abelianos. El grupo abeliano $F(K)$ se define como

$$F(K) = \text{colim}_{U \supseteq K} F(U),$$

donde el colímite se toma sobre los abiertos U de X que contienen a K .¹²

En el caso en que el conjunto cerrado sea de la forma $\{x\}$, la definición de $F(\{x\})$ coincide con la del germen F_x .

Por la definición anterior, para cada vecindad abierta U de K , se tiene un homomorfismo $F(U) \rightarrow F(K)$, que también llamaremos *restricción*. Esta definición implica que, dado un subconjunto cerrado K y $a_K \in F(K)$, existe una vecindad U de K y $a \in F(U)$ que extiende a a_K .

Lema 1.1.66. Considerando el haz asociado \widehat{F} , el grupo $\widehat{F}(K)$ se identifica con el grupo de secciones $s : K \rightarrow \prod_{x \in K} F_x$ para las cuales existe una vecindad U de K y una sección continua s' definida sobre U tal que $s'|_K = s$.

Demostración. Para $K \subset X$ cerrado, llamemos $\Gamma(K)$ al grupo de secciones definidas sobre K que se extienden (continuamente) a una vecindad de K . Se define el homomorfismo $\varphi : \widehat{F}(K) \rightarrow \Gamma(K)$ por

$$\varphi(s_K) = s|_K,$$

donde s_K es la clase de una sección $s : U \rightarrow \prod_{x \in U} F_x$ y U una vecindad de K . Como s es continua, $s|_K \in \Gamma(K)$. Si $s_K = s'_K$, donde s y s' están definidas sobre U y V respectivamente, entonces existe un abierto $W \subset U \cap V$, y $K \subset W$, tal que $s|_W = s'|_W$; luego, $s|_K = s'|_K$ y φ es inyectiva.

La sobreyectividad de φ es inmediata a partir de la definición de $\Gamma(K)$. Q.E.D.

Proposición 1.1.67. Sean $K_0, K_1 \subset X$ subconjuntos cerrados y $s_0 \in \Gamma(K_0)$, $s_1 \in \Gamma(K_1)$ tales que $s_0|_{K_0 \cap K_1} = s_1|_{K_0 \cap K_1}$. Entonces existe una sección $t \in \Gamma(K_0 \cup K_1)$ tal que $t|_{K_0} = s_0$ y $t|_{K_1} = s_1$.

¹²La definición general del grupo $F(K)$ es vía las secciones globales del haz restricción $F|_K = F_K$, esto es $F(K) = i^{-1}(F)(K)$, donde i es la inclusión $K \rightarrow X$; pero para un espacio paracompacto, esta definición coincide con la dada en el texto; ver [Bry92].

Demostración. Llamemos también s_0 y s_1 a las extensiones a vecindades U_0 de K_0 y U_1 de K_1 respectivamente.

Consideremos el conjunto parcialmente ordenado \mathcal{U} de pares (K, s) , donde $K \subset K_0 \cup K_1$ es cerrado y $s \in \Gamma(K)$ es tal que $s|_{K \cap K_0} = s_0$ y $s|_{K \cap K_1} = s_1$, con $(K, s) < (K', s')$ si y solo si $K \subset K'$ y $s'|_K = s$. Este conjunto no es vacío ya que (K_0, s_0) y (K_1, s_1) están en él. Además, como se verifica inmediatamente, cualquier cadena en \mathcal{U} tiene un elemento maximal. Luego, por el lema de Zorn, existe un par (K, s) maximal en \mathcal{U} . Llamemos también s a la extensión correspondiente a una vecindad U de K .

Sea ahora $x_0 \in (K_0 \cup K_1) - K$ y supongamos $x_0 \in K_0$. Al ser X paracompacto, en particular es normal y luego existen abiertos disjuntos $V \supset K$ y $W \ni x_0$. Sea ahora $Z := (U \cap V) \cup (U_0 \cap W)$ y $t : Z \rightarrow \prod_{x \in Z} F_x$ definida por

$$t(x) = \begin{cases} s(x), & \text{si } x \in U \cap V, \\ s_0(x), & \text{si } x \in U_0 \cap W. \end{cases}$$

Al ser $U \cap V$ y $U_0 \cap W$ abiertos disjuntos, t resulta una sección continua. Además $t|_{Z \cap K_0} = s_0$ y $t|_{Z \cap K_1} = s_1$. Luego, $t \in \Gamma(K \cup \{x_0\})$ y el par $(K \cup \{x_0\}, t) \in \mathcal{U}$, lo que contradice la maximalidad de (K, s) . Entonces necesariamente $K = K_0 \cup K_1$ y la proposición queda demostrada. Q.E.D.

Corolario 1.1.68. *Sea F un haz sobre X , $K \subset X$ un subconjunto cerrado tal que $K = \bigcup_{i \in I} K_i$, donde K_i es cerrado para cada i . Sea, también para cada $i \in I$, $s_i \in F(K_i)$ tal que*

$$s_i|_{K_{ij}} = s_j|_{K_{ij}},$$

para cualesquiera $i, j \in I$, donde $K_{ij} = K_i \cap K_j$. Entonces existe un elemento $s \in F(K)$ tal que $s|_{K_i} = s_i$ para cada $i \in I$.

Demostración. La demostración se reduce a una aplicación de la proposición anterior, usando nuevamente el lema de Zorn, considerando el conjunto parcialmente ordenado de pares $(J, (s_j)_{j \in J})$, donde $J \subset I$, $s_j \in \Gamma(K_j)$, $s_j = s_k$ en $K_j \cap K_k$ para cualesquiera $j, k \in J$ tales que existe una sección

$$s \in \Gamma\left(\bigcup_{j \in J} K_j\right)$$

con $s|_{K_j} = s_j$ para cada $j \in J$. Q.E.D.

Definición 1.1.69. Un haz F de grupos abelianos sobre X se dice *flabby* si y solo si para cada abierto U de X , la aplicación $F(X) \rightarrow F(U)$ es un epimorfismo.

Ejemplo 1.1.70. Consideremos el haz de grupos abelianos sobre el espacio topológico X que a cada abierto U le asigna el grupo de aplicaciones continuas $C(U, \mathbb{R}) = C(U)$. En este caso, el homomorfismo $C(X) \rightarrow C(U)$ es la aplicación que manda cada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ a su restricción $f|_U : U \rightarrow \mathbb{R}$. Este sería un haz *flabby* si para cada abierto U de X y cada aplicación continua $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, existe una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que extiende a g .

El siguiente resultado es inmediato a partir de la definición:

Lema 1.1.71. *Un sumando directo de un haz flabby es flabby.*

Lema 1.1.72. *Todo haz inyectivo sobre X es flabby.*

Demostración. Sea I un haz inyectivo y llamemos J al haz producto definido a partir de I , como en la demostración del lema 1.1.62. Por la definición del haz J y del haz rascacielos, J resulta flabby. Del mismo lema 1.1.62 existe un monomorfismo $I \rightarrow J$. Luego se obtiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow J/I \rightarrow 0,$$

con lo cual I resulta sumando directo del haz flabby J por 1.1.58, y luego es flabby, por el lema anterior. Q.E.D.

Podemos ahora dar la definición de haz suave y probar el resultado principal de esta sección.

Definición 1.1.73. Un haz S de grupos abelianos sobre el espacio X se dice *suave* si para cada subconjunto cerrado K de X , la restricción $S(X) \rightarrow S(K)$ es sobreyectiva.

Ejemplo 1.1.74. Si X es paracompacto y F es un haz *flabby* sobre X , entonces F resulta suave.

Ejemplo 1.1.75. El haz de funciones diferenciables \mathbb{C}_X es suave. Para verificar esta afirmación, sea $K \subset X$ un subconjunto cerrado, $f_K \in \mathbb{C}_X(U)$ y $f \in \mathbb{C}_X(U)$ un representante de la clase f_K , para $U \supset K$. Consideremos también la homotopía $\Phi : \mathbb{C} \times I \rightarrow \mathbb{C}$, para $I = [0, 1]$ dada por $\Phi(z, t) = tz$. Siendo X paracompacta, existe una vecindad V de K tal que $\bar{V} \subset U$. Sea entonces $h : X \rightarrow I$ una función diferenciable con soporte en U y tal que $h(x) = 1$ para todo $x \in V$ y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ la aplicación

$$\varphi(x) = \Phi(f(x), h(x)).$$

Si $x \in V$, entonces $\varphi(x) = f(x)$. Definimos entonces $\bar{\varphi} : X \rightarrow \mathbb{C}$ por la fórmula

$$\bar{\varphi}(x) \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego, $\bar{\varphi}$ resulta la extensión buscada ya que $\bar{\varphi} \in \mathbb{C}_X(X)$ y $\varphi_K = f_K$ en $\mathbb{C}_X(K)$.

Ejemplo 1.1.76. Generalizando el ejemplo anterior, el haz $\Omega_{X, \mathbb{C}}^k$ de k -formas complejas sobre X resulta suave para cada k .

Consideremos un haz suave S sobre X y sea $K \subset X$ un subconjunto cerrado; podemos entonces, como se hizo para los abiertos, restringir el haz S a K . Luego, es inmediato verificar que la restricción $S|_K$ también resulta un haz suave.

Lema 1.1.77. 1. *Si $0 \rightarrow S \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de haces de grupos abelianos sobre X y S es suave, entonces el homomorfismo $F(X) \rightarrow G(X)$ es sobreyectivo.*

2. Sea $0 \rightarrow S' \rightarrow S \xrightarrow{\theta} S'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta de haces de grupos abelianos sobre X . Si S' y S son suaves, entonces S'' también lo es.
3. Si I es un haz inyectivo y S un subhaz suave de I , entonces el haz I/S también es suave.

Demostración. El punto 1 se prueba nuevamente mediante aplicación del lema de Zorn; la demostración sigue la misma idea de las vistas anteriormente, y se puede ver en [God58] y [Bry92].

Para el punto 2, sea $K \subset X$ un subconjunto cerrado; por definición de la restricción de un haz a un subconjunto cerrado y por 1.1.50, la sucesión de haces sobre K y morfismos

$$0 \rightarrow S'|_K \rightarrow S|_K \rightarrow S''|_K \rightarrow 0$$

también es exacta. Luego, por el ítem 1, el morfismo $S|_K(K) \rightarrow S''|_K(K)$ es sobreyectivo. Pero en este caso $S|_K(K) = \widehat{S}(K) = S(K)$ y lo mismo para $S''|_K$; luego $S|_K(K) \rightarrow S''|_K(K)$ no es otra cosa que el morfismo inducido $\theta_K : S(K) \rightarrow S''(K)$. La afirmación se desprende entonces considerando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S(X) & \xrightarrow{\theta_X} & S''(X) \\ \rho_{XK} \downarrow & & \downarrow \rho''_{XK} \\ S(K) & \xrightarrow{\theta_K} & S''(K), \end{array}$$

ya que θ_X, θ_K son sobreyectivas, como así también la restricción ρ_{XK} por ser S haz suave.

El ítem 3 se sigue inmediatamente de 1.1.72 y del ítem 2, considerando la sucesión exacta

$$0 \rightarrow S \rightarrow I \rightarrow I/S \rightarrow 0.$$

Q.E.D.

Teorema 1.1.78. 1. *Todo haz inyectivo de grupos abelianos sobre un espacio X es suave.*

2. *Si S es un haz suave de grupos abelianos sobre X , entonces $H^n(X; S) = 0$ para $n \geq 1$.*

Demostración. La primer afirmación se sigue del lema 1.1.72 y de que todo haz flabby sobre un espacio paracompacto es suave.

Para demostrar la segunda afirmación, se procede por inducción en $n \geq 1$. Por 1.1.62, tenemos un haz inyectivo I y un monomorfismo $S \rightarrow I$. Teniendo en cuenta 1.1.64, podemos considerar la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X; S) \rightarrow \check{H}^0(X; I) \rightarrow \check{H}^0(X; I/S) \rightarrow \check{H}^1(X; S) \rightarrow 0.$$

Al ser S un haz suave, por el lema anterior, el homomorfismo

$$I(X) = \check{H}^0(X; I) \rightarrow (I/S)(X) = \check{H}^0(X; I/S)$$

es sobreyectivo, y luego $\check{H}^0(X; I/S) \rightarrow \check{H}^1(X; S)$ es el homomorfismo nulo. Pero por exactitud en $\check{H}^1(X; S)$, este homomorfismo nulo también es sobreyectivo, y entonces $\check{H}^1(X; S) = 0$.

Supongamos ahora que $\check{H}^n(X; S) = 0$. Nuevamente por 1.1.64 vale la igualdad $\check{H}^{n+1}(X; I) = 0$ y, al ser I/S un haz suave, por hipótesis inductiva, también $\check{H}^n(X; I/S) = 0$. De esto se deduce entonces que $\check{H}^{n+1}(X; S) = 0$, considerando, como antes, la sucesión exacta larga de cohomología asociada a la sucesión exacta $0 \rightarrow S \rightarrow I \rightarrow I/S \rightarrow 0$. Q.E.D.

1.2. Variedades de Dimensión Infinita.

En esta sección se dará una muy básica introducción a la teoría de variedades de dimensión infinita. Por tiempo y espacio, no se demostrarán todos los resultados que se necesitan luego, pero al llegar el momento de usarlos, referencias no faltarán.

La geometría diferencial en dimensión infinita es bastante más complicada que la finito-dimensional. Podríamos en cierta forma comparar las dificultades como en el caso del álgebra lineal y del análisis funcional. En dimensión finita, cada punto de la variedad tiene una vecindad U y un homeomorfismo $U \rightarrow \mathbb{R}^n$, llamado una carta, y estas cartas definen el atlas que provee la estructura diferenciable. Decimos entonces, para comenzar con las notaciones necesarias para el caso de dimensión infinita, que una tal variedad está *modelada* sobre \mathbb{R}^n con su estructura diferenciable usual. Para el caso de dimensión infinita, se reemplaza \mathbb{R}^n por otro espacio vectorial que puede ser un espacio de Hilbert, de Banach, de Fréchet, etc, lo que abre un enorme abanico de posibilidades. Hay casos en los que no se dispone de una herramienta tan útil como las particiones de la unidad, ya que, por ejemplo, hay variedades modeladas sobre espacios de Banach que no las admiten.

La breve introducción que se dará aquí es sobre variedades modeladas sobre espacios de Hilbert, o *variedades de Hilbert*, que, como es de esperar, es el caso más simple en dimensión infinita.

1.2.1. Diferenciabilidad.

Sean H y H' K -espacios de Hilbert, donde $K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , $U \subset H$ un abierto y $f : U \rightarrow H'$ una aplicación continua.

Definición 1.2.1. La aplicación f se dice *diferenciable* en $v_0 \in U$ si existe una aplicación lineal acotada $d \in \text{Hom}_K(H, H')$ tal que

$$\lim_{\substack{v \rightarrow v_0 \\ v \neq v_0}} \frac{\|f(v) - f(v_0) - d(v - v_0)\|}{\|v - v_0\|} = 0.$$

La aplicación d se llama la *derivada* de f en el punto v_0 y la notaremos df_{v_0} . Decimos que f es *diferenciable* en U si lo es en cada punto $v \in U$.

Esta derivada cumple las propiedades usuales con respecto a las funciones constantes, aplicaciones lineales, regla de la cadena, etc. Ver por ejemplo [Die66] y [KF75].

Con la noción de diferenciabilidad en espacios de Hilbert ya definida, la definición de variedad modelada sobre un espacio de Hilbert H es una copia exacta de la definición de variedad diferenciable modelada sobre \mathbb{R}^n . En este caso, dados abiertos U, V de la variedad X tales que $U \cap V \neq \emptyset$ y cartas $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset H$, $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset H$, las funciones de transición

$$\varphi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

$$\psi\varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

deben verificar la definición 1.2.1. La definición de grupo de Lie se extiende también de forma obvia a estas variedades de Hilbert.

Nos vamos a enfocar ahora en definir una variedad que utilizaremos luego. Para eso, sea H un espacio de Hilbert separable y $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal completo. El *plano proyectivo* $\mathbb{P}(H)$ es el conjunto definido por el cociente $H - \{0\} / \sim$, donde \sim es la relación de equivalencia en $H - \{0\}$ dada por

$$v \sim v' \iff \exists \lambda \in K \mid v' = \lambda v,$$

con la topología cociente. Consideremos ahora los abiertos

$$U_n = \{v \in H \mid p_n(v) \neq 0\} \subset H - \{0\},$$

donde p_n es la proyección ortogonal sobre el subespacio unidimensional generado por e_n . Esto es, los elementos $v = \sum_{n \geq 1} \langle v | e_n \rangle e_n \in H$ tales que $\langle v | e_n \rangle \neq 0$. Claramente estos abiertos cubren $H - \{0\}$ y, si $\pi : H - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(H)$ es la proyección canónica, obtenemos abiertos $V_n = \pi(U_n)$ que cubren $\mathbb{P}(H)$.

Proposición 1.2.2. *El plano proyectivo $\mathbb{P}(H)$ es una variedad diferenciable modelada sobre un espacio de Hilbert.*

Demostración. Vamos a definir las cartas y verificar que las funciones de transición son diferenciables.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea H_n el espacio de Hilbert generado por el conjunto $\{e_k \mid k \neq n\}$. Si $v = \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k \in U_n$, la aplicación $\varphi_n : \pi(U_n) = V_n \rightarrow H_n$ dada por

$$\varphi_n[v] = \frac{1}{\lambda_n} (\text{id} - p_n)(v)$$

es un homeomorfismo. Las funciones de transición

$$\varphi_m \varphi_n^{-1} : \varphi(V_n \cap V_m) \rightarrow \varphi_m(V_n \cap V_m)$$

resultan ser

$$\varphi_m \varphi_n^{-1}(w) = \frac{1}{\lambda_m} (w - p_n(w) - p_m(w) + e_n),$$

para $w = \sum_{k \neq n} \lambda_k e_k$; notar que $\varphi_n(U_n \cap U_m) = \{\sum_{k \neq n} \lambda_k e_k \mid \lambda_m \neq 0\}$. Luego, llamando f a $\varphi_m \varphi_n^{-1}$, tenemos que

$$f(w) - f(w_0) = \frac{1}{\lambda_m} (\text{id} - p_n - p_m)(w - w_0);$$

lo que prueba que estas funciones de transición resultan diferenciables, ya que $\frac{1}{\lambda_m} (\text{id} - p_n - p_m)$ es una aplicación lineal. Q.E.D.

Definición 1.2.3. Una aplicación $\mathbb{P}(H) \rightarrow \mathbb{P}(H)$ se dice un *automorfismo proyectivo* si es un difeomorfismo que manda rectas en rectas.

Con la composición, el conjunto de automorfismos proyectivos de un espacio de Hilbert H resulta ser un grupo de Lie.

1.3. Preliminares de Análisis Funcional.

1.3.1. Grupos de Operadores.

Sea H un espacio de Hilbert complejo. Decimos que H es *separable* si contiene un subconjunto denso y numerable. Esto es equivalente a que la dimensión de cualquier base de Hilbert para H sea numerable. Es decir, los subespacios separables son aquellos para los cuales existe un sistema ortonormal completo numerable. Mas aún, H se puede identificar entonces con el espacio $L^2([0, 1])$ de clases de funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ medibles Lebesgue tales que

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty,$$

donde las clases de dos aplicaciones f y g coinciden si y solo si $f = g$ salvo en un conjunto de medida cero.

Si H un espacio de Hilbert separable complejo, los *automorfismos* de H son los isomorfismos isométricos, también llamados *operadores unitarios*. Notaremos este subconjunto de $\text{End}_{\mathbb{C}}(H)$ por $U(H)$.

Si $\lambda \in S^1$, entonces los operadores escalares $T_\lambda : H \rightarrow H$, $T_\lambda(v) = \lambda v$ obviamente están en $U(H)$. Podemos entonces formar la sucesión exacta central

$$1 \rightarrow S^1 \rightarrow U(H) \rightarrow U(H)/S^1 \rightarrow 1. \quad (1.9)$$

A continuación se da una descripción concreta del grupo $U(H)/S^1$.

Todo automorfismo $A \in U(H)$ induce un automorfismo proyectivo $A_* : \mathbb{P}(H) \rightarrow \mathbb{P}(H)$, definido por

$$A_*[v] = [A(v)].$$

Si ahora $\mathbb{P}U(H)$ denota el grupo de automorfismos proyectivos del espacio H , podemos definir un homomorfismo $\Phi : U(H) \rightarrow \mathbb{P}U(H)$ dado por

$$\Phi(A) = A_*.$$

La siguiente proposición es un corolario del teorema de Wigner, cuya demostración puede verse en [Wei96].

Proposición 1.3.1. *El homomorfismo Φ es sobreyectivo y su núcleo es S^1 .*

Demostración. Si $A : H \rightarrow H$ es un automorfismo tal que $\Phi(A) = \text{id}$, entonces para cada $v \in H$, $[A(v)] = [v]$. Luego, existe una aplicación continua $\lambda : H \rightarrow \mathbb{C}^*$, que resulta constante sobre cada subespacio de dimensión 1 de H , tal que

$$A(v) = \lambda(v)v.$$

Sean ahora v y v' vectores linealmente independientes en H . Siendo A un operador lineal, se verifica la igualdad

$$\lambda(v+w)(v+w) = \lambda(v)v + \lambda(w)w,$$

y luego $(\lambda(v+w) - \lambda(v))v + (\lambda(v+w) - \lambda(w))w = 0$, de donde se deduce entonces que

$$\lambda(v) = \lambda(w),$$

lo que prueba que λ es una aplicación constante. Luego, $\ker \Phi = S^1$, los operadores unitarios escalares.

La sobreyectividad de Φ es precisamente la conclusión del teorema de Wigner: si H es un espacio de Hilbert y $\mathbb{P}(H) \rightarrow \mathbb{P}(H)$ es un automorfismo proyectivo, entonces existe un automorfismo de H que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H - \{0\} & \longrightarrow & H - \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(H) & \longrightarrow & \mathbb{P}(H), \end{array}$$

donde las flechas verticales son las proyecciones canónicas.

Q.E.D.

Luego, se obtiene una sucesión exacta

$$1 \rightarrow S^1 \rightarrow U(H) \rightarrow \mathbb{P}U(H) \rightarrow 1.$$

En lo que resta del presente capítulo trabajaremos sobre el espacio de Hilbert $L^2(I)$, con $I = [0, 1]$. El producto interno entre $f, g \in L^2(I)$ lo notaremos

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

y a su norma inducida $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f \rangle}$. Los siguientes resultados forman parte de la teoría de J. Dixmier y A. Douady sobre fibrados de espacios de Hilbert y Banach [DD63], que será útil en el último capítulo.

Consideremos en $H = L^2(I)$ el subespacio

$$H_t = \{f \in H \mid f(x) = 0 \forall x \geq t\}^{13},$$

para $t \in I$. Claramente H_0 es el subespacio trivial y $H_1 = H$. Otra caracterización equivalente para H_t es

$$H_t = \{f\chi_t \mid f \in H\},$$

donde $\chi_t = \chi_{[0,t]}$ es la función característica del intervalo $[0, t]$. Si $\phi_t : H \rightarrow \mathbb{C}$ es la aplicación dada por

$$\phi_t(f) = \int_t^1 |f(x)|^2 dx,$$

entonces $\phi^{-1}(0) = H_t$.

¹³En este caso, el símbolo \forall quiere decir "para casi todo". O sea, si f esta en H_t , $f(x) = 0$ para cada $x \geq t$ salvo subconjuntos de medida nula.

Lema 1.3.2. *La función ϕ_t es continua.*

Demostración. Este resultado es básicamente consecuencia de que la función norma $f \mapsto \|f\|_2$ es continua, ya que ϕ_t es igual a la composición

$$H \longrightarrow H \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f \mapsto f\chi_{[t,1]} \mapsto \|f\chi_{[t,1]}\|_2$$

y la primer aplicación es claramente continua. Luego, el lema se desprende inmediatamente de la desigualdad

$$\left| \|f\|_2 - \|g\|_2 \right| \leq \|f - g\|_2.$$

Q.E.D.

Corolario 1.3.3. *Para cada $t \in I$, el subespacio H_t es cerrado en H .*

Podemos entonces considerar la proyección ortogonal p_t sobre el subespacio H_t , que viene dada por $p_t(f) = f\chi_t$. Para cada $t \in (0, 1]$, consideremos también la aplicación lineal $A_t : V_t \rightarrow V$ dada por

$$A_t(f)(x) = \sqrt{t} f(tx).$$

Esta aplicación es claramente una isometría, y luego un monomorfismo. Si ahora g es un elemento de H , entonces la imagen por A_t de la función $f \in H_t$ dada por

$$f(x) = \sqrt{t} g\left(\frac{x}{t}\right)$$

es precisamente g . Queda así definida la aplicación lineal $A_t^{-1} : H \rightarrow H_t$,

$$A_t^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Lema 1.3.4. ([DD63], Lemme 2). *Para cada $f \in H$ se verifican las igualdades:*

1. $\lim_{t' \rightarrow t} \|p_{t'}(f) - p_t(f)\| = 0$ para todo $t \in [0, 1]$,
2. $\lim_{t' \rightarrow t} \|A_{t'}p_{t'}(f) - A_t p_t(f)\| = 0$ para todo $t \in (0, 1]$,
3. $\lim_{t' \rightarrow t} \|A_{t'}^{-1}(f) - A_t^{-1}(f)\| = 0$ para todo $t \in (0, 1]$,

es decir, las funciones p_t , $A_t p_t$ y A_t^{-1} son fuertemente continuas en t .

Demostración. Supongamos que $t < t'$; para el primer ítem, teniendo en cuenta que

$$|\chi_t - \chi_{t'}| = \chi_{[t,t']},$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \|p_{t'}(f) - p_t(f)\|^2 &= \int_0^1 |f\chi_t - f\chi_{t'}|^2 dx \\ &= \int_0^1 |f|^2 \chi_{[t,t']} dx \\ &= \int_t^{t'} |f|^2 dx, \end{aligned}$$

de donde se desprende la afirmación por continuidad absoluta de la integral.

Para la segunda igualdad, supongamos primero que f es continua. Entonces, como $A_t p_t(f) = \sqrt{t}f(xt)$,

$$\|A_{t'} p_{t'}(f) - A_t p_t(f)\|_2^2 = \int_0^1 |\sqrt{t'}f(xt') - \sqrt{t}f(xt)|^2 dx,$$

y el resultado vale por el teorema de convergencia mayorada. Si ahora f es una función arbitraria en $L^2(I)$, sea g continua definida en I tal que $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. De esta desigualdad se desprende que también $\|A_t(f) - A_t(g)\|_2 < \varepsilon$ para cada t . Luego,

$$\|A_{t'} p_{t'}(f) - A_t p_t(f)\|_2 \leq \|A_{t'}(f) - A_{t'}(g)\|_2 + \|A_{t'}(g) - A_t(g)\|_2 + \|A_t(f) - A_t(g)\|_2$$

que es arbitrariamente pequeño para t y t' suficientemente cercanos.

Para la última identidad, supongamos nuevamente que $t < t'$. Entonces, desarrollando la norma y haciendo un cambio de variable $s = \frac{x}{t}$,

$$\begin{aligned} \|A_{t'}^{-1}(f) - A_t^{-1}(f)\|_2^2 &= 2\|f\|_2^2 - 2\operatorname{Re} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t'}} f\left(\frac{x}{t'}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} \overline{f\left(\frac{x}{t}\right)} dx \\ &= 2\|f\|_2^2 - 2\operatorname{Re} \int_0^1 \sqrt{\frac{t'}{t}} f\left(s \frac{t}{t'}\right) \overline{f(s)} ds \\ &= 2\|f\|_2^2 - 2\sqrt{\frac{t'}{t}} \operatorname{Re} \langle \tilde{f} | f \rangle, \end{aligned}$$

donde $\tilde{f}(s) = f\left(s \frac{t}{t'}\right)$. Resta verificar entonces que $\langle \tilde{f} | f \rangle \xrightarrow{t' \rightarrow t} \|f\|_2^2$. Por convergencia mayorada, el resultado vale para cualquier f continua. Como antes, consideremos ahora $f \in L^2(I)$ y g continua tal que $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Entonces también $\|\tilde{f} - \tilde{g}\|_2 < \varepsilon$ y luego

$$\|f - \tilde{f}\|_2 < 2\varepsilon + \|g - \tilde{g}\|_2.$$

Pero $\|g - \tilde{g}\|_2 = \|g\|_2^2 - 2\operatorname{Re} \langle g | \tilde{g} \rangle + \|\tilde{g}\|_2^2$, que tiende a cero cuando $t' \rightarrow t$ por continuidad de g . Luego,

$$\|f - \tilde{f}\|_2 \xrightarrow{t' \rightarrow t} 0.$$

Por otro lado,

$$|\langle \tilde{f} | f \rangle - \langle f | f \rangle| \leq \|f - \tilde{f}\|_2 \|f\|_2,$$

y el lado derecho de esta desigualdad tiende a cero por lo anterior; en consecuencia, $\langle \tilde{f} | f \rangle$ tiende a $\langle f | f \rangle = \|f\|_2^2$, que era lo que se quería probar. Q.E.D.

El siguiente resultado es la clave de la elección del grupo de automorfismos isométricos de H .

Lema 1.3.5. ([DD63], Lemme 3). *El grupo $U(H)$, dotado de la topología fuerte, es contráctil.*

Demostración. Trabajamos nuevamente en $H = L^2(I)$. Sean p_t , A_t y A_t^{-1} como en el lema anterior y $\Phi : U(H) \times I \rightarrow U(H)$ dada por

$$\Phi(A, t) = \begin{cases} (\text{id}_H - p_t) + A_t^{-1}AA_t p_t & \text{si } t \neq 0, \\ \text{id}_H & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Para $t \neq 0$, Φ resulta continua por el lema anterior. Solo resta entonces verificar la continuidad en los puntos $(A_0, 0)$, para $A_0 \in U(H)$. Esto es, debemos probar que

$$\|(A_t^{-1}AA_t p_t - p_t)(f)\|$$

tiende a 0 cuando (A, t) tiende a $(A_0, 0)$. Por un lado, por el lema anterior, $\|p_t(f)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$. Por otro lado, al ser A_t^{-1} , A y A_t isometrías, $\|A_t^{-1}AA_t p_t(f)\| = \|p_t(f)\|$ que también tiende a 0 para $t \rightarrow 0$. Luego, el lema queda demostrado teniendo en cuenta que

$$\|(A_t^{-1}AA_t p_t - p_t)(f)\| \leq \|A_t^{-1}AA_t p_t(f)\| + \|p_t(f)\|.$$

Q.E.D.

1.3.2. Producto Tensorial de Espacios de Hilbert.

En esta sección se definirá, dados K -espacios de Hilbert H y H' , su producto tensorial $H \otimes_K H'$, que será un nuevo espacio de Hilbert.

Dados $v_0 \in H$ y $v'_0 \in H'$, podemos definir las funcionales acotadas $\varphi_{v_0} : H \rightarrow K$, $\varphi'_{v'_0} : H' \rightarrow K$ dadas por $\varphi_{v_0}(v) = \langle v|v_0 \rangle$ y $\varphi'_{v'_0}(v') = \langle v'|v'_0 \rangle$. Recordemos además que, por el teorema de representación de Riesz, existe una correspondencia (lineal conjugada) biyectiva entre un espacio de Hilbert cualquiera y su dual.

Llamemos ahora $v \otimes v' : H \times H' \rightarrow K$ a la forma bilineal

$$v_0 \otimes v'_0(v, v') = \varphi_{v_0}(v)\varphi'_{v'_0}(v'),$$

y sea W el K -espacio vectorial generado por estas formas bilineales. Definimos ahora una aplicación $W \times W \rightarrow K$ por medio de la fórmula

$$(v_1 \otimes v'_1, v_2 \otimes v'_2) \mapsto \langle v_1|v_2 \rangle \langle v'_1|v'_2 \rangle,$$

y extendiéndola bilinealmente.

La demostración del siguiente resultado se puede ver en [RS80].

Proposición 1.3.6. *La aplicación anterior está bien definida y define un producto interno en W dado por*

$$\langle v_1 \otimes v'_1 | v_2 \otimes v'_2 \rangle = \langle v_1 | v_2 \rangle \langle v'_1 | v'_2 \rangle.$$

Definición 1.3.7. El *producto tensorial* de H y H' , notado $H \otimes_K H'$ o simplemente $H \otimes H'$ es la completación de W con la norma inducida por el producto interno en W definido previamente.

Otra aproximación análoga es considerando a H y H' como K -módulos; podemos definir entonces su producto tensorial, que resulta ser el K -módulo W . Para que este producto quede bien definido en la categoría de espacios de Hilbert, necesitamos completar el K -módulo W para obtener el espacio de Hilbert $H \otimes H'$.

La siguiente proposición dice que si dos espacios de Hilbert son separables, entonces su producto tensorial también lo es.

Proposición 1.3.8. *Si $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $\{e'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ son sistemas ortonormales para V y V' respectivamente, entonces $\{e_n \otimes e'_k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal para $V \otimes V'$.*

Demostración. De la definición de $H \otimes H'$ se deduce que $\{e_n \otimes e'_m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto ortonormal. Veamos entonces que $H \otimes H'$ está contenido en el subespacio (cerrado) S generado por los vectores $e_n \otimes e'_m$.

Sea $v \otimes v' \in H \otimes H'$, con

$$v = \sum_{n \geq 1} \langle v, e_n \rangle e_n$$

$$v' = \sum_{n \geq 1} \langle v', e'_n \rangle e'_n.$$

Entonces queda bien definido el vector

$$w = \sum_{n,m} \langle v, e_n \rangle \langle v', e'_m \rangle (e_n \otimes e'_m) \in S,$$

ya que $\sum_{n,m} |\langle v, e_n \rangle \langle v', e'_m \rangle|^2 < \infty$. Llamemos a_n y a'_n a $\langle v, e_n \rangle$ y $\langle v', e'_n \rangle$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} & \left\| v \otimes v' - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_n a'_m (e_n \otimes e'_m) \right\|^2 = \left\| v \otimes v' - \sum_{n=1}^N a_n e_n \otimes \sum_{m=1}^M a'_m e'_m \right\|^2 = \\ & = \|v\|^2 \|v'\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^N a_n e_n \right\| \left\| \sum_{m=1}^M a'_m e'_m \right\| - 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_n a'_m \langle v, e_n \rangle \langle v', e'_m \rangle \right), \end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando N y M tienden a ∞ .

Q.E.D.

Capítulo 2

Fibrados.

2.1. Definiciones básicas.

Sea X una variedad suave de dimensión finita.

Definición 2.1.1. Un *fibrado vectorial complejo suave*¹ de rango n sobre X consiste en lo siguiente:

1. una variedad diferenciable E , llamada el *espacio total*,
2. una función diferenciable y sobreyectiva $p : E \rightarrow X$, llamada la *proyección*,
3. para cada $x \in X$, una estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial en el conjunto $p^{-1}(x)$,
4. (condición de trivialidad local) un cubrimiento abierto $\{U_i \mid i \in I\}$ de X y, para cada abierto del cubrimiento un difeomorfismo

$$h_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n \quad (2.1)$$

tal que para cada x , la función $z \mapsto h_i^{-1}(x, z)$ es un isomorfismo entre \mathbb{C}^n y $p^{-1}(x)$ (a la preimagen $p^{-1}(U_i)$ se la nota usualmente $E|_{U_i}$). Se pide además que, si $h_{i,x}$ es el isomorfismo lineal

$$E_x \xrightarrow{h_i} \{x\} \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{C}^n,$$

la aplicación $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ dada por $g_{ij}(x) = h_{i,x} h_{j,x}^{-1}$ sea suave.²

Podríamos obviamente haber usado un espacio vectorial complejo cualquiera de dimensión n en lugar de \mathbb{C}^n , obteniendo el mismo objeto.

Los abiertos $U \subset X$ para los cuales existe un difeomorfismo como el (2.1) se llaman *abiertos trivializantes* y los difeomorfismos, *trivializaciones locales* ó solo *trivializaciones*. Las funciones g_{ij} reciben el nombre de *cociclos* asociados al cubrimiento $\{U_i \mid i \in I\}$. Es inmediato verificar que en $U_i \cap U_j \cap U_k$ cumplen la relación

$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik},$$

¹En general, omitiremos la palabra suave.

²Consideramos a $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ con la estructura diferenciable usual heredada de \mathbb{C}^{n^2} .

de la que se desprende que $g_{ii}(x) = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$ si $x \in U_i$ y $g_{ji}(x) = g_{ij}(x)^{-1}$ para cada $x \in U_i \cap U_j$.

A X se lo llama el *espacio base* y al espacio vectorial $p^{-1}(x)$, la *fibra* sobre x , que se notará E_x . Si es posible elegir $U_i = X$, entonces E se dice un *fibrado trivializable*.

Sean U y V abiertos trivializantes, con trivializaciones $h_U : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ y $h_V : E|_V \rightarrow V \times \mathbb{C}^n$ respectivamente, y $g : U \cap V \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ el cociclo correspondiente. Entonces, al ser g una aplicación suave, existen funciones diferenciables $\lambda_{ij} : U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq i, j \leq n$ tales que

$$g(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(x) & \cdots & \lambda_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1}(x) & \cdots & \lambda_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

En general, la función $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ que asigna a cada x la dimensión del espacio vectorial E_x es localmente constante. Pero si X es conexa, entonces resulta constante, y permite definir sin ambigüedad el *rango* del fibrado E como la dimensión de sus fibras.

Es útil hacer algunas aclaraciones sobre las trivializaciones locales y la estructura diferenciable del espacio total E . Se puede suponer sin pérdida de generalidad que los conjuntos U_i son elementos del atlas que define la estructura diferenciable de X . Sea $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ una carta de X . Considerando la composición

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_i} & \xrightarrow{h_i^{-1}} & U_i \times \mathbb{C}^n \\ & & \downarrow (\varphi_i, \text{id}) \\ & & \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^n \end{array} \quad (2.2)$$

se obtiene un atlas para E , con cartas $(E|_{U_i}, (\varphi_i, \text{id})h_i^{-1})$. Cabe preguntarse entonces que relación hay entre la estructura diferenciable original de E y la obtenida considerando este último atlas. El siguiente lema responde esta pregunta.

Lema 2.1.2. *Sea X una variedad diferenciable de dimensión k , $\{(U_i, \psi_i) \mid i \in I\}$ un atlas para X y p una aplicación sobreyectiva del conjunto E en X . Supongamos además que se tienen aplicaciones biyectivas $h_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ que preservan las fibras (es decir, $h_i(p^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{C}^n$) y tales que, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, las funciones $h_i h_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$ vienen dadas por*

$$h_i h_j^{-1}(x, z) = (x, g_{ij}(x)z),$$

para ciertas funciones suaves $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$. Entonces existe una única estructura de variedad diferenciable en E que lo hace un fibrado vectorial de rango n sobre X y tal que las funciones h_i son las trivializaciones locales.

Demostración. A partir de que las biyecciones h_i preservan fibras, se puede definir una estructura de espacio vectorial en $p^{-1}(x)$ de la siguiente manera. Para $e_1, e_2 \in p^{-1}(x)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = h_{i,x}^{-1}(\lambda_1 h_{i,x}(e_1) + \lambda_2 h_{i,x}(e_2)).$$

Sea ahora $E|_{U_i} = p^{-1}(U_i)$. Se topologiza a E pidiendo que las aplicaciones h_i sean homeomorfismos. Considerando la identificación canónica entre \mathbb{C}^n y \mathbb{R}^{2n} y la composición (2.2) se obtienen homeomorfismos $\varphi_i : E|_{U_i} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2n}$. Por hipótesis, la biyección $h_i h_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{2n}$ viene dada por

$$h_i h_j^{-1}(x, b) = (x, g_{ij}(x)b)$$

que es suave. Veamos que la aplicación $\varphi_i \varphi_j^{-1}$ es diferenciable. Para esto consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{h_j^{-1}} & E|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{h_i} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{2n} \\ (\psi_j, \text{id}) \downarrow & & \downarrow (\psi_i, \text{id}) \\ \psi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\varphi_i \varphi_j^{-1}} & \psi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

donde (U_i, ψ_i) y (U_j, ψ_j) son cartas de X . Entonces

$$\varphi_i \varphi_j^{-1}(a, b) = (\psi_i \psi_j^{-1}(a), g_{ij}(\psi_j^{-1}(a))b)$$

lo que muestra que las funciones de transición para el atlas de E son diferenciables. Solo resta ver entonces que las funciones h_i , h_i^{-1} y p son suaves con esta estructura diferenciable. Para la diferenciable de h_i se considera

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_i} & \xrightarrow{h_i} & U_i \times \mathbb{R}^{2n} \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow (\psi_i, \text{id}) \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

Como $\varphi_i = (\psi_i, \text{id})h_i$, entonces f resulta ser la identidad, lo que muestra que h_i es suave. Para h_i^{-1} es análogo. Ahora, para probar la suavidad de p se debe verificar que la función $\psi_i p_i \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^k$ es C^∞ , donde $p_i = p|_{p^{-1}(U_i)}$. Pero

$$\psi_i p_i \varphi_i^{-1}(a, b) = \psi_i p_i h_i^{-1}(\psi_i^{-1}(a), \text{id}(b)) = a$$

ya que p preserva las fibras.

Sea ahora \mathcal{A} otro atlas que cumple las condiciones anteriores. Sea $(A, f) \in \mathcal{A}$ una carta. Se puede suponer que $A = E|_{U_i}$ para algún i . Se quiere ver entonces que $\varphi_i f^{-1}$ y $f \varphi_i^{-1}$ son diferenciables. Como por hipótesis h_i también es un difeomorfismo con la estructura dada por \mathcal{A} , las funciones $(\psi_i, \text{id})h_i f^{-1}$ y $f h_i^{-1}(\psi_i^{-1}, \text{id})$ son suaves. Pero $\varphi_i = (\psi_i, \text{id})h_i$, lo que prueba la afirmación. Luego, las estructuras C^∞ para E coinciden. Q.E.D.

Como muestra la demostración anterior, estos resultados son válidos también para fibrados reales.

Definición 2.1.3. Sean $p_1 : E \rightarrow X$, $p_2 : E' \rightarrow X$ fibrados vectoriales sobre X . Un *homomorfismo de fibrados* de E en E' es una función suave $f : E \rightarrow E'$ que manda E_x linealmente en E'_x . Si f es un difeomorfismo, entonces se dice que los fibrados son *isomorfos*, notado $E \cong E'$ (en ese caso, la restricción $f_x : E_x \rightarrow E'_x$ de f a la fibra E_x es un isomorfismo para cada x en X). El conjunto de homomorfismos de fibrados $E \rightarrow E'$ se notará $\text{Hom}(E, E')$, que, como veremos más adelante, resulta también un fibrado vectorial.

Se tiene entonces la categoría de fibrados vectoriales suaves sobre X , cuyos objetos son los fibrados vectoriales C^∞ sobre una variedad y flechas los homomorfismos de fibrados.

2.1.1. Ejemplos de Fibrados Vectoriales.

El Fibrado Trivial.

Es el fibrado vectorial definido por $\pi_1 : X \times \mathbb{C}^n \rightarrow X$, $\pi_1(x, v) = x$, con la estructura de espacio vectorial en las fibras dada por:

$$\alpha(x, z) + \beta(x, w) = (x, \alpha z + \beta w),$$

donde $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Al espacio total de este fibrado se lo notará ε_X^n o simplemente ε^n , tanto para el caso complejo como para el real.

Si E es un fibrado de rango n sobre X tal que $E \cong \varepsilon^n$, entonces E se dice un *fibrado trivializable*.

El Fibrado Tangente.

Sea X una variedad suave de dimensión k , con atlas $\{(U_i, \psi_i) \mid i \in I\}$ y sea

$$TX = \{(x, v) : x \in X \text{ y } v \in TX_x\} = \coprod_{x \in X} TX_x,$$

donde TX_x indica el espacio tangente a X en x . Sea $\pi : TX \rightarrow X$ la proyección,

$$\pi(x, v) = x. \tag{2.3}$$

Se definen las funciones $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^k$ por la siguiente fórmula

$$h_i(x, v) = (x, (d\psi_i)_x(v)).$$

Estas aplicaciones son biyectivas y preservan las fibras. Si $U_i \cap U_j$ es no vacío, entonces

$$h_i h_j^{-1}(x, a) = (x, (d\psi_i)_x(d\psi_j^{-1})_{\psi_j(x)}(a)) = (x, d(\psi_i \psi_j^{-1})_{\psi_j(x)}(a)).$$

Sea $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$ la aplicación $g_{ij}(x) = d(\psi_i \psi_j^{-1})_{\psi_j(x)}$. Esta función es suave y, por el lema anterior, se obtiene entonces una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2k$ en TX que lo hace un fibrado suave (real) de rango k . Notar que las cartas resultan ser $\varphi_i = (\psi_i, \text{id}) h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$,

$$\varphi_i(x, v) = (\psi_i(x), (d\psi_i)_x(v)).$$

Ahora, las funciones de transición para TX tienen la forma

$$\varphi_i \varphi_j^{-1}(a, b) = (\psi_i \psi_j^{-1}(a), (d\psi_i \psi_j^{-1})_{\psi_j(\psi_j^{-1}(a))}(b)) = (\psi_{ij}(a), g_{ij}(\psi_j^{-1}(a))(b)).$$

Llamemos $J(\varphi_{ij})$ a la matriz jacobiana de la función $\varphi_i\varphi_j^{-1}$. Entonces

$$J(\varphi_{ij}) = \begin{pmatrix} J(\psi_{ij}) & * \\ 0 & g_{ij}(\psi_j^{-1}(a)) \end{pmatrix}$$

Luego, $\det J(\varphi_{ij}) = \det J(\psi_{ij})\det g_{ij}(\psi_j^{-1}(a)) = \det^2 J(\psi_{ij}) > 0$. Esta igualdad muestra que TX es siempre una variedad orientable, a pesar de que X no lo sea. Ahora, se sabe que el producto de variedades $X \times Y$ es orientable si y solo si lo son X e Y . Sea entonces X una variedad no orientable. Por el desarrollo anterior sabemos que TX es orientable y luego no puede ser trivial, ya que si lo fuera, entonces $TX = X \times \mathbb{R}^k$, lo que niega la orientabilidad de TX (una variedad cuyo fibrado tangente es trivializable se dice que es *paralelizable*).³

El Fibrado Cotangente.

Considerar ahora el conjunto

$$TX^\vee = \coprod_{x \in X} TX_x^\vee,$$

donde TX_x^\vee indica el espacio dual al espacio vectorial TX_x . Sea $\pi : TX^\vee \rightarrow X$ la proyección. Se definen las funciones $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times (\mathbb{R}^n)^\vee$ por

$$h_i(x, \varphi) = (x, \varphi(d\psi_i)_x^{-1}).$$

Estas funciones inducen cartas para TX^* que lo hacen una variedad suave de dimensión $2k$ y, vía el lema anterior, se obtiene también una estructura de fibrado vectorial real de rango k . Este fibrado recibe el nombre de *fibrado cotangente* de X ó *fibrado de 1-formas* en X .

2.2. Fibrados Isomorfos y Relaciones entre sus Cociclos.

Sea $f : E \rightarrow E'$ un isomorfismo entre fibrados vectoriales con base X y $\{U_i \mid i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X tal que, sobre cada U_i , E y E' son triviales. Supongamos también que

$$E|_{U_i} \xrightarrow{h_i} U_i \times \mathbb{C}^n \xleftarrow{h'_i} E'|_{U_i}$$

son trivializaciones locales para E y E' sobre U_i . Llamemos g_{ij} a los cociclos de E y g'_{ij} los cociclos para E' , es decir, $g_{ij}(x) = h_{i,x}h_{j,x}^{-1}$ y $g'_{ij}(x) = h'_{i,x}(h'_{j,x})^{-1}$. Consideremos ahora el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_x & \xrightarrow{f_x} & E'_x \\ & \searrow h_{i,x} & \swarrow h'_{i,x} \\ & \mathbb{C}^n & \end{array}$$

³Mas precisamente, se puede afirmar que, si X no es orientable, entonces su fibrado tangente no puede ser isomorfo al fibrado trivial.

donde $x \in U_i$ y f_x es la restricción de f a la fibra E_x . Sea $e \in E_x$; entonces $h'_{i,x}(f(e))$ no necesariamente coincide con $h_{i,x}(e)$, es decir, el diagrama anterior puede no ser conmutativo. Supongamos que $h_{i,x}(e) = z$ y $h'_{i,x}(f(e)) = z'$ y sea $g_i(x) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $g_i(x)(z) = z'$. Esto define una aplicación diferenciable $g_i : U_i \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ dada por

$$g_i(x) = h'_{i,x} f h_{i,x}^{-1}.$$

El diagrama anterior sería conmutativo si y solo si $g_i(x) = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$. Para U_j se tiene la aplicación $g_j : U_j \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ obtenida análogamente a como se obtuvo la función g_i . Luego, por definición de g_i y g_j , es válida la identidad

$$g'_{ij}(x) = g_i(x)g_{ij}(x)g_j(x)^{-1} \quad (2.4)$$

para todo $x \in U_i \cap U_j$.

Y, recíprocamente, supongamos que viene dada una familia de aplicaciones suaves $\{g_i : U_i \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}) \mid i \in I\}$ que verifican (2.4). Entonces, se define la función $f : E \rightarrow E'$ como

$$f(e) = (h'_{i,x})^{-1}g_i(x)h_{i,x}(e),$$

donde $e \in E_x$. Si $x \in U_i \cap U_j$, entonces, por (2.4), vale la igualdad

$$(h'_{i,x})^{-1}g_i(x)h_{i,x} = (h'_{j,x})^{-1}g_j(x)h_{j,x},$$

lo que muestra la buena definición de f . Además, claramente es biyectiva, preserva las fibras y es diferenciable, y lo mismo para f^{-1} . Luego, define un isomorfismo entre E y E' .

2.3. Secciones.

Definición 2.3.1. Una *sección* de un fibrado vectorial $p : E \rightarrow X$ es una función diferenciable $s : X \rightarrow E$ tal que $s(x) \in E_x$ para cada $x \in X$. Una sección se dice *nunca nula* si para cada $x \in X$, $s(x) \neq 0$ en E_x .

De aquí en más, la palabra sección será sinónimo de sección suave.

Ejemplo 2.3.2. Para cualquier fibrado E sobre X se tiene bien definida una sección global $s : X \rightarrow E$ dada por $s(x) = 0$ para todo $x \in X$. Se llama la *sección nula*.

Ejemplo 2.3.3. Sea E un fibrado sobre X y $h : E|U \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ trivialización local. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbb{C}^n . Se tienen entonces las secciones $s_i : U \rightarrow E$ definidas sobre el abierto U de X dadas por

$$s_i(x) = h^{-1}(x, e_i).$$

Ejemplo 2.3.4. Una sección $X \rightarrow TX$ se llama un campo de vectores diferenciable sobre X . Considerando el fibrado cotangente, una sección $X \rightarrow TX^\vee$ se llama una 1-forma sobre X .

El conjunto de secciones (suaves) de un fibrado vectorial E sobre un abierto $U \subset X$ se notará por $\Gamma(U, E)$. Si $U = X$ (secciones globales) se omitirá la escritura de X y se escribirá solo $\Gamma(E)$. Claramente, el conjunto $\Gamma(U, E)$ tiene estructura de $C^\infty(U, \mathbb{C})$ -módulo. Si $f : L \rightarrow L'$ es un isomorfismo de fibrados sobre X , entonces los $C^\infty(X, \mathbb{C})$ -módulos $\Gamma(L)$ y $\Gamma(L')$ son isomorfos, vía el homomorfismo $f_* : \Gamma(L) \rightarrow \Gamma(L')$ dado por $f_*(s) = fs$.

Definición 2.3.5. Sean s_1, \dots, s_n secciones suaves del fibrado E sobre X ; se dice que estas secciones son *linealmente independientes* si para todo $x \in X$, $\{s_1(x), \dots, s_n(x)\}$ es un conjunto linealmente independiente en E_x . Si además el fibrado E tiene rango n , entonces el conjunto $\{s_1, \dots, s_n\}$ se llama una *base de secciones* para E .

Lema 2.3.6. Sean $p : E \rightarrow X$, $p' : E' \rightarrow X$ fibrados vectoriales complejos de rango n y $f : E \rightarrow E'$ una función suave que manda la fibra E_x isomórficamente en la fibra E'_x . Entonces f es un isomorfismo.

Demostración. Se debe verificar únicamente que la aplicación inversa $f^{-1} : E' \rightarrow E$ es diferenciable. Podemos entonces trabajar localmente, en un abierto U de X que trivializa a E y E' . En ese caso, $f : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ y toma la forma

$$f(x, z) = (x, Az),$$

donde $A = A(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$. Por hipótesis, las entradas $a_{ij} = a_{ij}(x)$ de la matriz $A(x)$ son aplicaciones diferenciables $U \rightarrow \mathbb{C}$. Luego, como las entradas de la matriz inversa A^{-1} son polinomios en las funciones a_{ij} , la inversa $f^{-1} : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$, definida por la ecuación

$$f^{-1}(x, z) = (x, A^{-1}z)$$

resulta claramente diferenciable.

Q.E.D.

Las secciones permiten caracterizar los fibrados trivializables.

Teorema 2.3.7. Un fibrado vectorial complejo de rango n es trivializable si y solo si admite n secciones s_1, \dots, s_n linealmente independientes.

Demostración. Sean s_1, \dots, s_n secciones linealmente independientes. Considerar la función $h : X \times \mathbb{C}^n \rightarrow E$ dada por

$$h(x, z) = z_1 s_1(x) + \dots + z_n s_n(x),$$

donde $z = (z_1, \dots, z_n)$. h es continua y manda cada fibra del fibrado trivial en la correspondiente fibra sobre E . Por el lema anterior, E resulta trivializable.

Supongamos ahora que E es trivializable, y que $h : X \times \mathbb{C}^n \rightarrow E$ es un difeomorfismo. Sean $s_i : X \rightarrow E$ ($i = 1, \dots, n$) las funciones definidas por:

$$s_i(x) = h(x, e_i),$$

donde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Si $\alpha_i : X \rightarrow X \times \mathbb{C}^n$ es la inclusión $\alpha_i(x) = (x, e_i)$, entonces $s_i = h\alpha_i$, lo que prueba que s_i es diferenciable. Como además $s_i(x) \in E_x$ para todo i y s_i es no nula para todo i , estas son las secciones buscadas. Q.E.D.

Sea $U \subset X$ un abierto trivializante para el fibrado $p : E \rightarrow X$ de rango n , y sea $\{s_1, \dots, s_n\}$ base de secciones sobre U . Entonces cualquier otra sección $s : U \rightarrow E|_U$ se escribe como

$$s = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n,$$

donde las aplicaciones $\lambda_i : U \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$ son suaves. La demostración de esta afirmación es, adaptando notaciones, igual a la dada para probar el resultado análogo para, por ejemplo, campos de vectores o formas diferenciales sobre una variedad.

Ejemplo 2.3.8. Otra forma de verificar la trivialidad local del fibrado tangente a una variedad suave X es vía el teorema anterior. Si $\varphi = (x_1, \dots, x_k) : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una carta para X , con $x \in U$, se considera la aplicación (lineal) $d\varphi_{\varphi(x)}^{-1} : \mathbb{R}^k \rightarrow TX_x$. Como φ^{-1} es un difeomorfismo, entonces su diferencial es un isomorfismo de espacios vectoriales. Se obtiene así una base para TX_x , considerando

$$d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x).$$

Se toman entonces las secciones locales $s : U \rightarrow TX$,

$$s(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x).$$

Estas secciones son linealmente independientes sobre U , lo que prueba la trivialidad local de TX .

Ejemplo 2.3.9. Sea X un grupo de Lie; esto es, una variedad diferenciable, con una estructura de grupo y tal que las operaciones de multiplicación e inversión son suaves. Considerar el difeomorfismo $L_x : X \rightarrow X$,

$$L_x(y) = xy,$$

llamado traslación a izquierda. Sea 1 el elemento neutro de X . Entonces la diferencial $(dL_x)_1$ mapea el espacio tangente TX_1 isomórficamente en TX_x . Sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ base de TX_1 y sean $s_i : X \rightarrow TX$ definidas por

$$s_i(x) = (dL_x)_1(v_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq k.$$

Estas funciones dependen suavemente de x y además $s_i(x) \in TX_x$, es decir, son secciones suaves del fibrado tangente de X . Como además $(dL_x)_1$ manda bases en bases, entonces el conjunto $\{s_1(x), \dots, s_k(x)\}$ es linealmente independiente en TX_x para cada $x \in X$. Luego, todo grupo de Lie es paralelizable.

2.4. Reconstrucción de un Fibrado a partir de sus Cociclos.

Los cociclos son a los fibrados vectoriales lo que las funciones de transición son a las variedades diferenciables. Estas funciones de transición definen las leyes

de transformación en las intersecciones de las cartas y, junto a estas, definen la estructura diferenciable para la variedad. Algo similar ocurre para los fibrados vectoriales, como veremos a continuación.

Supongamos dada una variedad suave X con un atlas $\{(U_i, \psi_i) \mid i \in I\}$ y una familia de aplicaciones diferenciables $\{g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}) \mid i, j \in I\}$ que verifican la relación

$$g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$$

en $U_i \cap U_j \cap U_k$. Entonces necesariamente $g_{ii} = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$ y $g_{ji}(x) = g_{ij}(x)^{-1}$ para cada $x \in U_i \cap U_j$. Consideremos ahora el conjunto formado por triples (x, z, i) , donde $x \in U_i$ y $z \in \mathbb{C}^n$ y consideremos la relación de equivalencia $(x, z, i) \sim (x', z', j)$ si y solo si $x = x'$ y $z' = g_{ij}(x)z$. Llamemos E al conjunto de clases de equivalencia $[x, z, i]$ por esta relación y sea $\pi_1 : E \rightarrow X$ la función $\pi_1[x, z, i] = x$.

Por medio del lema 2.1.2 vamos a ver que $\pi_1 : E \rightarrow X$ define un fibrado vectorial de rango n sobre X .

Si $x \in U_i$, entonces $\pi_1^{-1}(x) = \{[x, g_{ij}(x)z, j] \mid z \in \mathbb{C}^n \text{ y } j \in I(i)\}$, donde $I(i)$ es el subconjunto de I formado por los índices j para los cuales $U_i \cap U_j$ no es vacío. Sea $h_i : \pi_1^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ definida por

$$h_i[x, z, i] = (x, z).$$

Esta aplicación es claramente biyectiva. Supongamos ahora que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$; entonces

$$h_i h_j^{-1}(x, z) = h_i[x, z, j] = h_i[x, g_{ij}(x)z, i] = (x, g_{ij}(x)z),$$

y luego $\pi_1 : E \rightarrow X$ define un fibrado vectorial complejo de rango n sobre X .

2.5. Fibrados Inducidos y Operaciones.

En esta sección se describen formas de obtener fibrados vectoriales nuevos a partir de otros dados. La idea es aplicar las operaciones functoriales usuales del álgebra lineal para obtener las fibras de un nuevo fibrado vectorial, a partir de los que se tienen dados. El resultado fundamental para esta sección será el lema 2.1.2, del cual se dará un enunciado alternativo.

2.5.1. Subfibrado.

Antes de pasar a la definición, repasemos algunas otras.

Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación diferenciable, decimos que f es una *inmersión* si para $x \in X$, la diferencial df_x es inyectiva. Si ahora $Y \subset X$ es un subconjunto con la topología relativa y además una variedad diferenciable, decimos que Y es una *subvariedad sumergida* si la inclusión $i : Y \rightarrow X$ es una inmersión y Y e $i(Y) \subset X$ son homeomorfas.

Sea ahora $p : E \rightarrow X$ un fibrado vectorial de rango n . Un *subfibrado* de $E \rightarrow X$ es un subconjunto $F \subset E$ tal que

1. F es una subvariedad sumergida de E .
2. Para cada $x \in X$, la fibra $F_x = F \cap E_x$ es un subespacio vectorial de E_x .

3. Con la estructura de espacio vectorial anterior en cada fibra, $p|_F : F \rightarrow X$ es un fibrado vectorial.

2.5.2. Suma directa externa.

Sean $p : E \rightarrow X$ y $q : F \rightarrow Y$ fibrados vectoriales de rangos n y m respectivamente. La suma directa externa $E \boxplus F$ es el fibrado (de rango $n + m$) con espacio base $X \times Y$ y proyección

$$p \times q : E \boxplus F \rightarrow X \times Y.$$

La fibra $(E \boxplus F)_{(x,y)}$ resulta ser la suma directa externa $E_x \boxplus F_y$ (en el sentido del álgebra lineal). Si $h_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ y $g_i : F|_{V_i} \rightarrow V_i \times \mathbb{C}^m$ son trivializaciones locales para E y F respectivamente, entonces la aplicación $f_i : (E \boxplus F)|_{U_i} \rightarrow (U_i \times V_i) \times (\mathbb{C}^n \boxplus \mathbb{C}^m)$ dada por

$$f_i(e, e') = (h_i(e), g_i(e'))$$

es una trivialización local para $E \boxplus F$. Además, en este caso

$$\begin{aligned} f_i f_j^{-1}((x, y), (z, w)) &= f_i(h_j^{-1}(x, z), g_j^{-1}(y, w)) \\ &= (h_i h_j^{-1}(x, z), g_i g_j^{-1}(y, w)) \\ &= ((x, h_{ij}(x)(z)), (y, g_{ij}(y)(w))) \\ &= ((x, y), (h_{ij}(x)(z), g_{ij}(y)(w))), \end{aligned}$$

donde h_{ij} y g_{ij} son los cociclos de E y F respectivamente. Para la suma directa externa $E \boxplus F$, los cociclos $f_{ij} : (U_i \cap U_j) \times (V_i \cap V_j) \rightarrow \text{GL}(n + m, \mathbb{C})$ vienen dados por

$$f_{ij}(x, y)(z, w) = (h_{ij}(x)(z), g_{ij}(y)(w)),$$

que son suaves ya que h_{ij} y g_{ij} lo son.

2.5.3. Pullback.

Sea $p : E \rightarrow X$ un fibrado vectorial de rango n y sea $f : Y \rightarrow X$ una función suave. Considerar el siguiente subconjunto de $E \times Y$:

$$f^*E = \{(y, e) \mid f(y) = p(e)\}.$$

Sea $\pi_1 : f^*E \rightarrow Y$ la función $\pi_1(y, e) = y$ y $h_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ trivialización local para E . Por la definición de f^*E se tiene una biyección entre $E_{f(y)}$ y la fibra $\pi_1^{-1}(y) = (f^*E)_y$, lo que induce una estructura de espacio vectorial en esta última. Poniendo $V_i = f^{-1}(U_i)$ se tiene una biyección

$$h_i^* : f^*E|_{V_i} \rightarrow V_i \times \mathbb{C}^n$$

dada por $h_i^*(y, e) = (y, p_2 h(e))$, donde $p_2 : U_i \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es $p_2(x, z) = z$.

Se le da a f^*E la topología que hace homeomorfismos a las funciones h_i^* . Ahora, la inversa de h_i^* viene dada por

$$(h_i^*)^{-1}(y, z) = (y, h_i^{-1}(f(y), z)).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
h_i^*(h_j^*)^{-1}(y, z) &= h_i^*(y, h_j^{-1}(f(y), z)) \\
&= (y, p_2 h_i h_j^{-1}(f(y), z)) \\
&= (y, h_{i, f(y)} h_{j, f(y)}^{-1}(z)) \\
&= (y, g_{ij}(f(y))(z))
\end{aligned}$$

de donde se deduce que los cociclos para f^*E son $g_{ij}^* : V_i \cap V_j \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$,

$$g_{ij}^* = g_{ij} f.$$

Luego, por el lema 1.2.2, f^*E es un fibrado vectorial suave de rango igual al rango de E .

Se le da a este fibrado el nombre de pullback porque efectivamente es el pullback (o producto fibrado) del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& & E \\
& & \downarrow p \\
Y & \xrightarrow{f} & X
\end{array}$$

en la categoría de variedades diferenciables y funciones suaves. Veamos que efectivamente cumple la propiedad universal. Sea U una variedad y $\rho_1 : U \rightarrow Y$, $\rho_2 : U \rightarrow E$ diferenciables tales que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
U & & E \\
& \searrow^{\rho_2} & \downarrow p \\
& & f^*E \xrightarrow{\pi_2} E \\
& \searrow_{\rho_1} & \downarrow \pi_1 \\
& & Y \xrightarrow{f} X
\end{array}$$

donde $\pi_2(y, e) = e$. Sea entonces $\varphi : U \rightarrow f^*E$ dada por

$$\varphi(u) = (\rho_1(u), \rho_2(u)).$$

φ está bien definida ya que $p\rho_2 = f\rho_1$ y además es la única aplicación tal que $\pi_2\varphi = \rho_2$ y $\pi_1\varphi = \rho_1$. Y como ρ_1 y ρ_2 son suaves, entonces φ también lo es.

Como caso particular, sea $Y \subset X$ una subvariedad sumergida y consideremos la inclusión $i : Y \rightarrow X$. Entonces el pullback i^*E del fibrado E por la aplicación i se llama la *restricción* de E a Y .

2.5.4. Suma de Whitney.

Sean $p : E \rightarrow X$ y $q : E' \rightarrow X$ fibrados vectoriales complejos de rango n y m respectivamente. Sea $d : X \rightarrow X \times X$ la diagonal. El fibrado vectorial (de rango $n + m$) $d^*(E \boxplus E')$ se llama la *suma de Whitney* de E y E' y se nota $E \oplus E'$. Si $\pi_1 : d^*(E \boxplus E') \rightarrow X$ es la proyección $\pi_1(x, (e, e')) = x$, entonces $\pi_1^{-1}(x) = \{(e, e') \in E \boxplus E' \mid p(e) = q(e') = x\} \cong p^{-1}(x) \oplus q^{-1}(x) = E_x \oplus E'_x$.

2.5.5. El fibrado de homomorfismos.

Sean $p : E \rightarrow X$ y $q : E' \rightarrow X$ fibrados complejos de rango n y m respectivamente. Considerar el conjunto

$$\text{Hom}(E, E') = \prod_{x \in X} \text{Hom}(E_x, E'_x),$$

con la proyección $\pi_1 : \text{Hom}(E, E') \rightarrow X$, $\pi_1(x, A) = x$. Si $h_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ y $h'_i : E'|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^m$ son trivializaciones locales para E y E' respectivamente, sea $\bar{h}_i : \text{Hom}(E, E')|_{U_i} \rightarrow U_i \times \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ dada por

$$\bar{h}_i(x, A) = (x, h'_{i,x} A h_{i,x}^{-1}).$$

Si g_{ij} y g'_{ij} son los cociclos para E y E' respectivamente, entonces los cociclos para el fibrado $\text{Hom}(E, E')$ son $\bar{g}_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Aut}(\text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m))$,

$$\bar{g}_{ij}(x)(A) = g'_{ij}(x) A g_{ij}(x).$$

2.5.6. El fibrado dual.

Sea E un fibrado vectorial de rango n sobre la variedad X , con trivializaciones $h_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$. Sea E^\vee el conjunto

$$E^\vee = \prod_{x \in X} E_x^\vee,$$

(donde E_x^\vee indica el espacio dual al espacio vectorial E_x) con la proyección usual. Entonces las funciones $h_i^\vee : E^\vee|_{U_i} \rightarrow U_i \times (\mathbb{C}^n)^\vee$ dadas por $h_i^\vee(x, \varphi) = (x, \varphi h_{i,x}^{-1})$ son las trivializaciones locales para E^\vee . Los cociclos para E^\vee son las funciones $g_{ij}^\vee : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Aut}((\mathbb{C}^n)^\vee)$, definidas por

$$g_{ij}^\vee(x)(A) = A h_{j,x} h_{i,x}^{-1} = A g_{ij}(x)^{-1},$$

donde g_{ij} son los cociclos para E .

2.5.7. Producto tensorial de fibrados.

Sean E y E' fibrados vectoriales sobre X de rangos n y m respectivamente, con trivializaciones h_i, h'_i . Considerar el conjunto

$$E \otimes E' = \prod_{x \in X} E_x \otimes E'_x,$$

con la proyección usual. Para este caso, las trivializaciones locales resultan ser $\bar{h}_i : E \otimes E'|_{U_i} \rightarrow U_i \times (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$,

$$\bar{h}_i(x, e \otimes e') = (x, h_{i,x}(e) \otimes h'_{i,x}(e')).$$

Si g_{ij} y g'_{ij} son los cociclos para E y E' respectivamente, entonces las funciones $\bar{g}_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$ dadas por

$$\bar{g}_{ij}(x) = g_{ij}(x) \otimes g'_{ij}(x)$$

resultan ser los cociclos para $E \otimes E'$. Veamos que son efectivamente funciones diferenciables.

Sea $g_{ij} = (\lambda_{kl})_{1 \leq k, l \leq n}$, donde $\lambda_{kl} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$ son diferenciables para todo k, l . Entonces, la matriz del producto tensorial de las aplicaciones lineales $g_{ij}(x)$ y $g'_{ij}(x)$ viene dada por

$$\bar{g}_{ij}(x) = g_{ij}(x) \otimes g'_{ij}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(x)g'_{ij}(x) & \cdots & \lambda_{1l}(x)g'_{ij}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{k1}(x)g'_{ij}(x) & \cdots & \lambda_{kl}(x)g'_{ij}(x) \end{pmatrix},$$

lo que prueba la suavidad de los cociclos \bar{g}_{ij} .

Lema 2.5.1. *Se tiene un isomorfismo canónico $E^\vee \otimes E' \cong \text{Hom}(E, E')$.*

Demostración. Sea $f : E^\vee \otimes E' \rightarrow \text{Hom}(E, E')$ la función

$$f(x, \varphi \otimes e') = (x, A_\varphi),$$

donde $A_\varphi : E_x \rightarrow E'_x$ es la aplicación lineal $A_\varphi(e) = \varphi(e)e'$. Esta función manda fibras en fibras isomórficamente. La verificación de la suavidad tanto de f como de f^{-1} es bastante tediosa, pero no difícil. Considerando las trivializaciones para E y E' , y de ellas las de E^\vee , $E^\vee \otimes E'$ y $\text{Hom}(E, E')$, se puede, localmente, armar la expresión de f y verificar que las funciones componentes de la matriz que resulta de esto son diferenciables. Q.E.D.

Notar que, si $s : X \rightarrow E$ y $s' : X \rightarrow E'$ son secciones, entonces la aplicación $s \otimes s' : X \rightarrow E \otimes E'$ definida por la identidad

$$(s \otimes s')(x) = s(x) \otimes s'(x)$$

es también una sección. El siguiente lema dice precisamente que toda sección del fibrado $E \otimes E'$ se obtiene de esta manera.

Lema 2.5.2. *Sea $t : X \rightarrow E \otimes E'$ una sección. Entonces existen secciones $s_1, \dots, s_r : X \rightarrow E$ y $s'_1, \dots, s'_r : X \rightarrow E'$ tales que*

$$t = \sum_{i=1}^r s_i \otimes s'_i.$$

Demostración. Por simplicidad, vamos a suponer que ambos E y E' tienen rango 1. El caso general es completamente análogo.

Sea \mathfrak{U} un cubrimiento de X por abiertos trivializantes para E y E' y, para cada $U \in \mathfrak{U}$, $s_U : U \rightarrow E|_U$ y $s'_U : U \rightarrow E'|_U$ secciones nunca nulas. Para $x \in U \in \mathfrak{U}$, existe una función diferenciable $\lambda_U : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$t(x) = \lambda_U(x)(s_U(x) \otimes s'_U(x)) = \lambda_U(x)s_U(x) \otimes s'_U(x).$$

Sea $\{\varphi_U : U \rightarrow \mathbb{R} \mid U \in \mathfrak{U}\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento \mathfrak{U} y sean $s : X \rightarrow E$ y $s' : X \rightarrow E'$ las secciones definidas por las igualdades

$$s = \sum_{U \in \mathfrak{U}} \varphi_U \lambda_U s_U$$

$$s' = \sum_{U \in \mathfrak{U}} \varphi_U s'_U.$$

Entonces, si $x \in U$,

$$\begin{aligned}
(s \otimes s')(x) &= \sum_{U \in \mathfrak{U}} \varphi_U(x) \lambda_U(x) s_U(x) \otimes \sum_{U \in \mathfrak{U}} \varphi_U(x) s'_U(x) \\
&= \sum_{U \in \mathfrak{U}} \varphi_U(x) (\lambda_U(x) s_U(x) \otimes s'_U(x)) \\
&= \sum_{U \in \mathfrak{U}} \varphi_U(x) t(x) \\
&= t(x).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Corolario 2.5.3. Sean E y E' fibrados vectoriales sobre X y A el anillo $C^\infty(U, \mathbb{C})$. Entonces los A -módulos $\Gamma(E \otimes E')$ y $\Gamma(E) \otimes_A \Gamma(E')$ son isomorfos.

Demostración. Existe una aplicación obvia $\Gamma(E) \otimes_A \Gamma(E') \rightarrow \Gamma(E \otimes E')$, cuya inversa se puede definir vía el lema anterior. Q.E.D.

2.5.8. Complexificación.

Sea $p : E \rightarrow X$ un fibrado vectorial real de rango n . La complexificación $E_{\mathbb{C}}$ de E es el espacio definido por

$$E_{\mathbb{C}} = \coprod_{x \in X} E_x \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Queda definido entonces un fibrado vectorial de rango n complejo sobre X , con espacio total $E_{\mathbb{C}}$, que se llama la *complexificación* de E .

2.5.9. El producto alternado de fibrados.

Si V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, notamos con $\Lambda^r(V) \subset V^{\otimes r}$ a los tensores alternados de V de grado r . Si $p : E \rightarrow X$ es un fibrado vectorial de rango n , se define el fibrado alternado de grado r de E como

$$\Lambda^r(E) \coprod_{x \in X} \Lambda^r(E_x),$$

junto con la proyección usual. Cuando $E = TX$ (real), las secciones de este fibrado son las r -formas diferenciales, y, para $U \subset X$, notaremos por $\Omega^r(U)$, en lugar de $\Gamma(U, \Lambda^r(TX))$, al conjunto de r -formas diferenciales sobre U .

Considerando la complexificación $\Lambda^n(TX)_{\mathbb{C}}$ del producto alternado $\Lambda^n(TX)$, sus secciones son las n -formas a valores en \mathbb{C} , ó n -formas complejas. Más generalmente, si V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, las secciones del fibrado $\Lambda^n(TX)_{\mathbb{C}} \otimes V = \coprod_{x \in X} \Lambda^n(TX)_{\mathbb{C}} \otimes V = \coprod_{x \in X} \Lambda^n(TX) \otimes_{\mathbb{R}} V = \Lambda^n(TX) \otimes V$ son las n -formas a valores en V . El módulo de secciones sobre un abierto U de X para este fibrado vectorial se notará $\Omega_V^n(U)$.

Se puede dar un paso más incluso, y definir las n -formas a valores en un fibrado vectorial E como las secciones del fibrado $\Lambda^n(TX) \otimes E$. Al igual que antes, este

fibrado resulta complejo si E lo es. En este caso, el módulo de secciones sobre U se notará $\Omega_E^n(U)$.

Al igual que para las formas sobre una variedad, se tiene un isomorfismo canónico entre:

1. las n -formas complejas sobre $U \subset X$ y las aplicaciones $C^\infty(U, \mathbb{R})$ -multilineales $(\Gamma(U, TX))^n \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C})$ y
2. las n -formas sobre $U \subset X$ a valores en un fibrado vectorial complejo E y las aplicaciones $C^\infty(U, \mathbb{R})$ -multilineales $(\Gamma(U, TX))^n \rightarrow \Gamma(U, E)$.

En lo que resta del texto, en general no se distinguirá entre las formas diferenciales vistas como secciones o como aplicaciones multilineales, quedando claro del contexto a cual de las representaciones nos estamos refiriendo.

Así, una n -forma sobre U a valores en E se puede representar por una expresión del tipo

$$\sum_i \omega_i \otimes s_i,$$

para ciertas n -formas complejas ω_i sobre U y secciones s_i de $E|_U$ y donde, para cada $x \in U$ y $\xi_1, \dots, \xi_n \in \Gamma(U, TX)$, el término $(\omega_i \otimes s_i)(\xi_1, \dots, \xi_n)(x)$ viene dado por la expresión

$$\omega_i(x)(\xi_1, \dots, \xi_n) s_i(x).$$

2.5.10. La construcción general.

Enunciaremos en esta sección una forma alternativa del lema 2.1.2 en el lenguaje de las categorías.

Sea $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ la categoría de espacios vectoriales complejos de dimensión finita, donde los morfismos son los isomorfismos. Podemos entonces formar la categoría producto $\mathcal{V}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{V}_{\mathbb{C}} = (\mathcal{V}_{\mathbb{C}})^2$, donde los objetos son pares de espacios vectoriales y los morfismos son pares de isomorfismos. Si V y W son espacios vectoriales isomorfos, notamos con $\text{Iso}(V, W)$ al conjunto de isomorfismos de V en W .

Definición 2.5.4. Un funtor covariante⁴ $F : (\mathcal{V}_{\mathbb{C}})^r \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ se dice que es *suave* ó *diferenciable* si la aplicación

$$\text{Iso}(V_1, W_1) \times \dots \times \text{Iso}(V_r, W_r) \rightarrow \text{Iso}(F(V_1, \dots, V_r), F(W_1, \dots, W_r))$$

dada por

$$(f_1, \dots, f_r) \mapsto F(f_1, \dots, f_r)$$

es diferenciable para cualesquiera espacios vectoriales V_i y W_i , $i = 1, \dots, r$.

Notar que la definición anterior tiene sentido ya que el conjunto de isomorfismos entre dos espacios vectoriales V y W de dimensión finita tiene una estructura canónica de variedad diferenciable, la heredada del espacio vectorial $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$.

⁴El caso contravariante es completamente análogo.

Consideremos como ejemplo el fibrado dual E^\vee sobre una variedad X . Para este caso, sea $F : \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ el funtor dado por

$$F(V) = V^\vee$$

$$F(f) = f^\vee,$$

donde $f : V \rightarrow W$ es un isomorfismo y $f^\vee : W^\vee \rightarrow V^\vee$ es la aplicación $f^\vee(\varphi) = \varphi f$. En el curso de la demostración de que E^\vee es un fibrado vectorial, se tuvo que probar justamente que este funtor F es suave. Esta construcción funtorial se puede usar para construir el fibrado E^\vee de la siguiente manera: Se considera el conjunto

$$\coprod_{x \in X} F(E_x).$$

Entonces, que los cociclos g_{ij}^\vee sean suaves es equivalente a que el funtor F sea diferenciable.

En general, si E_1, \dots, E_r son fibrados vectoriales sobre la variedad X , entonces se toma

$$F(E_1, \dots, E_r) = \coprod_{x \in X} F((E_1)_x, \dots, (E_r)_x).$$

Si el funtor F es suave, entonces se puede topologizar al conjunto $F(E_1, \dots, E_r)$ de una forma canónica de tal forma de hacerlo un fibrado vectorial, con fibras $F((E_1)_x, \dots, (E_r)_x)$; ver [MS74] ó [Ati67].

2.6. Sucesiones Exactas.

Nos interesarán principalmente las sucesiones cortas de fibrados vectoriales, que definimos a continuación.

Definición 2.6.1. Una sucesión de fibrados vectoriales sobre X y homomorfismos

$$0 \rightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \rightarrow 0$$

se dice *exacta* si, para cada $x \in X$, la sucesión de espacios vectoriales y transformaciones lineales

$$0 \rightarrow E'_x \xrightarrow{f_x} E_x \xrightarrow{g_x} E''_x \rightarrow 0$$

es exacta.

Definición 2.6.2. Una sucesión exacta corta $0 \rightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \rightarrow 0$ de fibrados vectoriales se dice que *se escinde* si se verifica alguna de las siguientes propiedades equivalentes:

1. Existe un epimorfismo $f' : E \rightarrow E'$ tal que $f'f = \text{id}_{E'}$.
2. Existe un monomorfismo $g' : E'' \rightarrow E$ tal que $gg' = \text{id}_{E''}$.
3. El fibrado E es isomorfo a la suma de Whitney $E' \oplus E''$.

Ejemplo 2.6.3. Dados dos fibrados vectoriales $E, E' \rightarrow X$, podemos formar la sucesión exacta (que obviamente se escinde)

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{f_0} E \oplus E' \xrightarrow{\pi_2} E' \rightarrow 0,$$

donde $f_0(e) = (e, 0)$ y $\pi_2(e, e') = e'$.

Teorema 2.6.4. *Toda sucesión exacta corta de fibrados vectoriales de rango finito sobre una variedad X paracompacta se escinde.*

Demostración. Basta ver que, dado un monomorfismo $f : E \rightarrow E'$, existe un epimorfismo $f' : E' \rightarrow E$ tal que $f'f$ es la identidad. Supongamos primero que $E = \varepsilon_X^n$ y $E' = \varepsilon_X^k$ son triviales. Entonces, f es equivalente a tener un monomorfismo $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$. Sea entonces $f' : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$ un epimorfismo tal que $f'f$ es la identidad de \mathbb{C}^n . Se obtiene así la aplicación buscada $f' : \varepsilon_X^k \rightarrow \varepsilon_X^n$ definiendo $f'(x, z) = (x, f'(z))$.

Supongamos ahora que $\{U_i \mid i \in I\}$ es un cubrimiento de X por abiertos trivializantes para E y E' y sea $f_i : E|_{U_i} \rightarrow E'|_{U_i}$ el homomorfismo f restringido. Por lo anterior, para cada $i \in I$, tenemos entonces definidas aplicaciones $f'_i : E'|_{U_i} \rightarrow E|_{U_i}$ tales que $f'_i f_i = \text{id}$. Si ahora $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_i \mid i \in I\}$, entonces el homomorfismo $f' : E' \rightarrow E$,

$$f' = \sum_{i \in I} \varphi_i f'_i$$

que, para $e' \in E'_x$, viene dado por $f'(e') = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) f'_i(e')$, cumple lo pedido. Q.E.D.

2.7. Fibrados de Línea.

Un *fibrado de línea* es un fibrado vectorial complejo de rango 1. Si $L \rightarrow X$ es un fibrado de línea, las trivializaciones locales son de la forma

$$h : L|_U \rightarrow U \times \mathbb{C},$$

donde U es un abierto de la variedad X . Esto equivale a tener una sección $s : U \rightarrow L|_U$ que no se anule en ningún punto.

Como sucede con los espacios vectoriales de dimensión 1, los fibrados de línea son un poco más simples de manejar que los vectoriales de rango $n > 1$. Si $s : U \rightarrow L|_U$ es una sección local nunca nula, cualquier otra sección $s' : U \rightarrow L|_U$ es de la forma $s' = \lambda s$, para $\lambda : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función suave. Como caso particular, si $L' \rightarrow X$ es otro fibrado de línea y $s' : U \rightarrow L'|_U$ es una sección nunca nula, entonces todas las secciones de $(L \otimes L')|_U$ son de la forma $\lambda(s \otimes s')$ para $\lambda : U \rightarrow \mathbb{C}$. Si ahora consideramos el fibrado dual L^\vee , la sección local s induce una sección local nunca nula $s^\vee : U \rightarrow L^\vee|_U$, dada por $s^\vee(x)(s(x)) = 1$.

Sea $f : L \rightarrow L'$ un homomorfismo de fibrados de línea sobre la variedad X . Notemos con f_x a la restricción de f a la fibra L_x ; luego, $f_x : L_x \rightarrow L'_x$ es una

aplicación lineal. Como además L_x y L'_x tienen dimensión 1, f_x es un isomorfismo o es la aplicación nula. Sean ahora los conjuntos

$$U = \{x \in X \mid f_x \text{ es un isomorfismo}\}$$

$$V = \{x \in X \mid f_x = 0\}.$$

Claramente U y V son abiertos de X , disjuntos y su unión es X , con lo cual alguno de ellos debe ser vacío. Entonces cualquier homomorfismo de fibrados de línea sobre X es un isomorfismo o es el homomorfismo nulo.

Consideremos ahora el fibrado de homomorfismos $L \rightarrow L$, donde L es un fibrado de línea. Sea $s : X \rightarrow \text{Hom}(L, L)$ la aplicación definida por $s(x) = (x, \text{id}_{L_x})$. Esta función es suave, no nula y mapea cada $x \in X$ en la fibra sobre x de $\text{Hom}(L, L)$. Luego es una sección y por 1.1.10, $L^\vee \otimes L \cong \text{Hom}(L, L)$ resulta trivial.

El conjunto de clases de isomorfismo de fibrados de línea complejos con base X se notará $\text{Pic}^\infty(X)$. Las propiedades de \otimes junto con la trivialidad de $L^\vee \otimes L$ permite proporcionarle a $\text{Pic}^\infty(X)$ una estructura de grupo.

Notemos con $[L]$ la clase de isomorfismo del fibrado L y definamos un producto en $\text{Pic}^\infty(X)$ de la siguiente manera: $[L][L'] = [L \otimes L']$. La asociatividad de \otimes induce una asociatividad en $\text{Pic}^\infty(X)$. Si ε^1 denota el fibrado trivial $X \times \mathbb{C}$, entonces $[\varepsilon^1][L] = [L][\varepsilon^1] = [L]$ ya que $\varepsilon^1 \otimes L \cong L \otimes \varepsilon^1 \cong L$, vía el isomorfismo $L \otimes (X \times \mathbb{C}) \rightarrow L$ dado por $e \otimes (x, z) \mapsto ze$; y dado $[L] \in \text{Pic}^\infty(X)$, su inverso es la clase del fibrado dual, $[L^\vee]$. Como además $L \otimes L'$ es canónicamente isomorfo a $L' \otimes L$, $\text{Pic}^\infty(X)$, con la operación antes definida, resulta un grupo abeliano; es la versión diferenciable del grupo de Picard usual de clases de fibrados de línea holomorfos sobre una variedad compleja.

Ejemplo 2.7.1. Sea $V = \mathbb{C}^n$. Si $z \in V$, existe un subespacio unidimensional de V , o sea una recta por el origen, que contiene a z . Llamemos indistintamente ℓ a esta recta, vista en V ó vista como un punto del plano proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}(V)$. Si $V_i \subset V - \{0\}$ es el abierto

$$V_i = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_i \neq 0\},$$

entonces $\mathbb{P}^{n-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n U_i$, donde $U_i = \pi(V_i)$ y $\pi : V - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(V)$ es la proyección canónica. Vamos a construir a continuación un fibrado de línea complejo sobre $\mathbb{P}^{n-1}(V)$, llamado el *fibrado tautológico*.

Sea L el conjunto de los pares (ℓ, z) , donde ℓ es una recta por el origen en V y $z \in \ell$ y sea $\pi_1 : L \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(V)$ la proyección $\pi_1(\ell, z) = \ell$. Consideremos ahora, para cada $i = 1, \dots, n$ la aplicación $h_i : L|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ definida por

$$h_i(\ell, z) = (\ell, z_i).$$

Esta aplicación restringida a la fibra L_ℓ es claramente lineal; y además es una biyección, con inversa

$$h_i^{-1}(\ell, \lambda) = (\ell, z),$$

donde $z = (z_1, \dots, z_n) \in V$ es el único vector que verifica simultáneamente que $z \in \ell$ y $z_i = \lambda$. Para cada $\ell \in \mathbb{P}^{n-1}(V)$, fijemos un representante $z^\ell = (z_1^\ell, \dots, z_n^\ell)$,

por ejemplo de norma 1. Entonces, los cociclos para L resultan ser las funciones diferenciables $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ dadas por

$$g_{ij}(\ell)(\lambda) = \frac{z_i^\ell}{z_j^\ell} \lambda.$$

2.8. Fibrados Principales.

Sea G un grupo de Lie actuando a derecha sobre una variedad diferenciable X vía la aplicación suave $\theta : X \times G \rightarrow X$. Notemos con $x.g$ a la imagen del par (x, g) por $\theta(g)$, es decir

$$\theta(x, g) = x.g$$

La acción se dice *libre* si cada vez que se cumple $x.g = x$ para ciertos elementos $g \in G$ y $x \in X$, entonces $g = 1$, el elemento neutro de G .

Definición 2.8.1. Sean P , X y F variedades suaves, G un grupo de Lie actuando a derecha libremente sobre P y $p : P \rightarrow X$ una aplicación diferenciable sobreyectiva. Entonces p se dice un *fibrado principal* ó *G -fibrado principal* si se cumple lo siguiente:

1. La aplicación p (proyección) es G -invariante, esto es, $p(e.g) = p(e)$ para todo $e \in P$ y $g \in G$,
2. $X \cong P/G$ vía el difeomorfismo $[e] \mapsto p(e)$.
3. P es localmente trivial. O sea, existe un cubrimiento abierto $\{U_i \mid i \in I\}$ de X y difeomorfismos

$$h_i : p^{-1}(U_i) = P|_{U_i} \rightarrow U_i \times F$$

tales que $\pi_1 h_i = p$ para $\pi_1 : U_i \times F \rightarrow U_i$ la proyección y, si $\pi_2 : U_i \times F \rightarrow F$ es la proyección de la segunda coordenada, y $\bar{h}_i = \pi_2 h_i$, entonces

$$\bar{h}_i(e.g) = \bar{h}_i(e)g$$

para cada $e \in p^{-1}(U_i)$ y $g \in G$.

La variedad F recibe el nombre de *fibra* (notar que, si $x \in X$, entonces $P_x = p^{-1}(x)$ y F son difeomorfas).

Algunas consecuencias inmediatas de la definición son las siguientes:

1. La acción de G preserva las fibras. O sea, si $e \in P_x$, entonces $e.g \in P_x$ para cada $g \in G$.
2. El punto 2 de la definición podría no ser cierto en general y por eso se pide en la definición). Considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & X \\ \pi \downarrow & & \\ P/G & & \end{array}$$

Entonces la aplicación p induce un homeomorfismo $f : P/G \rightarrow X$ si y solo si p es una función cociente; ver [Mun75].

3. Se tiene un difeomorfismo $G \cong P_x$ definido por $g \mapsto e.g$. La inyectividad es consecuencia de que la acción es libre. Si esta función no fuera sobreyectiva, entonces se estaría contradiciendo el ítem 2. de la definición. En particular, G actúa sobre si mismo a derecha.
4. Por la observación anterior, se pueden escribir las trivializaciones locales como

$$h_i : P|_{U_i} \rightarrow U_i \times G.$$

Una *sección* del fibrado principal $P \rightarrow X$ es una aplicación diferenciable $s : X \rightarrow P$ tal que $s(x) \in P_x$. Contrariamente al caso de los fibrados vectoriales, para los fibrados principales se puede asegurar la existencia de secciones locales, vía las trivializaciones, pero no globales. Ver la proposición 2.8.14.

Sea $\{U_i \mid i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X tal que, para cada $i \in I$ tenemos definido un difeomorfismo

$$h_i : P|_{U_i} \rightarrow U_i \times G.$$

Supongamos que $U_i \cap U_j = U_{ij} \neq \emptyset$. Podemos entonces considerar el producto $\bar{h}_i \bar{h}_j^{-1} : P|_{U_{ij}} \rightarrow G$ definido por

$$\bar{h}_i \bar{h}_j^{-1}(e) = \bar{h}_i(e) \bar{h}_j(e)^{-1}.$$

Sea $e \in P_x$, con $x \in U_{ij}$ y $g \in G$. Como las aplicaciones \bar{h}_i y \bar{h}_j son G -equivariantes, entonces

$$\bar{h}_i \bar{h}_j^{-1}(e.g) = \bar{h}_i(e) g g^{-1} \bar{h}_j(e)^{-1}.$$

Luego, $\bar{h}_i \bar{h}_j^{-1}$ depende solo de la proyección de e en X y no de e , quedando bien definida una aplicación diferenciable $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ dada por

$$g_{ij}(x) = \bar{h}_i(e) \bar{h}_j(e)^{-1},$$

donde $e \in P_x$. Estas funciones diferenciables se llaman *cociclos* del fibrado P y, análogamente al caso de fibrados vectoriales, verifican

1. si $U_i \cap U_j \cap U_k = U_{ijk} \neq \emptyset$, entonces $g_{ij} g_{jk} = g_{ik} : U_{ijk} \rightarrow G$,
2. $g_{ii}(x) = 1$ para cualquier $x \in U_i$ y
3. $g_{ji}(x) = g_{ij}(x)^{-1}$ si $x \in U_{ij}$.

También como en el caso de fibrados vectoriales, los cociclos permiten reconstruir el fibrado principal unívocamente. Ver [KN63], proposición 5.2.

Ejemplo 2.8.2. El G -fibrado principal trivial es $\pi_1 : X \times G \rightarrow X$, donde la acción de G viene dada por

$$(x, g).h = (x, gh).$$

Ejemplo 2.8.3. Sea X una variedad suave de dimensión n y $\varepsilon_X^n = X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$ el fibrado trivial. Notemos con $\text{Iso}(\mathbb{R}^n, TX_x)$ el subconjunto de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, TX_x)$ formado por todos los isomorfismos $\mathbb{R}^n \rightarrow TX_x$. Se define el *fibrado de bases* de X por

$$FX = \coprod_{x \in X} \text{Iso}(\mathbb{R}^n, TX_x),$$

con proyección $\pi : FX \rightarrow X$, $(x, \varphi) \mapsto x$. En este caso, $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ actúa libremente en FX vía

$$((x, \varphi), A) \mapsto (x, \varphi A),$$

donde $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow TX_x$ es un isomorfismo. Si $h_i : TX|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ es una trivialización local para el fibrado tangente, entonces $\bar{h}_i : FX|_{U_i} \rightarrow U_i \times \text{GL}(n, \mathbb{R})$ dada por

$$\bar{h}_i(x, \varphi) = (x, h_{i,x}\varphi)$$

es una trivialización local para FX . Como también $FX/\text{GL}(n, \mathbb{R}) \cong X$ y vale que $\pi(x, \varphi A) = \pi(x, \varphi)$, FX resulta un $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ -fibrado principal.⁵

Ejemplo 2.8.4. Generalizando el ejemplo anterior, podemos considerar el fibrado de bases de un fibrado vectorial complejo de rango n arbitrario $E \rightarrow X$, definido por

$$FE = \coprod_{x \in X} \text{Iso}(\mathbb{C}^n, E_x).$$

Para este caso, $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$. Esta construcción define un funtor covariante de la categoría de fibrados vectoriales complejos de rango n sobre X en la categoría de G -fibrados principales sobre X que a cada fibrado vectorial E le asigna su fibrado de bases FE y a cada homomorfismo $f : E \rightarrow E'$ le asigna la aplicación $f_* : FE \rightarrow FE'$ definida por

$$f_*(x, \varphi) = (x, f_x\varphi),$$

donde f_x es la restricción de f a la fibra E_x . La misma consideración vale obviamente para fibrados reales.

Ejemplo 2.8.5. Sea $O(n)$ el grupo ortogonal real (matrices reales con columnas ortonormales; o sea $A \in O(n)$ si y solo si $AA^t = 1$). Podemos identificar al grupo $O(n-1)$ con un subgrupo de $O(n)$ vía

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto produce un difeomorfismo $f : O(n)/O(n-1) \rightarrow S^{n-1}$,

$$[A] = [(a_{ij})] \mapsto (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}).$$

⁵La estructura de variedad diferenciable en un cociente X/G , donde G es un grupo de Lie actuando sobre X , dista mucho de ser trivial. Un texto introductorio que contiene resultados sobre acciones de grupos en variedades es [Lee02]. Otros textos que se pueden consultar, más avanzados y específicos, son [tD87] y [Bre72].

Considerar la acción $O(n) \times O(n-1) \rightarrow O(n)$, dada por

$$(A, B) \mapsto AB.$$

Esta acción es libre y define un $O(n-1)$ -fibrado principal $p : O(n) \rightarrow S^{n-1}$, donde $p = f\pi$, con $\pi : O(n) \rightarrow O(n)/O(n-1)$ la proyección canónica.

Ejemplo 2.8.6. Análogamente al ejemplo anterior se obtienen fibrados principales

1. $U(n) \rightarrow S^{2n-1}$, $G = U(n-1)$,
2. $SU(n) \rightarrow S^{2n-1}$, $G = SU(n-1)$,
3. $Sp(n) \rightarrow S^{4n-1}$, $G = Sp(n-1)$,

donde $U(n)$ (el *grupo unitario*) es el análogo complejo de $O(n)$, $SU(n)$ (el *grupo unitario especial*) es el subgrupo de $U(n)$ formado por los elementos con determinante 1 y $Sp(n)$ son las matrices A con coeficientes cuaterniónicos tales que $AA^t = 1$ (es el análogo cuaterniónico de $O(n)$ y se llama el *grupo simpléctico*).

Los últimos ejemplos son casos particulares de un resultado que se verá a continuación. Para la demostración, se necesita el siguiente teorema, cuya demostración se puede ver en [War83].

Teorema 2.8.7. Sean $H \subset G$ grupos de Lie, con H cerrado, y $[g] \in G/H$. Entonces existe un vecindad W de $[g]$ y una aplicación diferenciable $s : W \rightarrow G$ tal que $\pi s = id_W$, donde $\pi : G \rightarrow G/H$ es la proyección canónica.

Corolario 2.8.8. Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de G . Entonces la proyección canónica $\pi : G \rightarrow G/H$ define un H -fibrado principal.

Demostración. La acción de H en G es la multiplicación $G \times H \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto g.h = gh$. Los puntos 1 y 2 de la definición de fibrado principal son inmediatos. Veamos que $\pi : G \rightarrow G/H$ es localmente trivial. Sea $[g_0] \in G/H$, W una vecindad de $[g_0]$ como en el teorema anterior y $\varphi : W \times H \rightarrow G$ la aplicación dada por

$$\varphi([g], h) = s[g]h.$$

Supongamos ahora que $\varphi([g], h) = \varphi([g'], h')$. En ese caso, vale la igualdad

$$s[g]^{-1}s[g'] = s[g^{-1}g'] = hh'^{-1}.$$

Aplicando π a ambos lados de la igualdad, y teniendo en cuenta que $\pi s = id_W$, llegamos a que $[g^{-1}g'] = 1$, o sea $[g] = [g']$ y luego también $h = h'$, lo que muestra la inyectividad de φ .

Claramente, $\text{im } \varphi \subset \pi^{-1}(W)$. Sea ahora $g \in \pi^{-1}(W)$. Por el teorema anterior, vale la igualdad $[s[g]] = [g]$ en G/H . Esto es equivalente a que exista un (único) $h \in H$ tal que $g = s[g]h$. Entonces,

$$\varphi(g, h) = s[g]h = g.$$

Luego, la aplicación $\varphi : W \times H \rightarrow \pi^{-1}(W)$ es biyectiva y además preserva las fibras, con lo cual solo resta verificar que es G -invariante, ya que claramente φ y φ^{-1} son suaves. Para eso consideremos la composición

$$\pi^{-1}(W) \xrightarrow{\varphi^{-1}} W \times H \xrightarrow{\pi_2} H.$$

La inversa de φ viene dada por

$$\varphi^{-1}(g) = ([g], h),$$

donde h es el único elemento de H tal que $g = s[g]h$. Sea ahora $h' \in H$. Entonces

$$\pi_2 \varphi^{-1}(gh') = \pi_2([gh'], h_0) = h_0,$$

donde $gh = s[gh]h_0 = s[g]h_0$. Por otro lado,

$$\pi_2 \varphi^{-1}(g)h' = \pi_2([g], h)h' = hh'.$$

Pero $g = s[g]h$ y luego $gh' = s[g]hh' = s[g]h_0$, con lo cual $h_0 = hh'$, y el corolario queda demostrado. Q.E.D.

Observación 3. *Notar que el teorema anterior dice que para cada $[g] \in G/H$, se tiene una sección $s : W \rightarrow G$, donde W es una vecindad de $[g]$ en G/H . Luego, en el corolario, lo único que se hizo fue construir las trivializaciones a partir de estas secciones que proporciona el teorema. Comparar con el caso análogo para fibrados vectoriales.*

2.8.1. Fibrados Asociados.

Sea $p : P \rightarrow X$ un G -fibrado principal y $\rho : G \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una acción lineal a izquierda fija del grupo G en \mathbb{C}^n . Considerar el espacio cociente

$$P \times^G \mathbb{C}^n = P \times \mathbb{C}^n / G,$$

donde $[e, z] = [e', z']$ si y solo si existe un g en G tal que $e' = e.g$ y $z' = g^{-1}.z$. Sea $p' : P \times^G \mathbb{C}^n \rightarrow X$ la aplicación $p'[e, z] = p(e)$.

Lema 2.8.9. *La función p' define un fibrado vectorial complejo de rango n .*

Demostración. En primer lugar, sean $[e, z]$ y $[e', z']$ en la misma fibra $p'^{-1}(x)$, esto es, $p(e) = p(e') = x$. Como se tiene un isomorfismo C^∞ entre P_x y G , existe una upla de la forma (e, w) tal que $[e', z'] = [e, w]$. Se define entonces

$$\alpha[e, z] + \beta[e, w] = [e, \alpha z + \beta w],$$

donde α y β son números complejos. Las trivializaciones locales $f_i : p'^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ se definen a partir del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{(h_i, \text{id})} & U_i \times G \times \mathbb{C}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow (\text{id}, \rho) \\ p'^{-1}(U_i) & \xrightarrow{f_i} & U_i \times \mathbb{C}^n, \end{array}$$

donde $h_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$ es una trivialización local para $p : P \rightarrow X$. Esto es, si $e \in P_x$ y $h_i(e) = (x, g)$, entonces

$$f_i[e, z] = (x, g.z) = (p(e), g.z).$$

Veamos que está bien definida. Si $[e, z] = [e', z']$, entonces e y e' están en la misma fibra, digamos P_x y existe un elemento $g_0 \in G$ tal que $e' = e.g_0$ y $z' = g_0^{-1}.z$. Sea $h_i(e) = (x, g)$. Por el ítem 3 de la definición de fibrado principal, se tiene que $h_i(e') = h_i(e.g_0) = (x, gg_0)$. Entonces $f[e', z'] = (x, gg_0.z') = (x, g.z) = f[e, z]$, ya que $g_0.z' = z$.

Para encontrar la expresión de los cociclos de este nuevo fibrado, notemos primero que $f_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C}^n \rightarrow p^{-1}(U_i)$ viene dada por

$$f_i^{-1}(x, z) = [e, \bar{h}_i(e)^{-1}.z].$$

Luego,

$$f_i f_j^{-1}(x, z) = (x, \bar{h}_i(e) \bar{h}_j(e)^{-1}.z),$$

o sea, los cociclos $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ vienen dados por

$$g_{ij}(x)(z) = \bar{h}_i(e) \bar{h}_j(e)^{-1}.z,$$

que están bien definidos por ser la acción de G en \mathbb{C}^n lineal.

Resta verificar que $f_{i,x}^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow P_x$ es un isomorfismo lineal. Para eso solo basta ver que es lineal. Si z y z' son elementos de \mathbb{C}^n , $f_{i,x}^{-1}(z + z') = f_i^{-1}(x, z + z') = [h_i^{-1}(x, 1), z + z'] = [h_i^{-1}(x, 1), z] + [h_i^{-1}(x, 1), z'] = f_{i,x}^{-1}(z) + f_{i,x}^{-1}(z')$. Si ahora λ es un número complejo, $f_{i,x}^{-1}(\lambda z) = [h_i^{-1}(x, 1), \lambda z] = \lambda f_{i,x}^{-1}(z)$. Q.E.D.

Ejemplo 2.8.10. Si $G \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es la representación trivial

$$(g, z) \mapsto z,$$

entonces $P \times^G \mathbb{C}^n$ resulta isomorfo al fibrado trivial $X \times \mathbb{C}^n$.

Ejemplo 2.8.11. Considerar el fibrado de bases FX de una variedad suave X . En este caso, $FX \times^G \mathbb{R}^n$ resulta isomorfo al fibrado tangente TX , donde $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$, vía el isomorfismo $f : FX \times^G \mathbb{R}^n \rightarrow TX$ dado por

$$f[(x, \varphi), y] = (x, \varphi(y)).$$

Ver la proposición 2.8.15.

Si V es un espacio vectorial complejo (resp. real) de dimensión finita, G un grupo de Lie y $G \times V \rightarrow V$ una representación lineal de G , la construcción anterior puede generalizarse muy fácilmente para obtener un fibrado vectorial complejo (resp. real) $P \times^G V$.

Si $A : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal entre representaciones de G , queda inducido un homomorfismo $A_* : P \times^G V \rightarrow P \times^G W$ que viene dado por la fórmula

$$A_*[e, v] = [e, A(v)].$$

Sean ahora G un grupo de Lie, $p : P \rightarrow X$ un G -fibrado principal, V_i ($i = 0, 1, 2$) tres espacios vectoriales complejos de dimensión finita y $\rho_i : G \times V_i \rightarrow V_i$ ($i = 0, 1, 2$) tres representaciones de G . Supongamos que la sucesión

$$0 \rightarrow V_0 \xrightarrow{A_0} V_1 \xrightarrow{A_1} V_2 \rightarrow 0$$

es exacta. Entonces queda inducida una sucesión de fibrados vectoriales

$$0 \rightarrow P \times^G V_0 \xrightarrow{(A_0)^*} P \times^G V_1 \xrightarrow{(A_1)^*} P \times^G V_2 \rightarrow 0$$

que también resulta exacta.

Si la representación $G \times V \rightarrow V$ es la trivial, entonces es fácil ver que el fibrado vectorial $P \times^G V$ es isomorfo al fibrado vectorial trivial $X \times V$.

El siguiente resultado da una caracterización del módulo de secciones de los fibrados asociados.

Proposición 2.8.12. *Si U es un subconjunto abierto del espacio X , el módulo de secciones locales $\Gamma(U, P \times^G V)$ es isomorfo al módulo $C^\infty(P|_U, V)^G$ de aplicaciones suaves G -equivariantes $P|_U \rightarrow V$.*

Notar que en este caso, una aplicación $f : P \rightarrow V$ es G -equivariante si $f(e.g) = g^{-1}.f(e)$.

Demostración. Consideramos $U = X$. Sea $f : P \rightarrow V$ una aplicación suave G -equivariante y $\bar{f} : P \rightarrow P \times V$ la función $\bar{f}(e) = (e, f(e))$. Entonces

$$f(e.g) = (e.g, f(e.g)) = (e.g, g^{-1}f(e)) = \bar{f}(e).g.$$

Definimos la sección $s_f : X \rightarrow P \times^G V$ por medio del diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\bar{f}} & P \times V \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{s_f} & P \times^G V, \end{array}$$

donde π es la proyección al cociente. Es decir,

$$s_f(x) = \pi(e, f(e)) = [e, f(e)],$$

para $e \in P_x$. Si $e' \in P_x$, entonces $e' = e.g$ para cierto $g \in G$ y luego

$$\begin{aligned} \pi(e', f(e')) &= \pi(e.g, f(e.g)) \\ &= [e.g, g^{-1}f(e)] \\ &= [e, f(e)] \\ &= \pi(e, f(e)), \end{aligned}$$

lo que muestra la buena definición de la sección s_f . Queda entonces determinado un homomorfismo $\Phi : C^\infty(P, V)^G \rightarrow \Gamma(P \times^G V)$, $\Phi(f) = s_f$.

Supongamos ahora que tenemos dada una sección $s \in \Gamma(P \times^G V)$. Por definición de la acción de G , la restricción

$$\pi_e := \pi|_{\{e\} \times V} : \{e\} \times V \rightarrow (P \times^G V)_{p(e)}$$

es un difeomorfismo. Sea entonces $f_s : P \rightarrow V$ la aplicación suave dada por

$$f_s(e) = \tilde{\pi}_e(s(p(e))),$$

donde $\tilde{\pi}_e$ es la composición

$$(P \times^G V)_{p(e)} \xrightarrow{\pi_e^{-1}} \{e\} \times V \xrightarrow{\pi_2} V,$$

para π_2 la proyección canónica.

Sea ahora $g \in G$ y supongamos que $s(p(e)) = [e, v]$. Entonces

$$\begin{aligned} f_s(e.g) &= \tilde{\pi}_{e.g}(s(p(e.g))) \\ &= \tilde{\pi}_{e.g}(s(p(e))) \\ &= \tilde{\pi}_{e.g}[e, v] \\ &= \tilde{\pi}_{e.g}[e.g, g^{-1}.v] \\ &= \pi_2(e.g, g^{-1}.v) \\ &= g^{-1}.v \\ &= g^{-1}.f_s(e), \end{aligned}$$

y luego $f_s \in C^\infty(P, V)^G$, quedando definido así un homomorfismo $\Gamma(P \times^G V) \rightarrow C^\infty(P, V)^G$, $s \mapsto f_s$, que resulta ser el inverso de Φ . Q.E.D.

Definición 2.8.13. Un *homomorfismo de G -fibrados principales* sobre X , $P \rightarrow Q$, consiste en una función suave $f : P \rightarrow Q$ que es G -equivariante, es decir, que cumple $f(e.g) = f(e).g$ para todo $e \in P$ y $g \in G$, y tal que $qf = p$, donde $p : P \rightarrow X$ y $q : Q \rightarrow X$ son las proyecciones. Si además la aplicación f es un difeomorfismo, entonces se dice que los fibrados son *isomorfos* y que f es un *isomorfismo*.

Como antes, llamamos a un G -fibrado principal *trivializable* si y solo si es isomorfo al fibrado trivial $X \times G$.

Proposición 2.8.14. *Un G -fibrado principal $P \rightarrow X$ es trivializable si y solo si existe una sección global $s : X \rightarrow P$.*

Demostración. Si $P \rightarrow X$ es trivializable, vía un isomorfismo $f : X \times G \rightarrow P$, entonces la aplicación $s : X \rightarrow P$ dada por $s(x) = f(x, 1)$ define la sección buscada.

Por otro lado, para cada x en X vale la igualdad $P_x = \{s(x).g \mid g \in G\}$; luego, el homomorfismo $f : X \times G \rightarrow P$ definido por

$$f(x, g) = s(x).g$$

define el isomorfismo buscado. Q.E.D.

Sea $\mathcal{P}rinc_G(X)$ la categoría de G -fibrados principales sobre X donde la acción de G está fija y $\mathcal{V}ector_{\mathbb{C}^n}(X)$ la categoría de fibrados vectoriales complejos de rango n sobre X . La construcción de fibrado asociado permite definir un funtor covariante $-\times^G \mathbb{C}^n : \mathcal{P}rinc_G(X) \rightarrow \mathcal{V}ector_{\mathbb{C}^n}(X)$, que a cada G -fibrado principal le asigna su fibrado vectorial asociado $P \times^G \mathbb{C}^n$ y a cada morfismo $f : P \rightarrow P'$ en $\mathcal{P}rinc_G(X)$, el homomorfismo $f_* : P \times^G \mathbb{C}^n \rightarrow P' \times^G \mathbb{C}^n$ definido por la expresión

$$f_*[e, z] = [f(e), z].$$

Recordar que también está definido un funtor $F : \mathcal{V}ector_{\mathbb{C}^n}(X) \rightarrow \mathcal{P}rinc_G(X)$, que a cada fibrado vectorial complejo de rango n le asigna su fibrado de bases, con $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$.

Proposición 2.8.15. *Si $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$, las categorías $\mathcal{P}rinc_G(X)$ y $\mathcal{V}ector_{\mathbb{C}^n}(X)$ son equivalentes.*

Demostración. Se debe verificar que, dados un fibrado vectorial complejo E de rango n y P un G -fibrado principal, se tienen isomorfismos

$$P \rightarrow F(P \times^G \mathbb{C}^n)$$

$$E \rightarrow FE \times^G \mathbb{C}^n.$$

Sea $f : P \rightarrow F(P \times^G \mathbb{C}^n)$ definida por

$$f(e)(z) = [e, z].$$

Es claro que f preserva fibras, es G -equivariante y que, para cada $e \in P$, $f(e)$ es un isomorfismo $\mathbb{C}^n \rightarrow (P \times^G \mathbb{C}^n)_x$, suponiendo a e en P_x . Si $f(e) = f(e')$, entonces para todo $z \in \mathbb{C}^n$, las clases $[e, z]$ y $[e', z]$ coinciden. Luego, debe existir una matriz $A \in G$ tal que $e' = e.A$ y $z = A^{-1}z$. Pero esto puede pasar solo si $A = 1$ y así $e = e'$. Sea ahora $A : \mathbb{C}^n \rightarrow (P \times^G \mathbb{C}^n)_x$ un isomorfismo, o sea un elemento de la fibra sobre x del fibrado $F(P \times^G \mathbb{C}^n)$. La fibra sobre x del fibrado $P \times^G \mathbb{C}^n$ la podemos escribir como

$$\{[e_0, z] \mid z \in \mathbb{C}^n\},$$

para un cierto $e_0 \in P_x$ fijo. Así, el isomorfismo A es en realidad equivalente a un isomorfismo $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, es decir, a un elemento del grupo G . Llamando también A a este isomorfismo y tomando $e = e_0 A^{-1}$, vale entonces que $f(e) = A$. Luego f resulta una biyección. Sea ahora U un abierto de X en donde P es trivial, con trivialización h . Luego (ver el lema 2.8.9), la trivialización h' sobre U para el fibrado vectorial $P \times^G \mathbb{C}^n$ viene dada por $h'[e, z] = (x, Az)$, si $h(e) = (x, A)$. Entonces

$$f(e)(z) = (h')^{-1}(x, \bar{h}(e)z),$$

lo que prueba la suavidad de f .

Veamos ahora la inversa $f^{-1} : F(P \times^G \mathbb{C}^n) \rightarrow P$. Las aplicaciones lineales $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, es decir, los elementos de $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$ están en correspondencia biunívoca con los isomorfismos $\mathbb{C}^n \rightarrow (P \times^G \mathbb{C}^n)_x$ vido el isomorfismo $A \mapsto A_*$ visto anteriormente.

Sea ahora $A_* \in \text{Iso}(\mathbb{C}^n, P \times^G \mathbb{C}^n)_x$ y $e, e' \in P_x$ tales que $[e, Az] = [e', Az]$ para cada $z \in \mathbb{C}^n$. Entonces existe una matriz inversible B tal que $e' = e.B$ y $Az = B^{-1}Az$, de donde se deduce que $B = 1$, y luego $e = e'$. Definimos entonces la inversa f^{-1} por la fórmula

$$f^{-1}(A_*) = e.A,$$

donde $e \in P_x$ es el único elemento tal que $A_*(z) = [e, Az]$. Un cálculo directo muestra que efectivamente f^{-1} es la aplicación inversa de f , considerando la identidad $[e.A, z] = [e, Az]$, y además preserva las fibras. La suavidad se verifica de una manera análoga a como se hizo con f .

Para el otro isomorfismo, consideremos la aplicación $g : FE \times^G \mathbb{C}^n \rightarrow E$ dada por

$$g[A, z] = A(z).$$

Si $[A, z] = [A', z']$, entonces $A' = AB$ y $z' = B^{-1}z$ para cierta matriz inversible B . Luego, $A'z' = AB(B^{-1}z) = Az$ y g está bien definida, además de preservar y ser lineal sobre cada fibra. Si ahora $g[A, z] = g[A', z']$, basta tomar $B = A^{-1}A'$ para verificar inmediatamente que $[A, z] = [A', z']$. Luego, resulta una biyección y, por el lema 2.3.6, resta verificar que es diferenciable.

Para eso basta considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} FE|_U \times^G \mathbb{C}^n & \longrightarrow & E|_U \\ \downarrow & & \downarrow h \\ U \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & U \times \mathbb{C}^n, \end{array}$$

donde la flecha vertical de la izquierda (trivialización) viene inducida por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} FE|_U \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{(\bar{h}, \text{id})} & U \times G \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ FE|_U \times^G \mathbb{C}^n & \longrightarrow & U \times \mathbb{C}^n, \end{array}$$

y en este caso las flechas verticales son las proyecciones al cociente por la acción de G . Q.E.D.

Podemos entonces pasar de una categoría a la otra sin perder ninguna información. Y más aún, para los automorfismos vale el siguiente resultado análogo:

Proposición 2.8.16. *Sea E un fibrado vectorial de rango n sobre X y FE su fibrado de bases. Sean $\text{Aut}(E)$ y $\text{Aut}(FE)$ los grupos de isomorfismos (automorfismos) $E \rightarrow E$ y $FE \rightarrow FE$ respectivamente. Entonces $\text{Aut}(E)$ y $\text{Aut}(FE)$ son isomorfos.*

Demostración. Sea $\Phi : \text{Aut}(E) \rightarrow \text{Aut}(FE)$ dada por

$$\Phi(f) = f_*.$$

La inyectividad es inmediata de verificar. Sea ahora $h : FE \rightarrow FE$ un isomorfismo y $h_* : FE \times^G \mathbb{C}^n \rightarrow FE \times^G \mathbb{C}^n$ el correspondiente homomorfismo de fibrados

vectoriales. Sea $g^{-1} : E \rightarrow FE \times^G \mathbb{C}^n$ la inversa del isomorfismo de la proposición anterior, que viene dado por $g^{-1}(e) = [A, z]$, con $e = A(z)$, y llamemos \widehat{h} a la composición $gh_*g^{-1} : E \rightarrow E$. Entonces, si $A \in FE_x$ y $z \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned} \Phi(\widehat{h})(A)(z) &= \widehat{h}_*(A)(z) = \widehat{h}A(z) \\ &= gh_*g^{-1}A(z) \\ &= gh_*[A, z] \\ &= g[hA, z] \\ &= h(A)(z). \end{aligned}$$

Q.E.D.

2.8.2. Fibrados Asociados a Fibrados de Línea.

Sea $p : L \rightarrow X$ un fibrado de línea complejo y $0 : X \rightarrow L$ la sección nula. Notemos con L^+ al complemento de la imagen de 0 en L , es decir

$$L^+ = L - 0(X).$$

El conjunto $0(X) = \text{im } 0$ se llama, abusando del lenguaje, la *sección nula de L* . Sea $p^+ : L^+ \rightarrow X$ la restricción de p a L^+ . Veamos que resulta un \mathbb{C}^* -fibrado principal, con la acción inducida por la multiplicación de escalares complejos.

Como en este caso las fibras tienen estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial, si $e \in L_x$ no es el vector nulo y $z \in \mathbb{C}^*$, entonces $ez = ze \in L_x$ no es el vector nulo y $p^+(ze) = p^+(e)$. Cada fibra L_x del fibrado de línea L es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión 1 y luego $X \cong L^+/\mathbb{C}^*$ vía la aplicación $[e] \mapsto p^+(e)$ (e no nulo).

Restringiendo las trivializaciones locales para L se obtienen trivializaciones para L^+ ,

$$h^+ : L^+|U = L|U - 0(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^*.$$

Resta ver solamente que la acción es libre, lo que es trivial ya que es multiplicar por un número complejo no nulo. Así, se tiene que $p^+ : L^+ \rightarrow X$ es un \mathbb{C}^* -fibrado principal, llamado el *fibrado principal asociado a L* . Cabe destacar que L^+ es precisamente el fibrado de bases del fibrado de línea L ,

$$L^+ = FL.$$

Notemos con $\underline{\text{Vector}}_{\mathbb{C}}(X)$ a la categoría de fibrados vectoriales complejos sobre X de rango 1, cuyas flechas son los isomorfismos y con $\underline{\text{Pinc}}_{\mathbb{C}^*}(X)$ a la categoría de \mathbb{C}^* -fibrados principales sobre X donde la acción de \mathbb{C}^* en las fibras es la multiplicación y las flechas también son los isomorfismos. De la proposición anterior se desprende inmediatamente el siguiente

Corolario 2.8.17. *Las categorías $\underline{\text{Vector}}_{\mathbb{C}}(X)$ y $\underline{\text{Pinc}}_{\mathbb{C}^*}(X)$ son equivalentes.*

Ejemplo 2.8.18. Sea $V = \mathbb{C}^n$ y $\pi : V - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(V)$ la proyección canónica. Esta aplicación define un \mathbb{C}^* -fibrado principal, considerando las trivializaciones locales $h_i : V_i \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^*$ dadas por

$$h_i(z) = ([z], z_i),$$

donde $V_i = \{z \in V - \{0\} \mid z_i \neq 0\}$, $U_i = \pi(V_i)$ y $[z]$ indica la clase de z en $\mathbb{P}^{n-1}(V)$. La inversa h_i^{-1} viene dada por $h_i^{-1}([z], a) = (\frac{a}{z_i}z_1, \dots, a, \dots, \frac{a}{z_i}z_n)$, y los cociclos $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ por

$$g_{ij}(z)(a) = \frac{z_i}{z_j}a.$$

El fibrado de línea asociado a este fibrado principal resulta ser, como es fácil de verificar, isomorfo al fibrado tautológico; ver el ejemplo 2.7.1.

Capítulo 3

Cohomología en Grado 2.

3.1. La Relación entre Fibrados de Línea y Cohomología.

Sea X una variedad diferenciable paracompacta de dimensión finita. Consideremos el haz \mathbb{C}_X^* y sea L un fibrado de línea sobre X . Dado un cubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de X , que podemos suponer de abiertos trivializantes para L ya que estos forman un subconjunto cofinal en $\text{Cov}(X)$, podemos elegir, para cada $i \in I$, una sección nunca nula $s_i : U_i \rightarrow L|_{U_i}$. En este caso, las 1-cocadenas de Čech son los elementos del grupo

$$C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}_X^*) = \prod_{(i,j) \in I^2} C^\infty(U_{ij}, \mathbb{C}^*),$$

con $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

Sea $x \in U_{ij}$; entonces, dado $e \in L_x$ un vector no nulo, existen únicos números complejos λ y μ tales que $\lambda s_i(x) = e = \mu s_j(x)$. Así, se obtiene la identidad

$$\frac{s_i(x)}{s_j(x)} = \frac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{C}^*.$$

Luego, en cada intersección no vacía se tienen definidas funciones suaves $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$,

$$g_{ij}(x) = \frac{s_i(x)}{s_j(x)},$$

y (g_{ij}) resulta una 1-cocadena de Čech asociada al cubrimiento \mathfrak{U} . En la intersección U_{ijk} , vale la igualdad

$$g_{ik} = g_{ij}g_{jk},$$

esto es, las funciones g_{ij} son cociclos del fibrado de línea L .

Apliquemos el morfismo $\delta : C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}_X^*) \rightarrow C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{C}_X^*)$ a la 1-cocadena $g = (g_{ij})$:

$$\begin{aligned} (\delta g)_{ijk} &= g_{jk}g_{ik}^{-1}g_{ij} \\ &= g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

lo que muestra que, en realidad, $g = (g_{ij})$ es un 1-cociclo de Čech. Sea $c_1(L) \in H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}_X^*)$ la clase de cohomología del cociclo g . Si L' es un fibrado de línea isomorfo a L , entonces $c_1(L) = c_1(L')$. En efecto, por lo visto en la sección 2.2, si $g' = (g'_{ij})$ es el 1-cociclo de Čech para L' , entonces, para cada $i \in I$ existen aplicaciones diferenciables $g_i : U_i \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ tales que $g'_{ij} = g_i g_{ij} g_j^{-1} = g_{ij} g_i g_j^{-1}$ en U_{ij} y $(g_i g_j^{-1})$ es un 1-coborde.

Teorema 3.1.1 (Weil, Kostant). *La clase de cohomología $c_1(L)$ del cociclo de Čech (g_{ij}) es independiente del cubrimiento considerado y de las secciones s_i .*

Demostración. Sea $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un cubrimiento de X por abierto trivializables y, para cada $i \in I$, $s_i, s'_i : U_i \rightarrow L|_{U_i}$ secciones nunca nulas. Entonces existe una función diferenciable $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $s'_i = f_i s_i$. Sea $g' = (g'_{ij})$ el cociclo de Čech asociado a s'_i y $g = (g_{ij})$ el cociclo asociado a s_i . Entonces

$$g'_{ij} = \frac{s'_i}{s'_j} = \frac{f_i}{f_j} g_{ij}.$$

Consideremos ahora la 0-cocadena $f = (f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{C}_X^*) = \prod_i C^\infty(U_i, \mathbb{C}^*)$. Aplicando el morfismo δ se obtiene $(\delta f)_{ij} = f_j f_i^{-1}$. Luego,

$$g_{ij} (g'_{ij})^{-1} = (\delta f)_{ij},$$

es decir, g y g' difieren en un coborde, y luego sus clases de cohomología coinciden.

Sea ahora $\mathfrak{V} = \{V_j \mid j \in J\}$ otro cubrimiento por abiertos trivializables de X . Achicando los abiertos V_j si fuera necesario, podemos suponer que \mathfrak{V} es un refinamiento de \mathfrak{U} ; sea entonces $\phi : J \rightarrow I$ la aplicación correspondiente. Se obtienen así secciones nunca nulas $t_j : V_j \rightarrow L|_{V_j}$ definidas por

$$t_j = s_{\phi(j)}|_{V_j}.$$

Llamemos f al 1-cociclo asociado al cubrimiento \mathfrak{V} . Aplicando el homomorfismo inducido $\phi_\# : C^1(\mathfrak{U}; \mathbb{C}_X^*) \rightarrow C^1(\mathfrak{V}; \mathbb{C}_X^*)$ se verifica inmediatamente que

$$\phi_\#(g) = f,$$

y luego, $\phi_\bullet[g] = [f] \in H^1(\mathfrak{V}; \mathbb{C}_X^*)$. Así, las clases de cohomología de g y f coinciden por definición de $\check{H}^1(X; \mathbb{C}_X^*)$, ya que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathfrak{U}; \mathbb{C}_X^*) & & \\ \downarrow \phi_\bullet & \searrow & \check{H}^1(X; \mathbb{C}_X^*) \\ H^1(\mathfrak{V}; \mathbb{C}_X^*) & \nearrow & \end{array}$$

conmuta.

Q.E.D.

Teorema 3.1.2 (Weil, Kostant). *La asignación $[L] \mapsto c_1(L)$ define un isomorfismo entre $\text{Pic}^\infty(X)$ y el grupo de cohomología $\check{H}^1(X; \mathbb{C}_X^*)$.*

Demostración. En primer lugar, verifiquemos que c_1 es un homomorfismo de grupos, es decir, $c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1)c_1(L_2)$. Como para cualquier fibrado de línea L , $c_1(L)$ es independiente de las secciones, consideremos la sección $s_i \otimes s'_i : U_i \rightarrow (L_1 \otimes L_2)|_{U_i}$, donde s_i y s'_i son secciones nunca nulas de L_1 y L_2 respectivamente sobre U_i . El cociclo para $L_1 \otimes L_2$ sobre $U_i \cap U_j$ es

$$\bar{g}_{ij} = \frac{s_i \otimes s'_i}{s_j \otimes s'_j}.$$

Ahora bien, sobre $U_{ij} = U_i \cap U_j$, existen funciones suaves a_{ij} y b_{ij} a valores en \mathbb{C}^* tales que $s_j = a_{ij}s_i$ y $s'_j = b_{ij}s'_i$. Entonces

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} &= \frac{s_i \otimes s'_i}{s_j \otimes s'_j} = \frac{s_i \otimes s'_i}{a_{ij}s_i \otimes b_{ij}s'_i} \\ &= \frac{1}{a_{ij}} \frac{1}{b_{ij}} = \frac{s_i}{a_{ij}} \frac{s'_i}{b_{ij}} \\ &= g_{ij}g'_{ij}. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que los cociclos $g_{ij} = \frac{s_i}{s_j}$ de un fibrado de línea L forman un 1-coborde de Čech. Esto es, existe un elemento $f = (f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{C}_X^*)$ tal que $(\delta f)_{ij} = \frac{f_j}{f_i} = g_{ij}$. Entonces, las aplicaciones $\frac{s_i}{f_i} : U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$ y $\frac{s_j}{f_j} : U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$ son secciones nunca nulas que coinciden sobre $U_i \cap U_j$. Luego, la función $s : X \rightarrow L$ dada por

$$s(x) = \frac{s_i(x)}{f_i(x)}$$

define una sección global nunca nula de L y entonces L resulta trivializable.

La sobreyectividad de c_1 se sigue de la reconstrucción de un fibrado vectorial a partir de sus cociclos. Q.E.D.

Definición 3.1.3. La clase $c_1(L)$ se llama la *primer clase de Chern* de L .

Consideremos ahora la sucesión exponencial de haces, vista anteriormente:

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}(1) \rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow \mathbb{C}_X^* \rightarrow 0.$$

Esta sucesión da origen a una sucesión exacta larga de grupos de cohomología de Čech. Ahora, siendo \mathbb{C}_X un haz suave, es válida la igualdad $\check{H}^n(X; \mathbb{C}_X) = 0$ para $n \geq 1$ y se obtiene así un isomorfismo $\partial : \check{H}^1(X; \mathbb{C}_X^*) \cong \check{H}^2(X; \underline{\mathbb{Z}}(1))$. Podemos enunciar entonces el siguiente

Corolario 3.1.4. *Los grupos $\text{Pic}^\infty(X)$ y $\check{H}^2(X; \underline{\mathbb{Z}}(1))$ son isomorfos.*

A partir del 1-cociclo de Čech $g = (g_{ij})$ considerado antes, se construye un 2-cociclo de Čech $\mu = (\mu_{ijk})$ a valores en el haz $\underline{\mathbb{Z}}(1)$ de la siguiente forma: Para cada par de índices $i, j \in I$, sea $\log g_{ij}$ una rama del logaritmo de g_{ij} sobre U_{ij} . Entonces se define

$$\mu_{ijk} = \log g_{jk} - \log g_{ik} + \log g_{ij}.$$

Considerando la definición del homomorfismo de conexión ∂ es fácil verificar que la imagen de la primer clase de Chern $c_1(L)$ por ∂ es precisamente la clase del 2-cociclo μ .

Ejemplo 3.1.5. Sea $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ la esfera unitaria de dimensión 1. Como el grupo $\check{H}^2(S^1; \mathbb{Z}(1))$ es trivial, entonces $\text{Pic}^\infty(S^1) = 0$. O sea, todo fibrado de línea complejo sobre S^1 es trivializable. Para el caso real, $\text{Pic}^\infty(S^1) = \mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 3.1.6. Consideremos ahora la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. En este caso, como $\check{H}^2(S^2; \mathbb{Z}(1)) \cong \mathbb{Z}(1) \cong \mathbb{Z}$, entonces también

$$\text{Pic}^\infty(S^2) \cong \mathbb{Z}.$$

Existe entonces un fibrado de línea complejo $L \rightarrow S^2$ tal que su clase de isomorfismo genera al grupo $\text{Pic}^\infty(S^2)$. A continuación se dará una caracterización explícita de los elementos del grupo $\text{Pic}^\infty(S^2)$.

Una manera de construir fibrados vectoriales es utilizando lo desarrollado en la sección 2.4, que es lo que se usará en lo siguiente.¹

Para lo que sigue, consideramos la esfera S^2 centrada en el punto $(0, 0, 1)$.

Dado $0 < \varepsilon < 1$, consideremos el cubrimiento abierto de S^2 dado por los siguientes subconjuntos

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid 2 \leq x_3 < 1 - \varepsilon\} \\ U_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid 1 + \varepsilon < x_3 \leq 0\}. \end{aligned}$$

Sean $N = (0, 0, 2)$ el polo norte de S^2 y $p_N : S^2 - N \rightarrow \mathbb{C}$ la proyección estereográfica desde el polo norte. Se define ahora la aplicación $g_{12} : U_{12} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$g_{12}(x) = p_N(x).$$

Esta función está bien definida, es diferenciable y su imagen esta contenida en \mathbb{C}^* . Queda entonces definido un fibrado de línea $L_1 \rightarrow S^2$, donde

$$L_1 = \coprod_{i=1}^2 (U_i \times \mathbb{C}) / \sim,$$

con $(x, \lambda, i) \sim (y, \mu, j)$ si y solo si $x = y$ y $g_{ij}(x)\lambda = \mu$. Y la función g_{12} es el cociclo de L_1 asociado al cubrimiento $\{U_1, U_2\}$.

En general, para cada número entero n , queda definido un fibrado de línea $L_n \rightarrow S^2$, considerando el mismo cubrimiento $\{U_1, U_2\}$ de antes y definiendo la función

$$g_{12}(x)^n = p_N(x)^n.$$

Veamos que $\text{Pic}^\infty(S^2) = \{[L_n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ y que $[L_1]$ lo genera. Para eso basta ver que

1. si $n \neq m$, entonces los fibrados L_n y L_m no pueden ser isomorfos,

¹En realidad, la construcción dada en dicha sección sirve para fibrados en general, no solamente para los vectoriales. Ver [Ste51].

$$2. L_1^{\otimes n} \cong L_n \text{ y}$$

$$3. L_{-1} \cong L_1^\vee.$$

Para el primer punto, supongamos que $n \neq m$ y que existe un isomorfismo $f : L_n \rightarrow L_m$. Vamos a ver que este isomorfismo no puede existir, teniendo en cuenta lo desarrollado en la sección 2.2.

Para este caso particular, las aplicaciones $g_i : U_i \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, con $i = 1, 2$, vienen dadas por

$$g_i(x) = h'_{i,x} f h_{i,x}^{-1},$$

donde h_i y h'_i son, respectivamente, las trivializaciones locales para L_n y L_m sobre U_i . Entonces

$$\begin{aligned} g_i(x)z &= h'_{i,x} f h_{i,x}^{-1}(z) \\ &= h'_{i,x} f[x, z, i] \\ &= h'_{i,x}[x, f_x(z), i] \\ &= f_x(z), \end{aligned}$$

donde $f_x : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es el isomorfismo lineal inducido por f .

Ahora bien, por lo visto en la sección 2.2, debería cumplirse la identidad $g_{12}(x)^m = g_1(x)g_{12}(x)^n g_2(x)^{-1}$. Pero como en este caso los factores del término de la derecha conmutan, se obtiene

$$p_N(x)^m = g_{12}(x)^m = g_{12}(x)^n = p_N(x)^n,$$

y luego debe ser $n = m$.

Para verificar el ítem 2, solo basta recordar que el cociclo para el producto tensorial $L_1^{\otimes n}$ viene dado por $g_{12}(x)^{\otimes n} = g_{12}(x)^n = p_N(x)^n$. Lo mismo para el punto 3, pero esta vez recordando que el cociclo g_{12}^\vee correspondiente al fibrado dual L_1^\vee es $g_{12}^\vee(x) = g_{12}(x)^{-1}$.

3.2. Fibrados con Conexiones.

En esta sección, dado un fibrado de línea L , vamos a definir lo que se conoce como una conexión en L , que es básicamente un operador que permite diferenciar secciones, dando como resultado otra sección. Así como en la primera parte de este capítulo buscamos una interpretación geométrica del segundo grupo de cohomología de una variedad X , a continuación procedemos en forma inversa: se dará una caracterización cohomológica del grupo de isomorfismos de un fibrado de línea con conexión.

3.2.1. Conexiones en Fibrados de Línea.

Sea $p : L \rightarrow X$ un fibrado de línea complejo y sea $s : X \rightarrow L$ una sección de L . Una *conexión en el punto* $x \in X$ es una aplicación bilineal $\nabla_x : TX_x \times \Gamma(L) \rightarrow L_x$, notada por $\nabla_x(v, s)$, que cumple *la regla de Leibniz*:

$$\nabla_x(v, \lambda s) = d\lambda_x(v)s(x) + \lambda(x)\nabla_x(v, s),$$

donde $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación suave arbitraria. La imagen $\nabla_x(v, s)$ se llama la *derivada covariante* de la sección s en el punto x en la dirección del vector v .

Sea ahora $\text{End}(\Gamma(L))$ el conjunto de endomorfismos del \mathbb{C} -espacio vectorial $\Gamma(L)$. Una *conexión* en el fibrado L es una aplicación lineal $\nabla : \Gamma(TX) \rightarrow \text{End}(\Gamma(L))$, $\xi \mapsto \nabla(\xi) = \nabla_\xi$, tal que

1. $\nabla_\xi(s)(x) = \nabla_x(\xi(x), s)$,
2. $\nabla_{\lambda\xi} = \lambda\nabla_\xi$ para cualquier aplicación suave $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ y
3. (Regla de Leibniz) $\nabla_\xi(\lambda s) = \langle d\lambda, \xi \rangle s + \lambda\nabla_\xi(s)$ para todo campo $\xi \in \Gamma(TX)$ y toda aplicación suave $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$.

Si ω es una 1-forma y ξ un campo de vectores, el símbolo $\langle \omega, \xi \rangle$ representa la *contracción* de ω y ξ y se define por $\langle \omega, \xi \rangle(x) = \omega(x)(\xi(x))$; es decir, esta contracción representa el isomorfismo entre 1-formas y aplicaciones $C^\infty(X, \mathbb{C})$ -multilineales $\Gamma(TX) \rightarrow C^\infty(X, \mathbb{C})$. Luego, por una observación hecha anteriormente, no distinguiremos entre estos dos objetos; esto es, llamaremos también ω a la contracción $\langle \omega, - \rangle$.

También podemos considerar una conexión en L como una aplicación \mathbb{C} -lineal $\nabla : \Gamma(L) \rightarrow \text{Hom}(\Gamma(TX), \Gamma(L))$ que cumple las condiciones anteriores, donde $\text{Hom}(\Gamma(TX), \Gamma(L))$ indica el conjunto de aplicaciones $C^\infty(X, \mathbb{C})$ -lineales $\Gamma(TX) \rightarrow \Gamma(L)$, o sea, las 1-formas sobre X a valores en el fibrado L . Esto es, para cada sección s de L , $\nabla(s) : \Gamma(TX) \rightarrow \Gamma(L)$ define una 1-forma en $\Omega_L^1(X)$ via $\nabla(s)(\xi) = \nabla_\xi(s)$. En este caso, la regla de Leibniz toma la forma

$$\nabla(\lambda s) = d\lambda \otimes s + \lambda \wedge \nabla(s).^2$$

Si L es un fibrado de línea sobre X con conexión ∇ , notaremos la situación por (L, ∇) .

Sea $U \subset X$ un abierto y $s : X \rightarrow L$ una sección tal que $s(x) = 0$ para todo $x \in U$. Fijemos un punto $x_0 \in U$ y consideremos una aplicación suave $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\lambda(x) = 1$ en una vecindad de x_0 contenida en U y $\text{sop}(\lambda) \subset U$. Entonces, $\lambda s : X \rightarrow L$ es la sección nula y, por la regla de Leibniz, $\nabla_\xi(\lambda s)$ también, cualquiera sea el campo de vectores ξ . Por otro lado, considerando nuevamente la regla de Leibniz y evaluando en el punto x_0 ,

$$0 = \nabla_\xi(\lambda s)(x_0) = d\lambda_{x_0}(\xi(x_0))s(x_0) + \lambda(x_0)\nabla_v(s)(x_0) = \nabla_v(s)(x_0),$$

por como se definió λ . Luego, la sección $\nabla_\xi(s)$ también se anula sobre el abierto U . Esto es, dos secciones que coinciden sobre un abierto de X tienen allí iguales derivadas covariantes. Esto muestra que $\nabla_\xi(s)(x)$ depende solo del germen de la sección s en el punto x , lo que permite restringir la conexión a un abierto U de X , considerando

$$\nabla|_U : \Gamma(U, TX) \rightarrow \text{End}(\Gamma(U, L)).$$

²Notar que, si ω es una n -forma a valores complejos y τ es una k -forma a valores en un fibrado vectorial E , entonces el producto $\omega \wedge \tau$ está bien definido y es una $(n+k)$ -forma a valores en E . Cuando ω sea una 0-forma, omitiremos la escritura del símbolo \wedge .

Y recíprocamente, supongamos que \mathfrak{U} es un cubrimiento abierto de X y sobre cada $U \in \mathfrak{U}$ se tiene definida una conexión ∇^U . Podemos entonces construir una conexión global, de la siguiente manera: si $\{\varphi_U \mid U \in \mathfrak{U}\}$ es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento \mathfrak{U} , la conexión global ∇ se puede definir como

$$\nabla = \sum_{U \in \mathfrak{U}} \varphi_U \nabla^U.$$

Si ahora ξ es un campo de vectores tal que $\xi(x) = 0$, entonces, por definición de ∇ , vale la igualdad $\nabla_\xi(s)(x) = 0$. Es decir, $\nabla_\xi(s)(x)$ depende del germen de la sección s en el punto x y del vector $\xi(x)$.

Sean ∇^1 y ∇^2 conexiones sobre $L \rightarrow X$ y $\varphi_1, \varphi_2 : X \rightarrow \mathbb{C}$ aplicaciones suaves. Definimos entonces, haciendo abuso de notación, la aplicación $\varphi_1 \nabla^1 + \varphi_2 \nabla^2 : \Gamma(TX) \rightarrow \text{End}(\Gamma(L))$ por

$$(\varphi_1 \nabla^1 + \varphi_2 \nabla^2)(\xi)(s) = \varphi_1 \nabla_\xi^1(s) + \varphi_2 \nabla_\xi^2(s).$$

Esta aplicación resulta una conexión si y solo si $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1$ para todo x en X . En general, cualquier combinación lineal convexa de este tipo resulta una conexión, como muestra el siguiente

Lema 3.2.1. *Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ funciones suaves y supongamos que para cada $k = 1, \dots, n$ se tiene definida una conexión ∇^k en $L \rightarrow X$. Entonces una combinación lineal del tipo*

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k \nabla^k$$

es una conexión si y solo si, para cada $x \in X$, $\sum_{k=1}^n \varphi_k(x) = 1$.

Demostración. Sea $\nabla = \sum_{k=1}^n \varphi_k \nabla^k$ y llamemos φ a la función $\sum_{k=1}^n \varphi_k$. Suponiendo que existe un $x_0 \in X$ para el cual $\varphi(x_0) \neq 1$, debe existir una vecindad U de x_0 tal que $\varphi(x) \neq 1$ en U . Ahora bien, si $s : U \rightarrow L|_U$ es una sección nunca nula y $\lambda : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función diferenciable, desarrollando la expresión $\nabla_\xi(\lambda s)(x)$ para $x \in U$ y $\xi \in \Gamma(U, TX)$, y teniendo en cuenta que ∇ es una conexión llegamos a la identidad

$$d\lambda_x(\xi(x))s(x) = d\lambda_x(\xi(x))s(x)\varphi(x).$$

Luego, $(1 - \varphi(x))d\lambda_x(\xi(x))s(x) = 0$ y siendo s nunca nula y $\varphi(x) \neq 1$ para $x \in U$, necesariamente $d\lambda_x(\xi(x))$ cualquiera sea el campo ξ . Así, λ debe ser una aplicación localmente constante.

Por otro lado, siendo inmediato de verificar la linealidad, veamos que ∇ verifica la regla de Leibniz:

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda s) &= \sum_{k=1}^n \varphi_k \nabla^k(\lambda s) \\ &= \sum_{k=1}^n \varphi_k (d\lambda \otimes s + \lambda \nabla^k(s)). \end{aligned}$$

Luego, $\nabla_\xi(\lambda s)(x) = d\lambda_x(\xi(x))s(x) + \lambda(x)\nabla_\xi^k(s)$, y el lema queda demostrado. Q.E.D.

Consideremos ahora un abierto U de X tal que $L|_U$ es trivial y una sección local nunca nula $s : U \rightarrow L|_U$. Si $s' : U \rightarrow L|_U$ es otra sección local, queda definida entonces una aplicación suave $\frac{s'}{s} : U \rightarrow \mathbb{C}$. Si ∇ es una conexión en $L|_U$ y ξ un campo de vectores definido sobre U , entonces $\nabla_\xi(s)$ es otra sección local de L . Luego, existe una aplicación $\lambda : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\nabla_\xi(s) = \lambda s$. Claramente, λ es una aplicación que depende del campo ξ ; más aún, podemos escribir

$$\lambda = \frac{\nabla(s)}{s} : \Gamma(U, TX) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C}).$$

Por las propiedades de ∇ , esta aplicación es $C^\infty(U, \mathbb{C})$ -lineal, o sea, es una 1-forma. Más precisamente, existe una única 1-forma $\omega = \omega(s)$ tal que

$$\frac{\nabla_\xi(s)}{s} = \langle \omega, \xi \rangle$$

para cada campo ξ .

Equivalentemente, si $s : U \rightarrow L|_U$ es una sección local nunca nula, entonces $\nabla(s)$ es una 1-forma a valores en L , y podemos entonces escribir $\nabla(s) = \omega \otimes s$.

Definición 3.2.2. La 1-forma ω se llama la *forma de conexión asociada a s* . Se la notará $\omega(s)$, ω_s ó, siempre que no se preste a confusión, ω .

Dadas ∇ una conexión en $L \rightarrow X$ y α una 1-forma compleja, se obtiene una nueva conexión $\nabla + \alpha$ por la fórmula

$$(\nabla + \alpha)(\xi)(s) = \nabla_\xi(s) + \langle \alpha, \xi \rangle s,$$

ó, equivalentemente, $(\nabla + \alpha)(s) = \nabla(s) + \alpha \otimes s$. En este caso, si ω es la forma de la conexión ∇ asociada a una sección nunca nula $s : U \rightarrow L|_U$, entonces la forma de conexión para $\nabla + \alpha$ resulta ser, como muestra un cálculo directo, la 1-forma $\omega + \alpha$.

Vale además la siguiente caracterización:

Proposición 3.2.3. Sea ∇ una conexión en el fibrado de línea L . La aplicación del conjunto de 1-formas complejas $\Omega_{\mathbb{C}}^1(X)$ en el conjunto $\text{Con}(L)$ de conexiones en L dada por $\alpha \mapsto \nabla + \alpha$ es una biyección.

Demostración. Llamemos $c : \Omega_{\mathbb{C}}^1(X) \rightarrow \text{Con}(L)$ a la función $c(\alpha) = \nabla + \alpha$. La inyectividad es clara, dada la bilinealidad de la contracción entre 1-formas y campos de vectores $\Omega_{\mathbb{C}}^1(X) \times \Gamma(TX) \rightarrow C^\infty(X, \mathbb{C})$. Si ahora $\nabla' \in \text{Con}(L)$, resta ver que la diferencia $\nabla' - \nabla$ define una 1-forma compleja. Para eso, sea $s : U \rightarrow L|_U$ una sección nunca nula y definamos $\alpha \in \Omega_{\mathbb{C}}^1(X)$ localmente por la fórmula

$$\alpha(\xi) = \frac{\nabla'_\xi(s) - \nabla_\xi(s)}{s}.$$

Por las propiedades de las conexiones, esta expresión no depende de la sección nunca nula considerada y además es $C^\infty(U, \mathbb{C})$ -lineal. Luego, define una 1-forma compleja sobre X , que era lo que se esperaba. Q.E.D.

Veamos a continuación como varía la forma de conexión al considerar otra sección nunca nula $s' : U \rightarrow L|_U$.

Proposición 3.2.4. *Sean $s, s' : U \rightarrow L|_U$ secciones locales nunca nulas y ω, ω' las formas de conexión asociadas a s y s' respectivamente. Entonces existe una aplicación suave $\lambda : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que*

$$\omega' = \omega + \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Demostración. Al ser s' otra sección nunca nula sobre U , sabemos que existe una aplicación suave $\lambda : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $s' = \lambda s$. Entonces, si $\xi \in \Gamma(U, TX)$, podemos escribir $\nabla_\xi(s') = \langle d\lambda, \xi \rangle s + \lambda \nabla_\xi(s)$. Ahora bien,

$$\frac{\nabla_\xi(s')}{s'} = \frac{\langle d\lambda, \xi \rangle}{\lambda} + \frac{\nabla_\xi(s)}{s},$$

o sea

$$\langle \omega', \xi \rangle = \frac{\langle d\lambda, \xi \rangle}{\lambda} + \langle \omega, \xi \rangle.$$

Usando ahora la linealidad de $\langle -, \xi \rangle$, llegamos a que, para cualquier campo ξ definido sobre U , vale la igualdad

$$\langle \omega', \xi \rangle = \langle \omega + \frac{d\lambda}{\lambda}, \xi \rangle,$$

que era lo que se quería demostrar.

Q.E.D.

Observación 4. *En estos desarrollos, algunos autores, como por ejemplo J. L. Brylinski en [Bry92], al contrario de B. Kostant en [Kos70], trabajan sin tener en cuenta la constante $\frac{1}{2\pi i}$ y luego consideran como haz de coeficientes a $\underline{\mathbb{Z}}(1)$ en lugar de $\underline{\mathbb{Z}}$.*

En particular, si U_i y U_j son abiertos de X , con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, tales que $L|_{U_i}$ y $L|_{U_j}$ son triviales y $s_i : U_i \rightarrow L|_{U_i}$ y $s_j : U_j \rightarrow L|_{U_j}$ son secciones nunca nulas, entonces en la intersección $U_i \cap U_j$ vale la igualdad

$$s_i = g_{ij}s_j$$

para cierta aplicación suave $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$; de la proposición anterior se sigue que

$$\omega_i = \omega_j + \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}, \tag{3.1}$$

donde ω_i y ω_j son las formas de conexión asociadas a s_i y s_j respectivamente.

Proposición 3.2.5. *Sea $\{U_i \mid i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X , $\{s_i \mid i \in I\}$ una colección de secciones nunca nulas $s_i : U_i \rightarrow L|_{U_i}$ tal que $s_i = g_{ij}s_j$ en $U_i \cap U_j$ y $\{\omega_i \mid i \in I\}$ una familia de 1-formas, donde ω_i está definida sobre U_i , tal que, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ω_i y ω_j verifican la ecuación (3.1). Entonces existe una única conexión ∇ tal que, para cada $i \in I$, ω_i es la forma de conexión asociada a s_i .*

Demostración. Basta definir la conexión ∇ localmente en cada abierto U_i por la fórmula

$$\nabla_{\xi}(s) = (\langle d\lambda, \xi \rangle + \langle \omega_i, \xi \rangle \lambda) s_i,$$

donde s es una sección definida sobre U_i tal que $s = \lambda s_i$. Q.E.D.

Si $L \rightarrow X$ es un fibrado de línea con conexión ∇ , notaremos la situación por (L, ∇) .

Ejemplo 3.2.6. Sea L un fibrado trivializable y $s : X \rightarrow L$ una sección nunca nula. La *conexión trivial* en L viene dada por la ecuación

$$\nabla_{\xi}(s) = 0.$$

Es decir, la forma de conexión asociada a la sección s es $\omega_s = 0$. Si $s' : X \rightarrow L$ es otra sección nunca nula, con $s' = \lambda s$, entonces

$$\nabla_{\xi}(s') = \langle d\lambda, \xi \rangle s,$$

o sea $\omega_{s'} = \frac{d\lambda}{\lambda}$. Ver el lema 3.2.25.

Ejemplo 3.2.7. Sean (L, ∇) y (L', ∇') fibrados de línea sobre X con conexión. Queda inducida entonces una conexión $\nabla'' = \nabla \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \nabla'$ en el fibrado $L \otimes L'$ dada por

$$\nabla''_{\xi}(s \otimes s') = \nabla_{\xi}(s) \otimes s' + s \otimes \nabla'_{\xi}(s').$$

Si $s : U \rightarrow L|_U$ y $s' : U \rightarrow L'|_U$ son secciones nunca nulas, cuyas formas de conexión asociadas son ω y ω' respectivamente, entonces la forma de conexión asociada a la sección nunca nula $s \otimes s' : U \rightarrow (L \otimes L')|_U$ es $\omega + \omega'$. Por esto, notaremos a la conexión ∇'' por $\nabla + \nabla'$.

Dado ahora un fibrado de línea $L \rightarrow X$ con conexión ∇ , consideremos el pullback f^*L de L por la aplicación suave $f : Y \rightarrow X$. La conexión ∇ en L induce una conexión $f^*\nabla$ en f^*L de la siguiente forma: Sea U un abierto de X en donde L es trivial y $s : U \rightarrow L|_U$ una sección nunca nula. Entonces $f^*L|_{f^{-1}(U)}$ es trivial y queda definida también una sección nunca nula $f^*s : f^{-1}(U) \rightarrow f^*L|_{f^{-1}(U)}$ dada por

$$(f^*s)(y) = s(f(y)).$$

Se puede ahora dar la expresión local de la conexión $f^*\nabla$, la cual es

$$f^*\nabla_{\eta}(f^*s) = \langle \omega^*, \eta \rangle f^*s,$$

donde $\omega^* : \Gamma(f^{-1}(U), TY) \rightarrow C^{\infty}(f^{-1}(U), \mathbb{C})$ es el pullback de la forma ω por la aplicación $f : Y \rightarrow X$, es decir, $\omega^*(\eta)(y) = \omega(f(y))(df_y(\eta(y)))$.

Conexiones como Distribuciones.

Existen muchas formas de definir conexiones, por supuesto todas equivalentes en el sentido de que se puede obtener una definición a partir de cualquier otra. En esta sección veremos una de estas definiciones equivalentes, que permite en cierta forma ver más claramente el contenido geométrico de la conexión.

Sea $p : L \rightarrow X$ un fibrado de línea complejo, provisto de una conexión ∇ y $s : U \rightarrow L|_U$ una sección local tal que $s(x) = e$. Podemos considerar en U una base local de campos de vectores formada por $\xi_1, \dots, \xi_k \in \Gamma(U, TX)$. Supongamos además que $r : U \rightarrow L|_U$ es una sección nunca nula y $\lambda : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $s = \lambda r$. Entonces, para cada $i = 1, \dots, k$,

$$\nabla_{\xi_i}(s)(x) = \nabla_{\xi_i}(\lambda r)(x) = d\lambda_x(\xi_i(x))r(x) + \lambda(x)\nabla_{\xi_i}(r)(x).$$

Igualando a cero esta última ecuación y llamando z_i a $\frac{\nabla_{\xi_i}(r)(x)}{r(x)} \in \mathbb{C}$ para cada i , obtenemos

$$d\lambda_x(\xi_i(x)) = -z_i\lambda(x), \quad i = 1, \dots, k$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano complejo, cuyas soluciones λ definen secciones $s = \lambda r$ con la particularidad que para cada campo de vectores $\xi \in \Gamma(U, TX)$, $\nabla_{\xi}(s)(x) = 0$.

Podemos así dar la siguiente:

Definición 3.2.8. Sea $s \in \Gamma(U, L)$ una sección local y $x \in U$ tal que $s(x) = e$ y $\nabla_{\xi}(s)(x) = 0$ para todo campo $\xi \in \Gamma(U, TX)$. Definimos el subespacio $H_e^{(s)} \subset TL_e$ por

$$H_e^{(s)} = ds_x(TX_x).$$

El siguiente lema muestra que este subespacio depende solo de la conexión y no de la sección particular elegida.

Lema 3.2.9. Si $s' : U \rightarrow L|_U$ es otra sección tal que $s'(x) = e$ y $\nabla_{\xi}(s')(x) = 0$ para todo campo ξ sobre U , entonces $H_e^{(s)} = H_e^{(s')}$.

Demostración. Si $r : U \rightarrow L|_U$ es una sección nunca nula, entonces valen las igualdades $s = \lambda r$, $s' = \lambda' r$ para ciertas funciones suaves $\lambda, \lambda' : U \rightarrow \mathbb{C}$. Como las secciones s y s' coinciden en el punto x , necesariamente $\lambda(x) = \lambda'(x)$. Por otro lado, para s tenemos que

$$0 = \nabla_{\xi}(s) = \nabla_{\xi}(\lambda r) = \langle d\lambda, \xi \rangle r + \lambda \nabla_{\xi}(r) \tag{3.2}$$

y también una igualdad análoga para s' . Igualando (3.2) con la expresión análoga para s' se obtiene la ecuación

$$\langle d\lambda - d\lambda', \xi \rangle r + (\lambda - \lambda')\nabla_{\xi}(r) = 0.$$

Evaluando esta última igualdad en $x \in X$, se llega a la identidad

$$(d\lambda_x - d\lambda'_x)(\xi(x))r(x) = 0$$

que, como r es nunca nula, se puede escribir como

$$d\lambda_x(\xi(x)) = d\lambda'_x(\xi(x)).$$

Pero esta igualdad es válida para cualquier campo local de vectores $\xi \in \Gamma(U, TX)$; luego,

$$d\lambda_x = d\lambda'_x. \quad (3.3)$$

Ahora bien, consideremos la trivialización local $\tilde{r} : U \times \mathbb{C} \rightarrow L|_U$ inducida por r ,

$$\tilde{r}(x, z) = zr(x).$$

Entonces, siendo $s = \lambda r$,

$$\begin{aligned} \tilde{r}^{-1}(s(x)) &= \lambda(x)\tilde{r}^{-1}(r(x)) \\ &= \lambda(x)(x, 1) \\ &= (x, \lambda(x)). \end{aligned}$$

Luego, $\tilde{r}^{-1}s = (\text{id}, \lambda)$ y $\tilde{r}^{-1}s' = (\text{id}, \lambda')$. Por otro lado, siendo \tilde{r} un difeomorfismo, se verifica la igualdad $ds_x(TX_x) = ds'_x(TX_x)$ si y solo si

$$d\tilde{r}_{s(x)}^{-1}ds_x(TX_x) = d\tilde{r}_{s'(x)}^{-1}ds'_x(TX_x).$$

Pero $d(\tilde{r}^{-1}s)_x = (\text{id}, d\lambda_x) = (\text{id}, d\lambda'_x) = d(\tilde{r}^{-1}s')_x$ gracias a la igualdad (3.3). Q.E.D.

Gracias al lema anterior, podemos entonces dar la siguiente

Definición 3.2.10. El *subespacio horizontal* de TL_e , donde $p(e) = x$, es el subespacio definido por

$$H_e = ds_x(TX_x),$$

donde $s : U \rightarrow L|_U$ es una sección local tal que $s(x) = e$ y $\nabla_\xi(s)(x) = 0$ para todo campo de vectores $\xi \in \Gamma(U, TX)$. Los elementos de H_e se llaman *vectores horizontales*.

Consideremos ahora la grassmaniana de subespacios de dimensión $k = \dim X$ del espacio tangente TL_e , que notamos $\text{Grass}_k(TL_e)$. Esto es,

$$\text{Grass}_k(TL_e) = \{S \subset TL_e \mid \dim S = k\}.$$

Definimos el conjunto $\text{Grass}_k(TL)$ como

$$\text{Grass}_k(TL) = \coprod_{e \in L} \text{Grass}_k(TL_e).$$

Definición 3.2.11. Una *distribución de dimensión k* en una variedad diferenciable X de dimensión finita es una aplicación $D : X \rightarrow \text{Grass}_k(TX)$ tal que $D(x) \in \text{Grass}_k(TX_x)$. La distribución se dice que es *diferenciable* si cada $x \in X$ tiene una vecindad U y campos de vectores $\xi_1, \dots, \xi_k \in \Gamma(U, TX)$ tales que para cada $y \in U$, los vectores $\xi_1(y), \dots, \xi_k(y)$ son una base del espacio tangente TX_y . El conjunto de distribuciones diferenciables sobre una variedad X se notará $\mathcal{D}^\infty(X)$.

Tenemos entonces definida en L una distribución H de dimensión igual a la dimensión de X dada por

$$H(e) = H_e,$$

que llamaremos la *distribución generada* por ∇ .

Lema 3.2.12. *Para cada $e \in L$ con $p(e) = x$, la sucesión de \mathbb{C} -espacios vectoriales*

$$0 \rightarrow Tp^{-1}(x)_e \xrightarrow{di_e} TL_e \xrightarrow{dp_e} TX_x \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

es exacta.

Demostración. Claramente di_e es inyectiva, dp_e sobreyectiva³ y $Tp^{-1}(x)_e \subset \ker dp_e$. Supongamos ahora que $dp_e(v) = 0$ y escribamos $v = v_1 + v_2$, donde $v_1 \in Tp^{-1}(x)_e$ y $v_2 \in H_e$. Entonces

$$dp_e(v_2) = -dp_e(v_1) = 0.$$

Además, existe un vector $w \in TX_x$ tal que $ds_x(w) = v_2$, con lo cual

$$0 = dp_e(v_2) = d(ps)_x(w) = w,$$

lo que prueba que $v_2 = 0$, o sea $v = v_1 \in Tp^{-1}(x)_e$. Q.E.D.

Notar que, para una sección $s : U \rightarrow L|_U$ tal que $s(x) = e$ y $\nabla_\xi(s)(x) = 0$ para todo campo ξ sobre U , la diferencial ds_x hace que la sucesión (3.4) se escinda, obteniéndose así una descomposición

$$TL_e = Tp^{-1}(x)_e \oplus H_e.$$

Mas generalmente, esta descomposición se obtiene considerando la sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre L

$$0 \rightarrow TF \xrightarrow{di} TL \xrightarrow{dp} p^*TX \rightarrow 0, \quad (3.5)$$

donde $TF_e = Tp^{-1}(x)$ para $p(e) = x$ y $p : L \rightarrow X$ la proyección; notar que para cada $e \in L$, la fibra p^*TX_e es isomorfa a TX_x . Así, la distribución es la que define una aplicación $p^*TX \rightarrow TL$ que hace que la sucesión (3.5) se escinda, obteniéndose así la descomposición $TL = TF \oplus p^*TX$.

El subespacio $V_e = Tp^{-1}(x)_e \subset TL_e$ se llama el *subespacio vertical* de TL_e , y sus elementos, *vectores verticales*. Dado un vector tangente $v \in TL_e$, escribiremos $v = v^v + v^h$, donde v^v es la componente vertical de v y v^h la horizontal.

Sea ahora a un número complejo no nulo, $R_a : L \rightarrow L$ la traslación

$$R_a(e) = e.a$$

y fijemos $e \in L$ con proyección $x \in X$ y sea $ds_x(TX_x) = H_e$, con $s : U \rightarrow L|_U$, $x \in U$. Podemos entonces considerar la sección $R_a s : U \rightarrow L|_U$,

$$R_a s(x) = s(x).a,$$

³Ver el párrafo siguiente a la definición 3.2.13.

es decir, $R_a s = \text{cte}_a s$, donde $\text{cte}_a : U \rightarrow \mathbb{C}$ es la función constante en $a \in \mathbb{C}^*$, ya que, en este caso, $R_a = L_a$. Por la regla de Leibniz,

$$\begin{aligned}\nabla_\xi(R_a s) &= \nabla_\xi(\text{cte}_a s) \\ &= \langle d\text{cte}_a, \xi \rangle s + \text{cte}_a \nabla_\xi(s) \\ &= 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

ya que $\nabla_\xi(s) = 0$ y $d\text{cte}_a = 0$. Luego,

$$(dR_a)_e(H_e) = (dR_a)_e(ds_x(TX_x)) = d(\text{cte}_a s)_x(TX_x) = H_{e,a},$$

donde la última igualdad es válida por definición de subespacio horizontal.

Consideremos ahora la función $\Phi : \text{Con}(L) \rightarrow \mathcal{D}^\infty(L)$ que a cada conexión en L le asigna su distribución asociada. Dada ahora una distribución diferenciable H , definimos el operador $\nabla^H : \Gamma(L) \rightarrow \text{Hom}(\Gamma(TX), \Gamma(L))$ definido por la fórmula

$$\nabla_\xi^H(s)(x) = (ds_x(\xi(x)))^\vee.$$

La aplicación $\Psi : \mathcal{D}^\infty(L) \rightarrow \text{Con}(L)$, $\Psi(H) = \nabla^H$ resulta ser la inversa de Φ ; es decir, podemos considerar una conexión en el fibrado L como un operador ∇ ó como una distribución H , ya que podemos recuperar cualquiera de estas definiciones a partir de la otra, en forma unívoca.

Podemos así definir una conexión en el fibrado de línea L como una distribución $H : L \rightarrow \text{Grass}_k(TL)$ que verifica lo siguiente:

1. H es C^∞ ,
2. $TL_e = H_e \oplus V_e$ para todo $e \in L$ y
3. $(dR_a)_e(H_e) = H_{e,a}$ para todo $a \in \mathbb{C}^*$.

3.2.2. Conexiones en Fibrados Principales.

En esta sección se extenderá la noción de conexión a los G -fibrados principales, para luego trabajar en el caso particular del fibrado asociado a un fibrado de línea.

Sea $p : P \rightarrow X$ un G -fibrado principal sobre X , con $\dim X = k$, y $P_x \times G \rightarrow P_x$ la acción a derecha de G en la fibra P_x , que notaremos $(e, g) \mapsto e.g$. Esta acción induce una aplicación de traslación a derecha $R_g : P \rightarrow P$, y está definida por $R_g(e) = e.g$. Mas aún, esta función resulta ser un automorfismo del fibrado P .

Definición 3.2.13. Una conexión en el G -fibrado principal $p : P \rightarrow X$ es una distribución $H : P \rightarrow \text{Grass}_k(TP)$, que notaremos $H(e) = H_e$, que cumple lo siguiente:

1. H es C^∞ ,
2. $TP_e = H_e \oplus V_e$, para todo $e \in P$, donde $V_e = Tp^{-1}(x)_e$ y
3. La diferencial $(dR_g)_e : TP_e \rightarrow TP_{e.g}$ manda el subespacio H_e en el subespacio $H_{e.g}$.

Como antes, llamamos a H_e el *subespacio horizontal* y a V_e el *subespacio vertical*.

Antes de pasar a los fibrados asociados, veamos algunas propiedades que se desprenden de la definición de fibrado principal que serán útiles luego.

Sean $p : P \rightarrow X$ un G -fibrado principal, $e \in P_x$ y $s : U \rightarrow P|_U$ una sección local. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow P_x$ una curva suave tal que $\gamma(0) = e$ y $d\gamma_0(1) = \dot{\gamma}(0) = v \in TP_e$. Luego, la composición $p\gamma$ es la curva constante en $x \in X$ y entonces

$$dp_e(v) = d(p\gamma)_0(1) = 0;$$

esto es, $dp_e(V_e) = 0$ para cada $e \in P$. Si ahora $\delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ es una curva tal que $\delta(0) = x$ y $\dot{\delta}(0) = w$, para $w \in TX_x$ un vector arbitrario, vale la igualdad

$$dp_e(d(s\delta)_0(1)) = w,$$

ya que $ps\delta = \delta$; o sea, dp_e es sobreyectiva y luego, por el teorema de la dimensión, necesariamente $\ker dp_e = V_e$ y restringiendo la diferencial dp_e al subespacio horizontal da como resultado un isomorfismo de espacios vectoriales $H_e \cong TX_x$.

Sea ahora $p : L \rightarrow X$ un fibrado de línea y $p^+ : L^+ \rightarrow X$ su \mathbb{C}^* -fibrado principal asociado. En este caso, la acción del grupo \mathbb{C}^* en las fibras coincide con la multiplicación por escalares. Si $H : L \rightarrow \text{Grass}_k(TL)$ es una conexión en L , queda inducida una conexión H^+ en L^+ simplemente restringiendo H a L^+ . Y recíprocamente,

Proposición 3.2.14. *Sea $\overline{H} \in \mathcal{D}^\infty(L^+)$. Entonces existe una única distribución $H \in \mathcal{D}^\infty(L)$ tal que $H^+ = \overline{H}$.*

La demostración de esta última proposición se da después de la proposición 3.2.22, luego de la introducción de la 1-forma de conexión en L^+ asociada a una distribución.

Hablar entonces de una conexión H en L es equivalente a hablar de su *conexión asociada*⁴ H^+ en L^+ .

Para lo que sigue, necesitaremos algunos resultados sobre grupos de Lie. Las demostraciones se pueden ver en [War83], [Ada69] y [Spi79].

Sea G un grupo de Lie. Un *subgrupo uniparamétrico* de G es un homomorfismo de grupos de Lie $\theta : \mathbb{R} \rightarrow G$, donde \mathbb{R} es el grupo de Lie de los números reales con la operación de adición, dotado del atlas formado por la carta $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$. A cada subgrupo uniparamétrico θ le asociamos el vector tangente

$$d\theta_0(1) = \frac{d\theta}{dt}(0) \in TG_1.$$

Esta aplicación define una correspondencia biyectiva entre subgrupos uniparamétricos de G y TG_1 .

Un campo de vectores $\xi : G \rightarrow TG$ se dice *invariante a izquierda* si para cada $g \in G$,

$$dL_g\xi = \xi L_g,$$

⁴Esta correspondencia vale también para fibrados vectoriales arbitrarios $E \rightarrow X$. A partir de una conexión (distribución) en E , se define una conexión asociada en FE , unívocamente determinada. Muchos autores definen una conexión en E como una distribución en FE .

es decir, para cada $h \in G$,

$$(dL_g)_h \xi(h) = \xi(gh).$$

El *álgebra de Lie* del grupo G , notada \mathfrak{g} , es el conjunto de campos invariantes a izquierda, con la multiplicación dada por el corchete de Lie. Análogamente, se pueden definir los campos de vectores invariantes a derecha y el álgebra de Lie como el conjunto de campos invariantes a derecha, considerando R_g en lugar de L_g .

La aplicación $\mathfrak{g} \rightarrow TG_1$ dada por $\xi \mapsto \xi(1)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales; luego, podemos identificar a \mathfrak{g} con TG_1 .

Sea ahora $v \in TG_1$ y $\theta_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ su correspondiente subgrupo uniparamétrico. Se define entonces la *exponencial* $\exp : TG_1 \rightarrow G$ por

$$\exp(tv) = \theta_v(t).$$

Entre otras cosas, esta aplicación cumple que

1. $d\exp_0 : T\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} = TG_1 \rightarrow TG_1$ es la identidad.
2. El subgrupo uniparamétrico de difeomorfismos $\bar{\xi}_t : G \rightarrow G$ asociado con el campo invariante a izquierda ξ viene dado por $\bar{\xi}_t(g) = L_{\exp(\xi(g))}$.

Recordemos que, si $\xi : X \rightarrow TX$ es un campo de vectores completo sobre una variedad suave X , el *grupo uniparamétrico de difeomorfismos* que genera ξ es su flujo maximal $\bar{\xi} : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, donde cada $\bar{\xi}_t = \bar{\xi}(t, \cdot) : X \rightarrow X$ es un difeomorfismo y, para cada $x \in X$, $\bar{\xi}_x = \bar{\xi}(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow X$ es una curva integral de ξ tal que $\bar{\xi}_x(0) = x$. Y recíprocamente, si $\bar{\xi} : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ es un flujo, el campo $\xi : X \rightarrow TX$ que lo genera viene dado por

$$\xi(x) = (d\bar{\xi}_x)_0(1) = \frac{d\bar{\xi}_x}{dt}(0).$$

Estas identificaciones definen una correspondencia biunívoca entre grupos uniparamétricos de difeomorfismos y campos completos.

Supongamos ahora que el grupo de Lie G actúa sobre una variedad suave X a derecha. Para cada vector tangente $v \in \mathfrak{g}$ se tiene el subgrupo uniparamétrico $\theta_v : \mathbb{R} \rightarrow G$, $\theta_v(t) = \exp(tv)$. Para cada $x \in X$, este homomorfismo induce una curva $\bar{\theta}_x : \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por

$$\bar{\theta}_x(t) = x.\exp(tv) = x.\theta_v(t).$$

Dado $g \in G$, notamos con $R_g : X \rightarrow X$ a la aplicación $R_g(x) = x.g$. Así, $\bar{\theta}_x(t) = R_{\exp(tv)}(x)$.

La *representación adjunta* de G es el homomorfismo $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ definido por

$$\text{Ad}(g) = (dL_g R_g^{-1})_1 = (dR_g^{-1} L_g)_1.$$

Sea ahora $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TX)$ la aplicación

$$\sigma(v)(x) = (d\bar{\theta}_x)_0(1) = \frac{d\bar{\theta}_x}{dt}(0).$$

Proposición 3.2.15. *Supongamos que G actúa a derecha en X . Entonces*

1. *La aplicación $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TX)$ es lineal,*
2. *$\sigma([v, w]) = [\sigma(v), \sigma(w)]$,*
3. *Si la acción de G en X es libre y $v \neq 0$ en \mathfrak{g} , entonces el campo $\sigma(v)$ no tiene ceros.*

Dado $v \in \mathfrak{g}$, el campo de vectores $\sigma(v)$ se llama el *campo fundamental en v* .

Si $G = \mathbb{C}^*$, entonces $TG_1 = \mathfrak{g} = \mathbb{C}$ y los subgrupos uniparamétricos de \mathbb{C}^* son $\theta_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$,

$$\theta_z(t) = e^{tz},$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. La aplicación exponencial $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ es lo que se espera, o sea

$$\exp(tz) = e^{tz}.$$

Como en este caso $R_a = L_a$, $\text{Ad}(a) = \text{id}_{\mathbb{C}}$ para cada $a \in \mathbb{C}^*$.

Consideremos ahora el fibrado principal L^+ sobre X , asociado al fibrado de línea L . En este caso, $G = \mathbb{C}^*$ actúa sobre L^+ vía multiplicación, la acción preserva las fibras y $\mathfrak{g} = \mathbb{C}$.

Lema 3.2.16. *Dada $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \Gamma(TP)$ como antes, entonces*

1. *la aplicación $z \mapsto \sigma(z)(e)$ es inyectiva para cada $e \in L^+$ y*
2. *$\{\sigma(z)(e) \mid z \in \mathbb{C}\} = V_e$.*

Demostración. Sea $e \in L^+$. Como la acción de \mathbb{C}^* en L^+ es libre, necesariamente la aplicación $z \mapsto \sigma(z)(e)$ es inyectiva. Para 2. debemos verificar que su imagen es el subespacio vertical V_e . Sea $x \in X$ tal que $e \in P_x = p^{-1}(x)$. Como la acción preserva las fibras, podemos escribir $R_a : P_x \rightarrow P_x$, y luego $(dR_a)_e : V_e \rightarrow V_{ae}$. Q.E.D.

Está definido entonces un isomorfismo canónico $\mathbb{C} \rightarrow V_e$ para cada $e \in L^+$, dado por

$$z \mapsto \sigma(z)(e).$$

Proposición 3.2.17. *Para cada $z \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}^*$ vale la igualdad*

$$dR_a(\sigma(z)) = \sigma(\text{Ad}(a^{-1})(z))R_a = \sigma(z)R_a,$$

es decir, $(dR_a)_e(\sigma(z)(e)) = \sigma(z)(e.a)$.

Demostración. Sean $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^*$ y $e \in L^+$. Entonces

$$\begin{aligned} dR_a(\sigma(z)(e)) &= dR_a(d\bar{\theta}_e)_0 \\ &= d(R_a\bar{\theta})_0 \\ &= (d\bar{\theta}_{e.a})_0 \\ &= \sigma(z)(e.a) \\ &= \sigma(z)(R_a(e)), \end{aligned}$$

ya que $R_a\bar{\theta}_e = \bar{\theta}_{e.a}$.

Q.E.D.

Ejemplo 3.2.18. Consideremos el fibrado trivial $X \times \mathbb{C}^*$. En este caso, la acción de \mathbb{C}^* sobre $X \times \mathbb{C}^*$ viene dada por $(x, a).b = (x, ab)$, y el álgebra de Lie de \mathbb{C}^* es \mathbb{C} .

Para cada $z \in \mathbb{C}$, la aplicación $\theta_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$ dada por $\theta_z(t) = e^{tz}$ es el subgrupo uniparamétrico que define la curva $\bar{\theta}_{(x,a)} : \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{C}^*$ dada por

$$\bar{\theta}_{(x,a)}(t) = (x, a\theta_z(t)) = (x, ae^{tz}).$$

Luego, en este caso, la aplicación $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \Gamma(T(X \times \mathbb{C}^*))$ viene dada por la fórmula

$$\sigma(z)(x, a) = \frac{d\bar{\theta}_{(x,a)}}{dt}(0).$$

Si $\pi_1 : X \times \mathbb{C}^* \rightarrow X$ y $\pi_2 : X \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ son las proyecciones, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{(x,a)}(t) &= (\pi_1\bar{\theta}_{(x,a)}, \pi_2\bar{\theta}_{(x,a)}) \\ &= (\text{cte}_x(t), L_a\theta_z(t)), \end{aligned}$$

para $\text{cte}_x : \mathbb{R} \rightarrow X$ la aplicación constante en x . Luego,

$$\sigma(z)(x, a) = (0, aze^{tz}).$$

Sea $H : L^+ \rightarrow \text{Grass}(TL^+)$ una conexión en L^+ . Por medio de esta distribución vamos a definir una 1-forma sobre L^+ a valores complejos, que también caracterizará a la conexión. Esto es, vamos a definir una aplicación $\omega : L^+ \rightarrow \text{Hom}(TL^+, \mathbb{C})$, donde $\text{Hom}(TL^+, \mathbb{C})$ es el fibrado vectorial con base L^+ cuya fibra sobre e es $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(TL_e^+, \mathbb{C})$, de la siguiente manera: Si $e \in L^+$, entonces $TL_e^+ = H_e \oplus V_e$. Si v es un vector tangente a L^+ en e , escribimos como antes

$$v = v^v + v^h,$$

donde v^v es la componente vertical de v y v^h la horizontal. Se define la aplicación lineal $\omega(e) : TL_e^+ \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\omega(e)(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in H_e, \\ z & \text{si } v \in V_e, \end{cases} \quad (3.7)$$

donde z es el único número complejo tal que $\sigma(z)(e) = v = v^v$. Es decir, para cada $e \in L^+$, $H_e = \ker \omega(e)$.

Se obtuvo entonces una 1-forma diferenciable en L^+ a valores en el álgebra de Lie \mathbb{C} de \mathbb{C}^* . Usaremos la notación ω_e en lugar de $\omega(e)$.

Proposición 3.2.19. *La forma ω cumple lo siguiente*

1. $\omega(\sigma(z))(e) = z$ para todo $e \in L^+$,
2. $\omega_{e.a}((dR_a)_e(\xi(e))) = \text{Ad}(a^{-1})(\omega_e(\xi(e))) = \omega_e(\xi(e))$ para cada $a \in \mathbb{C}^*$ y $\xi \in \Gamma(TL^+)$.

Demostración. Para 1. consideramos a ω como una aplicación suave $\omega : \Gamma(TL^+) \rightarrow C^\infty(L^+, \mathbb{C})$. En ese caso, $\omega(\sigma(z))(e) = \omega_e(\sigma(z)(e)) = z$ por definición de ω .

Para probar el punto 2. consideremos un campo $\xi : L^+ \rightarrow TL^+$. Podemos entonces descomponer a ξ como $\xi = \xi^v + \xi^h$, donde $\xi^v(e)$ es la componente vertical de $\xi(e)$ y $\xi^h(e)$ la horizontal. Sea $a \in \mathbb{C}^*$. Entonces $(dR_a)_e(\xi^v(e))$ es un vector vertical y $(dR_a)_e(\xi^h(e))$ uno horizontal. Luego,

$$\omega_{e.a}((dR_a)_e(\xi(e))) = \omega_{e.a}((dR_a)_e(\xi^v(e))). \quad (3.8)$$

Como $\xi^v(e)$ es un vector vertical, existe un único $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$\xi^v(e) = \sigma(z)(e),$$

y, por la proposición 3.2.17, podemos escribir

$$(dR_a)_e(\xi^v(e)) = (dR_a)_e(\sigma(z)(e)) = \sigma(z)(e.a).$$

Reemplazando esta última ecuación en la ecuación (3.8) se obtiene

$$\omega_{e.a}((dR_a)_e(\xi(e))) = \omega_{e.a}(\sigma(z)(e.a)) = z,$$

donde la última igualdad es válida por definición de ω . Por otro lado, $\omega_e(\xi(e)) = \omega_e(\xi^v(e)) = \omega_e(\sigma(z)(e)) = z$, nuevamente por definición de ω . Q.E.D.

Definición 3.2.20. La forma ω definida antes se llama la *forma de la conexión* H .

Si partimos entonces de una conexión ∇ en un fibrado de línea $L \rightarrow X$, queda inducida una conexión en su fibrado principal asociado L^+ , y recíprocamente, en forma unívoca. Más aún, la forma ω contiene toda la información sobre ∇ , y podemos recuperar completamente la conexión a partir de esta 1-forma, que, a diferencia de las formas ω_s asociadas a secciones locales definidas en la sección 3.2, es una 1-forma global y no depende de las secciones consideradas. Incluso es posible también calcular las formas locales ω_s de la conexión a partir de ω (ver la proposición siguiente).

Es por esto que, dada una 1-forma ω en un G -fibrado principal, se dice que ω es una forma de conexión si verifica los items 1 y 2 de la proposición anterior. Más aún, en la mayoría de los casos se define una conexión en un G -fibrado principal como una 1-forma diferencial que verifica 3.2.19.

Un fibrado de línea L con conexión ∇ se notará entonces (L, ∇) ó (L, ω) .

Consideremos ahora la 1-forma compleja $\tau := \frac{da}{a}$, donde a es la coordenada en \mathbb{C}^* . Esta es, salvo constantes, la única forma en \mathbb{C}^* invariante por multiplicación; es decir, para cada $a \in \mathbb{C}^*$, $R_a^*(\tau) = \tau$. Dado ahora un difeomorfismo $f_x : \mathbb{C}^* \rightarrow L_x^+$ \mathbb{C}^* -equivariante, el pullback f_x^* es un isomorfismo y luego, para cada $x \in X$ existe una única 1-forma compleja ω_x sobre L_x^+ tal que

$$f_x^*(\omega_x) = \tau.$$

Se puede verificar entonces, para este caso particular en que la representación adjunta es trivial, que el item 1 de la proposición 3.2.19 es equivalente a que, para cada $x \in X$, la restricción de la forma de conexión ω a la fibra L_x^+ es la forma ω_x y que el item 2 dice precisamente que la forma ω es \mathbb{C}^* -invariante; ver el lema 3.2.28.

Lema 3.2.21. *Sea ω una forma de conexión en L , $s : X \rightarrow L^+$ una aplicación suave y $\sigma_s : X \times \mathbb{C}^* \rightarrow L^+$ dada por $\sigma_s(x, a) = s(x)a$. Entonces*

$$\sigma_s^*(\omega) = s^*(\omega) + \frac{da}{a}.$$

Más aún, si $r : X \rightarrow L^+$ es otra aplicación suave tal que $ps = pr$, entonces

$$r^*(\omega) = s^*(\omega) + \frac{dg}{g},$$

donde $g = \frac{r}{s} : X \rightarrow \mathbb{C}^$.*

Demostración. Del párrafo anterior al lema es claro que

$$\sigma_s^*(\omega)|_{\{x\} \times \mathbb{C}^*} = \frac{da}{a}.$$

Ahora bien, σ_s^* es una aplicación \mathbb{C}^* -equivariante⁵ y luego, al ser ω una forma \mathbb{C}^* -invariante, $\sigma_s^*(\omega)$ también lo es.⁶ Veamos entonces que $\sigma_s^*(\omega)$ queda determinada por su valor en $X \times \{1\}$.

Sean $v \in TX_x$, $w \in T\mathbb{C}_a^*$ y consideremos el difeomorfismo $R_b : X \times \mathbb{C}^* \rightarrow X \times \mathbb{C}^*$, $R_b(x, a) = (x, ab)$. Sean ahora $\tilde{v}, \tilde{w} \in TX_x \oplus T\mathbb{C}_1^*$ los únicos vectores tales que $(dR_a)_{(x,1)}(\tilde{v}) = v$ y $(dR_a)_{(x,1)}(\tilde{w}) = w$. Ahora bien, para el vector v tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_s^*(\omega)_{(x,a)}(v) &= \sigma_s^*(\omega)_{(x,a)}((dR_a)_{(x,1)}(\tilde{v})) \\ &= \omega_{s(x)a}(d(\sigma_s R_a)_{(x,1)}(\tilde{v})) \\ &= (\sigma_s R_a)^*(\omega)_{(x,1)}(\tilde{v}) \\ &= \sigma_s^*(\omega)_{(x,1)}(\tilde{v}), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es válida por ser $\sigma_s^*(\omega)$ invariante por \mathbb{C}^* . Y lo mismo para $\sigma_s^*(\omega)_{(x,a)}(w)$. Luego

$$\sigma_s^*(\omega)_{(x,a)}(v + w) = \sigma_s^*(\omega)_{(x,1)}(\tilde{v} + \tilde{w}),$$

y la afirmación queda demostrada.

Por otro lado,

$$\sigma_s^*(\omega)|_{X \times \{1\}} = s^*(\omega)$$

por definición de σ_s . Entonces, gracias a lo anterior y al isomorfismo entre $T(X \times \mathbb{C}^*)$ y $TX \oplus T\mathbb{C}^*$, llegamos a la identidad buscada

$$\sigma_s^*(\omega) = s^*(\omega) + \frac{da}{a}.$$

Consideremos ahora la aplicación $\rho : X \times \mathbb{C}^* \rightarrow X \times \mathbb{C}^*$ dada por

$$\rho(x, a) = (x, g(x)a).$$

⁵La acción de \mathbb{C}^* sobre $\mathbb{C}^* \times X$ es la trivial.

⁶Ver el lema 3.2.28

Entonces, por ser ω una forma \mathbb{C}^* -invariante podemos escribir

$$\rho^*(\sigma_s^*(\omega)) = \sigma_s^*(\omega) + \frac{dg}{g}. \quad (3.9)$$

Pero por otro lado, $\rho^*\sigma_s^* = (\sigma_s\rho)^* = \sigma_r^*$. Igualando entonces esta expresión con la ecuación (3.9), queda probado el lema. Q.E.D.

Las formas $\omega(s) = \omega_s$ y ω estan relacionadas de la siguiente manera:

Proposición 3.2.22. *Sea $s : U \rightarrow L$ una sección nunca nula. Entonces*

$$s^*(\omega) = \omega_s. \quad (3.10)$$

Recíprocamente, si ω es una forma de conexión en L , entonces la (única) conexión ∇ en L que genera ω satisface la ecuación (3.10) para toda sección nunca nula $s : U \rightarrow L$ y cada abierto U en donde L es trivial.

Demostración. Sea U un abierto trivializante para el fibrado L y $s : U \rightarrow L|_U$ una sección nunca nula. Consideremos la aplicación $\sigma_s : \mathbb{C}^* \times U \rightarrow L^+|_U$, que resulta un difeomorfismo, definida como en el lema anterior.

Si ω es una forma de conexión en L^+ , y $s' : U \rightarrow L|_U$ es otra sección nunca nula, entonces, por el lema anterior vale la identidad

$$s'^*(\omega) = s^*(\omega) + \frac{dg}{g}.$$

Sea ω una conexión en L^+ , $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un cubrimiento de X tal que para cada $i \in I$, $L|_{U_i}$ es trivializable y $s_i : U_i \rightarrow U_i$ secciones nunca nulas. Gracias nuevamente al lema anterior, en las intersecciones U_{ij} podemos escribir las identidades

$$s_j^*(\omega) = s_i^*(\omega) + \frac{dg_{ij}}{g_{ij}},$$

para $g_{ij} = \frac{s_i}{s_j} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}^*$. Por la proposición 3.2.5, existe entonces una única conexión ∇ tal que $\omega_i = s_i^*(\omega)$ para cada $i \in I$. Q.E.D.

Demostración de 3.2.14. Sea ω la forma asociada a la distribución \overline{H} . Consideremos un cubrimiento abierto $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de X tal que para $i \in I$, está definida una sección $s_i : U_i \rightarrow L|_{U_i}$ nunca nula y sean $p : L \rightarrow X$ y $p^+ = p|_{L^+} : L^+ \rightarrow X$ las proyecciones. Podemos entonces definir, gracias a la proposición anterior y al lema 3.2.21, las formas locales ω_i de una conexión ∇ en L dadas por

$$\omega_i = s_i^*(\omega).$$

Luego, esta conexión induce una distribución H en L , definida por

$$H(e) = H_e = ds_x(TX_x),$$

para $e \in L_x$ y $s : U \rightarrow L|_U$ sección con $x \in U$ tal que $\nabla_\xi(s)(x) = 0$ para todo campo local $\xi \in \Gamma(U, TX)$.

Sea ahora $e_0 \in L_x$ un vector no nulo y $\nabla_\xi(s)(x) = 0$ para cada campo de vectores ξ , donde $s : U \rightarrow L|_U$ es una sección tal que $s(x) = e_0$; podemos suponer que s es en realidad nunca nula, es decir una sección local de L^+ . Luego,

$$H_{e_0} = ds_x(TX_x) = ds_x(dp_{e_0}^+(\overline{H}_{e_0})),$$

ya que $dp_{e_0}^+$ restringida al subespacio horizontal \overline{H}_{e_0} es un isomorfismo con TX_x . Pero, por otro lado, dp_{e_0} restringida a H_{e_0} es también un isomorfismo del subespacio H_{e_0} con el espacio tangente TX_x y entonces

$$dp_{e_0}(H_{e_0}) = dp_{e_0}^+(\overline{H}_{e_0}),$$

de donde se deduce que necesariamente $H_{e_0} = \overline{H}_{e_0}$ ya que p y p^+ coinciden alrededor de e_0 . Q.E.D.

Ejemplo 3.2.23. Demostremos que la forma de conexión para $\nabla + \alpha$ es $\omega + \alpha^*$, donde ω es la forma de la conexión ∇ y α^* es el pullback de α por la proyección $p^+ : L^+ \rightarrow X$.

Por un lado, si s es una sección nunca nula sobre un abierto U de X , entonces $s^*(\omega + \alpha^*) = \omega_s + \alpha$. Verifiquemos a continuación que la forma $\omega + \alpha^*$ verifica los items 1 y 2 de la proposición 3.2.19.

Para el primero, tenemos $(\omega + \alpha^*)(\sigma(z))(e) = \omega(\sigma(z))(e) + \alpha^*(\sigma(z))(e) = z + \alpha^*(\sigma(z))(e)$. Ahora bien, si $e \in L_x$, $\alpha^*(\sigma(z))(e) = \alpha_x(dp_e^+(\sigma(z)(e))) = 0$ por ser $\sigma(z)(e)$ un vector vertical.

Para el segundo item, hacemos también un cálculo directo; sea ξ un campo de vectores en L^+ . Entonces

$$\begin{aligned} (\omega + \alpha^*)_{e.a}((dR_a)_e(\xi(e))) &= \omega_e(\xi(e)) + \alpha_{e.a}^*((dR_a)_e(\xi(e))) \\ &= \omega_e(\xi(e)) + \alpha_x(dp_{e.a}^+(dR_a)_e(\xi(e))) \\ &= \omega_e(\xi(e)) + \alpha_x(d(p^+R_a)_e(\xi(e))) \\ &= \omega_e(\xi(e)) + \alpha_x(dp_e^+(\xi(e))) \\ &= \omega_e(\xi(e)) + \alpha_e^*(\xi(e)) \\ &= (\omega + \alpha^*)_e(\xi(e)). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.24. Si (L, ω) y (L', ω') son fibrados con conexiones, la conexión inducida ω'' en el fibrado $L \otimes L'$, viene dada por la expresión

$$\omega'' = \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega'.$$

3.2.3. Secciones Planas.

Lema 3.2.25. Sea $L \rightarrow X$ un fibrado de línea complejo con conexión ∇ , U un subconjunto abierto de X donde L es trivial y $s : X \rightarrow L|_U$ una sección nunca nula, es decir, una sección sobre U del fibrado L^+ . Son equivalentes:

1. $\omega_s = 0$.
2. Si $s' = \lambda s$ es otra sección definida sobre U , entonces $\nabla_\xi(s') = \langle d\lambda, \xi \rangle s$.

3. $\nabla_\xi(s) = 0$ para cualquier $\xi \in \Gamma(U, TX)$.

Demostración. Si $\omega_s = 0$, entonces, para $s' = \lambda s$ vale la igualdad $\nabla_\xi(s') = \nabla_\xi(\lambda s) = \langle d\lambda, \xi \rangle s + \lambda \nabla_\xi(s)$, y entonces

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_\xi(s')}{s} &= \langle d\lambda, \xi \rangle + \lambda \frac{\nabla_\xi(s)}{s} \\ &= \langle d\lambda, \xi \rangle + \lambda \langle \omega_s, \xi \rangle \\ &= \langle d\lambda, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, como $\lambda \nabla_\xi(s) = \nabla_\xi(s') - \langle d\lambda, \xi \rangle s$, entonces $\nabla_\xi(s) = 0$ para cualquier campo de vectores ξ . Y, en este caso, como $\langle \omega_s, \xi \rangle = \frac{\nabla_\xi(s)}{s} = 0$ para todo campo ξ , entonces necesariamente $\omega_s = 0$. Notar que, si s' es nunca nula, su forma asociada resulta ser $\frac{d\lambda}{\lambda}$. Q.E.D.

Definición 3.2.26. Una sección local nunca nula $s : U \rightarrow L|_U$ se dice una *sección plana* u *horizontal* si y solo si $\omega_s = 0$. Equivalentemente, si $ds_x(TX_x) = H_e$ para cada $x \in X$ y cada $e \in L_x$ (ver la definición 3.2.10).

Traduciendo esta definición al \mathbb{C}^* -fibrado principal L^+ , se dice que una sección $s : U \rightarrow L^+$ es plana u horizontal si y solo si $s^* : \Omega_{\mathbb{C}}^1(L^+) \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}}^1(U)$ cumple que

$$s^*(\omega) = 0.$$

Tanto esta definición como la anterior, via la igualdad $ds_x(TX_x) = H_e$, se pueden usar como definición de sección plana en un fibrado principal arbitrario.

La existencia de secciones planas depende de la existencia de soluciones de la ecuación diferencial

$$\nabla_\xi(s) = 0$$

para cualquier campo de vectores ξ , lo que en general puede no ocurrir. Cuanto dista una conexión de ser plana viene dado por la curvatura de la conexión, que se estudia en la sección 3.5.1.

Ejemplo 3.2.27. En el fibrado trivial $X \times \mathbb{C}^*$, consideremos la 1-forma compleja ω dada por

$$\omega_a = dL_a^{-1},$$

para $a \in \mathbb{C}^*$. Luego, si $\pi_2 : X \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ es la proyección canónica, $\pi_2^*(\omega)$ define una 1-forma compleja en $X \times \mathbb{C}^*$ que, es fácil de verificar, es una conexión en $X \times \mathbb{C}^*$. Si ahora $s : X \rightarrow X \times \mathbb{C}^*$ es la sección $s(x) = (x, 1)$, entonces $\sigma_s = \text{id} : X \times \mathbb{C}^* \rightarrow X \times \mathbb{C}^*$. Luego, por el lema 3.2.21,

$$\pi_2^*(\omega) = \frac{da}{a},$$

ya que $\pi_2 s(x) = 1$ para cada $x \in X$ y entonces (ver la demostración del mismo lema) $\omega = \frac{da}{a}$. A la forma $\pi_2^*(\omega)$ se la llama *conexión trivial* ó *conexión plana* en el fibrado $X \times \mathbb{C}^*$. Análogamente, la conexión trivial en el fibrado trivial $X \times \mathbb{C}$ es la conexión definida por la forma $\omega_s = 0$.

Si ahora $r : X \rightarrow X \times \mathbb{C}^*$ es una sección cualquiera, podemos escribirla como $r(x) = (x, g(x))$, para cierta aplicación suave $g : X \rightarrow \mathbb{C}^*$. Luego, nuevamente por el lema 3.2.21 (o por un cálculo directo)

$$r^*(\pi_2^*(\omega)) = \frac{dg}{g}.$$

3.2.4. La Categoría de Fibrados de Línea con Conexiones.

El siguiente lema permite definir la categoría de fibrados con conexiones.

Lema 3.2.28. *Sea $f : L_1^+ \rightarrow L_2^+$ un homomorfismo de \mathbb{C} -fibrados principales y ω una conexión en L_2^+ . Entonces $f^*(\omega)$ es una conexión en L_1^+ .*

Demostración. Para $i = 1, 2$, consideremos los campos fundamentales

$$\sigma_i : \mathbb{C} \rightarrow \Gamma(TL_i^+)$$

que venían dados por $\sigma_i(z)(e) = (d\bar{\theta}_e^{(i)})_0$, donde $e \in L_i^+$ y $\bar{\theta}_e^{(i)} : \mathbb{R} \rightarrow L_i^+$ es la aplicación

$$\bar{\theta}_e^{(i)}(t) = e \cdot \exp(tz).$$

Sea $e_1 \in L_1^+$ tal que $f(e_1) = e_2$. Entonces

$$f^*(\omega)_{e_1}(\sigma_1(z)(e_1)) = \omega_{e_2}(df_{e_1}(\sigma_1(z)(e_1))).$$

Ahora bien, $df_{e_1}(\sigma_1(z)(e_1)) = df_{e_1}(d\bar{\theta}_{e_1}^{(1)})_0 = d(f\bar{\theta}_{e_1}^{(1)})_0$ y $f\bar{\theta}_{e_1}^{(1)}$ es el campo fundamental $\bar{\theta}_{e_2}^{(2)}$. Luego

$$f^*(\omega)_{e_1}(\sigma_1(z)(e_1)) = z.$$

Para el segundo ítem,

$$\begin{aligned} f^*(\omega)_{e_1.a}((dR_a)_{e_1}(\xi(e_1))) &= \omega_{e_2.a}(d(fR_a)_{e_1}(\xi(e_1))) \\ &= \omega_{e_2.a}(d(R_a f)_{e_1}(\xi(e))) \\ &= \omega_{e_2.a}((dR_a)_{e_2}(df_{e_1}(\xi(e_1)))) \\ &= \omega_{e_2}(df_{e_1}(\xi(e_1))) \\ &= f^*(\omega)_{e_1}(\xi(e_1)). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Notar que en la demostración anterior, solo se usó que la aplicación f es \mathbb{C}^* -equivariante.

Podemos ahora definir la noción de homomorfismo de fibrados de línea con conexiones.

Definición 3.2.29. Un homomorfismo de fibrados de línea con conexiones $f : (L, \omega) \rightarrow (L', \omega')$ es un homomorfismo de fibrados de línea $f : L \rightarrow L'$ tal que

$$f^*(\omega') = \omega.$$

Se dice que $f : (L, \omega) \rightarrow (L', \omega')$ es un *isomorfismo* si lo es $f : L \rightarrow L'$. Esta situación se notará $(L, \omega) \cong (L', \omega')$.

Queda definida entonces la categoría $\mathcal{V}ector_{\mathbb{C}}(X, \omega)$ de fibrados de línea complejos sobre X dotados de una conexión. Al igual que para la categoría $\mathcal{V}ector_{\mathbb{C}}(X)$, queremos estudiar ahora las clases de isomorfismo de los objetos de esta categoría.

Lema 3.2.30. *Sea L un fibrado de línea con conexión ∇ y L^\vee el fibrado dual a L . Entonces existe una única conexión ∇^\vee en L^\vee tal que $\nabla + \nabla^\vee$ es la conexión trivial en el fibrado $L \otimes L^\vee$.*

Demostración. Dado un cubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de X , consideremos, para cada $i \in I$, una sección nunca nula $s_i : U_i \rightarrow L|_{U_i}$. Sean ω_i las formas de la conexión ∇ asociadas a las secciones s_i . La conexión buscada en L^\vee viene dada por las formas

$$\omega_i^\vee = -\omega_i,$$

asociadas a las secciones nunca nulas $s_i^\vee : U_i \rightarrow L^\vee|_{U_i}$ definidas por

$$s_i^\vee(x)(s_i(x)) = 1.$$

Q.E.D.

Podemos entonces, en el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados de línea con conexión, definir la operación

$$[(L, \omega)][(L', \omega')] = [(L \otimes L', \omega'')],$$

que le da a este conjunto una estructura de grupo abeliano: el neutro es la clase del fibrado trivial ε^1 y la conexión trivial y, por el lema anterior, el inverso de un elemento $[(L, \nabla)]$ es la clase $[(L^\vee, \nabla^\vee)]$. Este grupo abeliano se notará $\text{Pic}^\infty(X, \omega)$.

Sea $f : L \rightarrow L$ un automorfismo del fibrado $p : L \rightarrow X$ y sea $e \in L_x$ un vector no nulo. Luego, $f_x = f|_{L_x}$ es un automorfismo del espacio vectorial complejo L_x , con lo cual debe existir un elemento $\lambda_x \in \mathbb{C}^*$ tal que $f_x(e) = \lambda_x e$. Si ahora e' es otro vector en la fibra L_x , entonces $e' = \lambda e$ para cierto escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ y así

$$f_x(e') = f_x(\lambda e) = \lambda_x(\lambda e) = \lambda_x e'.$$

Considerar la aplicación $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ dada por $\lambda(x) = \lambda_x$. Podemos entonces escribir el automorfismo f como

$$f(e) = \lambda(p(e))e.$$

Recíprocamente, si $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ es una función suave, entonces la aplicación

$$e \mapsto \lambda(p(e))e \tag{3.11}$$

define un automorfismo del fibrado L . Es decir, todo isomorfismo $f : L \rightarrow L$ es de la forma $f = (\lambda p)\text{id}_L$ para cierta función diferenciable $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$. Llamaremos f_λ al isomorfismo (3.11). Llamaremos también f_λ al automorfismo del fibrado L^+ inducido por f_λ .

Lema 3.2.31. *Sea (L, ω) un fibrado de línea sobre X con conexión y $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ una función diferenciable. Entonces*

$$f_\lambda^*(\omega) = \omega + \frac{d(\lambda p^+)}{\lambda p^+}.$$

Mas aún, si ω' es otra forma de conexión definida en L , entonces (L, ω) es isomorfo a (L, ω') si y solo si

$$\omega' = \omega + \frac{d(\lambda p^+)}{\lambda p^+} \quad (3.12)$$

para cierta aplicación suave $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}^$.*

Demostración. Sea U un abierto de X y $s : U \rightarrow L|_U$ una sección nunca nula. Consideremos la trivialización $\sigma_s : U \times \mathbb{C}^* \rightarrow L^+|_U$, $\sigma_s(x, a) = s(x).a$. Entonces la composición $f_\lambda \sigma_s$ coincide con la trivialización σ_t , donde $t : U \rightarrow L|_U$ es la sección nunca nula dada por $t(x) = \lambda(x)s(x)$. Entonces, por el lema 3.2.21

$$(f_\lambda \sigma_s)^*(\omega) = \sigma_t^*(\omega) = \omega_t + \frac{da}{a}.$$

Por otro lado, las formas locales ω_s y ω_t están relacionadas por la fórmula

$$\omega_t = \omega_s + \frac{d\lambda_U}{\lambda_U},$$

donde $\lambda_U = \frac{t}{s} = \lambda|_U$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sigma_s^*(f_\lambda^*(\omega) - \omega) &= \sigma_t^*(\omega) - \sigma_s^*(\omega) \\ &= \omega_t - \omega_s \\ &= \frac{d\lambda_U}{\lambda_U}, \end{aligned}$$

nuevamente por 3.2.21. Pero por otro lado, llamando λ_U^+ a la composición $\lambda_U p^+$,

$$\begin{aligned} \sigma_s^*\left(\frac{d\lambda_U^+}{\lambda_U^+}\right) &= \sigma_s^*\left(d\lambda_U^+ \wedge \frac{1}{\lambda_U^+}\right) \\ &= \sigma_s^*(d\lambda_U^+) \wedge \sigma_s^*\left(\frac{1}{\lambda_U^+}\right) \\ &= d(\lambda_U^+ \sigma_s) \wedge \left(\frac{1}{\lambda_U^+} \sigma_s\right) \\ &= d\lambda_U \wedge \frac{1}{\lambda_U} \\ &= \frac{d\lambda_U}{\lambda_U}. \end{aligned}$$

Luego, al ser σ_s un difeomorfismo, el pullback σ_s^* resulta un isomorfismo y entonces

$$f_\lambda^*(\omega) - \omega = \frac{d\lambda_U p^+}{\lambda_U p^+},$$

y la primer afirmación queda demostrada.

Para la segunda afirmación, si (L, ω) es isomorfo a (L, ω') , existe una aplicación suave $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ y un isomorfismo $f_\lambda : L \rightarrow L$ tal que $f_\lambda^*(\omega) = \omega'$; pero por lo anterior, $f_\lambda^*(\omega) = \omega + \frac{d\lambda p^+}{\lambda p^+}$.

La recíproca es trivial, considerando también la primer afirmación. Q.E.D.

Corolario 3.2.32. *Sea $f : L \rightarrow L$ un isomorfismo. Si ω es una forma de conexión definida en L , entonces $f : (L, \omega) \rightarrow (L, \omega)$ es un isomorfismo si y solo si existe un número complejo no nulo z_0 tal que*

$$f(e) = z_0 e.$$

Demostración. Suponiendo que f es un isomorfismo, existe una aplicación suave $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $f = (\lambda p)\text{id}_L = f_\lambda$. Ahora bien, por el lema anterior,

$$\omega = f^*(\omega) = \omega + \frac{d(\lambda p^+)}{\lambda p^+},$$

y luego $d(\log(\lambda p^+)) = 0$, de donde se deduce que λp^+ es constante y luego λ también.

La afirmación recíproca es trivial. Q.E.D.

Existe entonces un homomorfismo de grupos $\pi : \text{Pic}^\infty(X, \omega) \rightarrow \text{Pic}^\infty(X)$, $[(L, \omega)] \mapsto [L]$ que, por lo expuesto anteriormente, no es inyectivo. Considerando el isomorfismo

$$\text{Pic}^\infty(X, \omega)/\ker \pi \cong \text{Pic}^\infty(X),$$

la sucesión siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker \pi & \xrightarrow{i} & \text{Pic}^\infty(X, \omega) & \longrightarrow & \text{Pic}^\infty(X) \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \cong \downarrow c_1 \\ & & & & & & \check{H}^2(X, \underline{\mathbb{Z}}(1)) \end{array}$$

es exacta. Ahora bien, $\ker \pi$ es el conjunto de clases de isomorfismo de conexiones en el fibrado trivial, siendo dos conexiones ω y ω' isomorfas si y solo si existe un isomorfismo $f : \varepsilon^1 \rightarrow \varepsilon^1$ tal que $f^*(\omega') = \omega$. En ese caso, las formas ω y ω' están relacionadas por la identidad (3.12). Luego, $\ker \pi$ se puede ver también como el grupo de formas de conexión complejas módulo el subgrupo de formas del tipo $\frac{d(\lambda \pi_1^+)}{\lambda \pi_1^+}$, con $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ y $\pi_1^+ : X \times \mathbb{C}^* \rightarrow X$ la proyección. Queda probado así el siguiente

Corolario 3.2.33. *El grupo $\text{Pic}^\infty(X, \omega)$ es una extensión del grupo $\check{H}^2(X, \underline{\mathbb{Z}}(1))$ por el grupo de formas complejas de conexión módulo las que son de la forma $\frac{d(\lambda \pi_1^+)}{\lambda \pi_1^+}$.*

3.3. Complejos de Haces e Hipercohomología.

Como fué señalado anteriormente, las cohomologías con coeficientes en un haz son insuficientes para interpretar la información extra dada por una (forma de) conexión en un fibrado de línea complejo. Para traducir esta estructura adicional, se necesitan complejos de haces, en lugar de haces, como coeficientes. Esto da lugar a los grupos de hipercohomología. En particular, y de acuerdo al caso que consideramos, será útil la hipercohomología con coeficientes en un complejo de haces llamado el complejo de Deligne, que fué introducida por él en su tesis doctoral [Del71].

La mayor parte de las demostraciones serán omitidas, refiriéndonos para éstas al artículo anterior y a [Bry92]. Otro artículo interesante a consultar es [Gaj97].

Un *complejo de haces* de grupos abelianos sobre el espacio X es una sucesión de haces y transformaciones naturales

$$\dots \rightarrow F^{n-1} \xrightarrow{\theta^{n-1}} F^n \xrightarrow{\theta^n} F^{n+1} \rightarrow \dots,$$

indexada por los números enteros, y tal que $\theta^2 = \theta^n \theta^{n-1} = 0$ para cada n . Notaremos un complejo como el anterior por $(F^\bullet, \theta^\bullet)$, (F^\bullet, θ) ó solo por F^\bullet si no es necesario especificar los morfismos. Si existe algún $n \in \mathbb{Z}$ tal que $F^k = 0$ para $k < n$, el complejo se dice *acotado inferiormente*. Si $F^k = 0$ para $k > n$, el complejo se dice *acotado superiormente*.

Si F es un haz, no distinguiremos en la notación del haz en si mismo y el complejo que tiene a F en grado 0 y al haz trivial en cualquier otro grado.

Un *morfismo de complejos* de haces $(F^\bullet, \theta^\bullet) \rightarrow (G^\bullet, \eta^\bullet)$ es una familia de morfismos de haces $(F^n \rightarrow G^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F^n & \xrightarrow{\theta} & F^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^n & \xrightarrow{\eta} & G^{n+1} \end{array}$$

conmuta para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Una sucesión de complejos de haces y morfismos

$$\dots \rightarrow F_{n-1}^\bullet \rightarrow F_n^\bullet \rightarrow F_{n+1}^\bullet \rightarrow \dots$$

se dice *exacta* si para cada k , la sucesión de haces y transformaciones naturales

$$\dots \rightarrow F_{n-1}^k \rightarrow F_n^k \rightarrow F_{n+1}^k \rightarrow \dots$$

es exacta.

Ejemplo 3.3.1. Si X es una variedad diferenciable, para cada $n \geq 0$, sea $\Omega_X^n : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{A}$ el haz de n -formas diferenciales, que a cada abierto U de X , le asigna el grupo $\Omega_X^n(U) = \Omega^n(U)$ de n -formas diferenciales sobre U . Entonces, la sucesión

$$\dots \rightarrow \Omega_X^{n-1} \xrightarrow{d} \Omega_X^n \xrightarrow{d} \Omega_X^{n+1} \rightarrow \dots$$

resulta un complejo de haces, donde, para cada U , el homomorfismo de grupos d_U es el operador de diferenciación exterior. Este complejo, que se nota Ω_X^\bullet , se llama el *complejo de de Rham*. Este complejo está acotado inferiormente.

Un *complejo doble* de grupos abelianos es una familia de grupos abelianos y homomorfismos $\mathcal{G} = (G^{n,k}, f^{n,k}, g^{n,k})_{n,k \in \mathbb{Z}}$, que se nota abreviadamente $(G^{\bullet,\bullet}, f, g)$ ó $G^{\bullet,\bullet}$, con $f^{n,k} : G^{n,k} \rightarrow G^{n+1,k}$, $g^{n,k} : G^{n,k} \rightarrow G^{n,k+1}$, y tal que, para cada n y k en \mathbb{Z}

1. $(G^{n,\bullet}, g^{n,\bullet})$ y $(G^{\bullet,k}, f^{\bullet,k})$ son complejos de grupos abelianos y
2. $f^{n,\bullet} : G^{n,\bullet} \rightarrow G^{n+1,\bullet}$ y $g^{\bullet,k} : G^{\bullet,k} \rightarrow G^{\bullet,k+1}$ son morfismos de complejos.

Equivalentemente, para cada par de enteros n y k , $f^{n+1,k} f^{n,k} = f^2 = 0 = g^2 = g^{n,k+1} g^{n,k}$ y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G^{n,k+1} & \xrightarrow{f^{n,k+1}} & G^{n+1,k+1} \\ \uparrow g^{n,k} & & \uparrow g^{n+1,k} \\ G^{n,k} & \xrightarrow{f^{n,k}} & G^{n+1,k} \end{array}$$

conmuta.

Sea $\mathcal{F} = (F^\bullet, \theta^\bullet)$ un complejo de haces de grupos abelianos sobre X y \mathfrak{U} un cubrimiento de este último. Para cada entero k , de acuerdo a la sección 1.1.3, podemos definir el complejo de grupos abelianos (acotado inferiormente) $C^\bullet(\mathfrak{U}; F^k)$, que llamamos complejo de cocadenas de X a valores en el haz F^k . Estos complejos, junto al complejo de haces \mathcal{F} , dan origen a un complejo doble de grupos abelianos, que pasamos a describir.

Llamemos $\delta = \delta^{n,k}$ al homomorfismo $C^n(\mathfrak{U}; F^k) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{U}; F^k)$. Para cada natural n y entero k , se define la aplicación $\Theta = \Theta^{n,k} : C^n(\mathfrak{U}; F^k) \rightarrow C^n(\mathfrak{U}; F^{k+1})$ por la fórmula

$$(\Theta(\omega))_{i_0 \dots i_n} = \theta_{i_0 \dots i_n}^k(\omega_{i_0 \dots i_n}),$$

donde, $\theta_{i_0 \dots i_n}^k = \theta_{U_{i_0 \dots i_n}}^k$. Por simplicidad, llamaremos $C_{\mathfrak{U}}^{n,k}$ al grupo $C^n(\mathfrak{U}; F^k)$.

Como $\Theta^2 = 0$ y $\Theta\delta = \delta\Theta$, se obtiene así un complejo doble de grupos abelianos $(C_{\mathfrak{U}}^{\bullet,\bullet}, \delta, \Theta)$, que notaremos $\mathcal{C}_{\mathfrak{U}}$ y llamaremos el *complejo de cocadenas de Čech del cubrimiento \mathfrak{U} a valores en el complejo de haces \mathcal{F}* .

La cohomología de un complejo doble se definirá como la cohomología de un complejo simple asociado.

Definición 3.3.2. Sea $\mathcal{G} = (G^{\bullet,\bullet}, f, g)$ un complejo doble de grupos abelianos. El *complejo total* de \mathcal{G} , notado $\text{Tot}(\mathcal{G})$, es el complejo de grupos abelianos definido por

$$\text{Tot}(\mathcal{G})^n = \bigoplus_{k+r=n} G^{k,r},$$

con $D = D^n : \text{Tot}(\mathcal{G})^n \rightarrow \text{Tot}(\mathcal{G})^{n+1}$ que en la coordenada correspondiente a $G_{k,r}$ viene dado por

$$f + (-1)^k g.$$

El factor $(-1)^k$ se necesita para que D sea efectivamente un morfismo de complejos, como se puede ver en el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bullet & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & g & & \\
 & & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & g & & -g \\
 & & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet
 \end{array}$$

Ejemplo 3.3.3. Consideremos un complejo de haces \mathcal{F} de tres términos

$$F^0 \xrightarrow{\theta^0} F^1 \xrightarrow{\theta^1} F^2,$$

donde F^0 está en grado 0. Podemos entonces formar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_{\mathcal{U}}^{0,0} & \xrightarrow{\delta^{0,0}} & C_{\mathcal{U}}^{1,0} & \xrightarrow{\delta^{1,0}} & C_{\mathcal{U}}^{2,0} & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow \Theta^{0,0} & & \downarrow \Theta^{1,0} & & \downarrow \Theta^{2,0} & & \\
 C_{\mathcal{U}}^{0,1} & \xrightarrow{\delta^{0,1}} & C_{\mathcal{U}}^{1,1} & \xrightarrow{\delta^{1,1}} & C_{\mathcal{U}}^{2,1} & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow \Theta^{0,1} & & \downarrow \Theta^{1,1} & & \downarrow \Theta^{2,1} & & \\
 C_{\mathcal{U}}^{0,2} & \xrightarrow{\delta^{0,2}} & C_{\mathcal{U}}^{1,2} & \xrightarrow{\delta^{1,2}} & C_{\mathcal{U}}^{2,2} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Las diagonales del diagrama son las que forman el complejo total $\text{Tot}(\mathcal{C}_{\mathcal{U}})$, es decir

$$\begin{aligned}
 \text{Tot}(\mathcal{C}_{\mathcal{U}})^0 &= C_{\mathcal{U}}^{0,0} \\
 \text{Tot}(\mathcal{C}_{\mathcal{U}})^1 &= C_{\mathcal{U}}^{0,1} \oplus C_{\mathcal{U}}^{1,0} \\
 \text{Tot}(\mathcal{C}_{\mathcal{U}})^2 &= C_{\mathcal{U}}^{0,2} \oplus C_{\mathcal{U}}^{1,1} \oplus C_{\mathcal{U}}^{2,0},
 \end{aligned}$$

y los homomorfismos D vienen dados por

$$\begin{aligned}
 D^0 &= (\Theta^{0,0}, \delta^{0,0}) \\
 D^1 &= (\Theta^{0,1}, \delta^{0,1} - \Theta^{1,0}, \delta^{1,0})
 \end{aligned}$$

Definición 3.3.4. En la situación de la definición anterior, la cohomología del complejo doble \mathcal{G} se define por

$$H^\bullet(\mathcal{G}) = H^\bullet(\text{Tot}(\mathcal{G})).$$

Para el caso del complejo doble $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$, llamamos a $H^\bullet(\text{Tot}(\mathcal{C}_{\mathcal{U}}))$ la *hipercohomología de Čech* del cubrimiento \mathcal{U} con coeficientes en el complejo de haces $\mathcal{F} = F^\bullet$ y la notamos $H^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. Definimos entonces la *hipercohomología de Čech* $\check{H}^\bullet(X; \mathcal{F})$ de X con coeficientes en el complejo de haces \mathcal{F} como

$$\check{H}^n(X; \mathcal{F}) = \text{colim}_{\mathcal{U}} H^n(\mathcal{U}; \mathcal{F}).$$

Al igual que para la cohomología usual, dado un morfismo de complejos de haces $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ se obtiene el correspondiente homomorfismo en la cohomología

$$\check{H}^\bullet(X; \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^\bullet(X; \mathcal{G}).$$

Si $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de complejos de haces y morfismos, tenemos también una sucesión exacta larga de hipercohomología

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X; \mathcal{F}') \rightarrow \check{H}^0(X; \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(X; \mathcal{F}'') \rightarrow \check{H}^1(X; \mathcal{F}') \rightarrow \dots$$

Sea ahora A un subanillo de \mathbb{R} . Generalizando la definición de $\mathbb{Z}(1)$, se define, para $r \in \mathbb{Z}$, el subanillo $A(r)$ por

$$A(r) = (2\pi i)^r A \subset \mathbb{C}.$$

Para $U \subset X$, sea $\Omega_{\mathbb{C}}^n(U)$ el grupo de n -formas diferenciales sobre U a valores en \mathbb{C} . Se tiene entonces, análogamente al ejemplo 3.3.1, un complejo de haces $\Omega_{X, \mathbb{C}}^\bullet$, donde $\Omega_{X, \mathbb{C}}^n(U) = \Omega_{\mathbb{C}}^n(U)$.

Definición 3.3.5. El *complejo suave de Deligne* $A(r)_{\mathcal{D}}^\infty$ es el complejo de haces sobre X

$$\underline{A}(r) \xrightarrow{\iota} \Omega_{X, \mathbb{C}}^0 \xrightarrow{d} \Omega_{X, \mathbb{C}}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{X, \mathbb{C}}^{r-1},$$

donde el haz $\underline{A}(r)$ está en grado 0 e ι es la inclusión en las funciones suaves. Los grupos de hipercohomología $\check{H}^n(X; A(r)_{\mathcal{D}}^\infty)$ ($n \geq 0$) se llaman los *grupos de cohomología de Deligne* de X . Se notan también por $H_{\mathcal{D}}^n(X; A(r)^\infty)$.

Para $r = 0$, la cohomología de Deligne $H^\bullet(X; A(0)_{\mathcal{D}}^\infty)$ resulta ser la cohomología de Čech $\check{H}^\bullet(X; \underline{A})$.

Definición 3.3.6. Un morfismo de complejos de haces $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ se llama un *cuasi-isomorfismo* si para cada número entero n , el homomorfismo inducido $\check{H}^n(X; \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^n(X; \mathcal{G})$ es un isomorfismo de grupos.

Sea k un entero y $\mathcal{F} = F^\bullet$ un complejo de haces. Notaremos por $\mathcal{F}[k] = F^{\bullet-k}$ al complejo obtenido desplazando el complejo \mathcal{F} k lugares a la izquierda si k es positivo ó $|k|$ lugares a la derecha si k es negativo. En ese caso, para cada n vale la igualdad

$$\check{H}^n(X; \mathcal{F}[k]) = \check{H}^{n+k}(X; \mathcal{F}).$$

Las siguientes proposiciones tratan sobre ciertos complejos de haces y cuasi-isomorfismos que serán de utilidad luego.

Proposición 3.3.7. *El complejo de Deligne $\mathbb{Z}(1)_{\mathcal{D}}^\infty$ es cuasi-isomorfo al complejo $\mathbb{C}_X^*[-1]$. Luego, para cada n vale la igualdad*

$$\check{H}^n(X; \mathbb{Z}(1)_{\mathcal{D}}^\infty) = \check{H}^{n-1}(X; \mathbb{C}_X^*).$$

Sea \mathcal{O}_n^* el complejo de haces

$$\mathbb{C}_X^* \xrightarrow{d \log} \Omega_{X, \mathbb{C}}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{X, \mathbb{C}}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{X, \mathbb{C}}^n,$$

donde el haz \mathbb{C}_X^* está en grado 0.

Proposición 3.3.8. *Para cada $r > 1$, el morfismo de complejos de haces*

$$\begin{array}{ccccccccc} \underline{\mathbb{Z}}(1) & \xrightarrow{\iota} & \Omega_{X,\mathbb{C}}^0 & \xrightarrow{d} & \Omega_{X,\mathbb{C}}^1 & \xrightarrow{d} & \Omega_{X,\mathbb{C}}^2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \Omega_{X,\mathbb{C}}^{r-1} \\ \downarrow & & \downarrow \text{exp} & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & & & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}_X^* & \xrightarrow{d\log} & \Omega_{X,\mathbb{C}}^1 & \xrightarrow{d} & \Omega_{X,\mathbb{C}}^2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \Omega_{X,\mathbb{C}}^{r-1} \end{array}$$

es un cuasi-isomorfismo.

El complejo de haces de la fila superior de la proposición anterior es el complejo $\mathbb{Z}(r)_{\mathcal{D}}^{\infty} \otimes \mathbb{Z}(1-r)$, que se obtiene tensorizando, sobre los enteros, cada haz del complejo $\mathbb{Z}(r)_{\mathcal{D}}^{\infty}$ por el grupo abeliano $\mathbb{Z}(1-r)$; para las formas se obtiene que $\Omega_{X,\mathbb{C}}^k \otimes \mathbb{Z}(1-r) = \Omega_{X,\mathbb{C}}^k$ y, teniendo en cuenta el isomorfismo $A(r) \otimes A(s) \rightarrow A(r+s)$, para el primer término se verifica que $\underline{\mathbb{Z}}(r) \otimes \mathbb{Z}(1-r) = \underline{\mathbb{Z}}(1)$.

El complejo de la fila inferior es $\mathcal{O}_{r-1}^*[-1]$. Luego, para cada n existe un isomorfismo

$$\check{H}^{n-1}(X; \mathcal{O}_{r-1}^*) \cong \check{H}^n(X; \mathbb{Z}(r)_{\mathcal{D}}^{\infty} \otimes \mathbb{Z}(1-r)).$$

Ahora bien, se puede generalizar a complejos de haces el teorema de coeficientes universal para cohomologías con coeficientes en haces, que se puede ver en [Bre97]; este teorema asegura una descomposición

$$\check{H}^n(X; \mathcal{F} \otimes M) \cong (\check{H}^n(X; \mathcal{F}) \otimes M) \oplus \text{Tor}(\check{H}^{n+1}(X; \mathcal{F}), M),$$

donde M es un módulo sobre un anillo de ideales principales finitamente generado. En nuestro caso, el anillo en cuestión es \mathbb{Z} y $M = \mathbb{Z}(1-r)$, de donde se obtiene un isomorfismo

$$\check{H}^n(X; \mathbb{Z}(r)_{\mathcal{D}}^{\infty} \otimes \mathbb{Z}(1-r)) \cong \check{H}^n(X; \mathbb{Z}(r)_{\mathcal{D}}^{\infty}) \otimes \mathbb{Z}(1-r).$$

El siguiente teorema, cuya demostración se puede ver en [Bry92], relaciona la cohomología de Deligne con la de de Rham.

El morfismo de complejos $\pi : \mathbb{R}(r)_{\mathcal{D}}^{\infty} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}(r)$,

$$\begin{array}{ccccccccc} \underline{\mathbb{R}}(r) & \xrightarrow{\iota} & \Omega_{X,\mathbb{C}}^0 & \xrightarrow{d} & \Omega_{X,\mathbb{C}}^1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \Omega_{X,\mathbb{C}}^{r-1} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \underline{\mathbb{R}}(r) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

induce un homomorfismo en la cohomología

$$\check{H}^r(X; \mathbb{R}(r)_{\mathcal{D}}^{\infty}) \rightarrow \check{H}^r(X; \underline{\mathbb{R}}(r)),$$

que llamamos π_{\bullet} .

Teorema 3.3.9. *Sea $[\alpha] \in \check{H}^r(X; \mathbb{R}(r)_{\mathcal{D}}^{\infty})$. Entonces, la clase de cohomología $\pi_{\bullet}[\alpha] \in \check{H}^r(X; \underline{\mathbb{R}}(r))$ se corresponde con la clase de cohomología de $(-1)^r d\alpha$ via el isomorfismo entre las cohomologías de Čech y de Rham.*

3.4. Caracterización Cohomológica de los Fibrados de Línea con Conexiones.

En la sección anterior pudimos apreciar como una teoría de cohomología usual como la de Čech falla a la hora de dar una clasificación cohomológica de las clases de isomorfismo de fibrados con conexiones. Esto se debe principalmente a que la cohomología de Čech no tiene forma de procesar la información extra que se obtiene al considerar un fibrado junto con su forma de conexión. Esto sugiere entonces considerar otro tipo de coeficientes, que incluya la información dada por las formas.

Para el caso del grupo $\text{Pic}^\infty(X)$, bastaba solo con el haz \mathbb{C}_X^* , ya que los cociclos de un fibrado de línea, que lo caracterizan completamente, son precisamente aplicaciones definidas sobre abiertos de la variedad X a valores en el grupo multiplicativo de los complejos. Con las conexiones, la forma de agregar la información dada por las 1-formas es considerar, además del haz \mathbb{C}_X^* , el haz $\Omega_{X,\mathbb{C}}^1$. Esto sugiere entonces la elección de un sistema de coeficientes adecuado, que involucre a los dos haces en cuestión.

Sea $L \rightarrow X$ un fibrado de línea con conexión ∇ y $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un cubrimiento por abiertos trivializables de X . Para cada $i \in I$, sea $s_i : U_i \rightarrow L|_{U_i}$ una sección local nunca nula. En las intersecciones U_{ij} están definidas las aplicaciones $g_{ij} = \frac{s_i}{s_j} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}^*$ que, como se vió anteriormente, forman un 1-cociclo de Čech $g = (g_{ij})$ a valores en el haz \mathbb{C}_X^* . Por medio de la conexión, definimos ahora las 1-formas complejas sobre U_i dadas por

$$\omega_i = \frac{\nabla(s_i)}{s_i}.$$

Por la proposición 3.2.4, en las intersecciones U_{ij} , vale la identidad

$$\omega_i - \omega_j = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}.$$

Llamemos ω a la 0-cocadena de Čech $(\omega_i) \in C^0(\mathfrak{U}; \Omega_{X,\mathbb{C}}^1)$ y sea $\mathcal{C}_{\mathfrak{U}}$ el complejo de cocadenas de Čech del cubrimiento \mathfrak{U} a valores en \mathcal{O}_1^* .

Lema 3.4.1. *El par $(-\omega, g) \in \text{Tot}(\mathcal{C}_{\mathfrak{U}})^1$ es un 1-cociclo.*

Demostración. La demostración es un cálculo directo. En este caso particular, el diferencial a considerar es $D : C^0(\mathfrak{U}; \Omega_{X,\mathbb{C}}^1) \oplus C^1(\mathfrak{U}; \mathbb{C}_X^*) \rightarrow C^1(\mathfrak{U}; \Omega_{X,\mathbb{C}}^1) \oplus C^2(\mathfrak{U}; \mathbb{C}_X^*)$ dado por

$$D(\omega, g) = (\delta\omega - \Theta g, \delta g).$$

Luego, se debe verificar que $D(-\omega, g) = (0, 1)$. Ahora bien, $(\delta(-\omega))_{ij} = (-\delta\omega)_{ij} = \omega_i - \omega_j = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}} = d \log g_{ij}$ y $(\delta g)_{ijk} = g_{jk} g_{ik}^{-1} g_{ij} = 1$. El lema se desprende entonces de la identidad $\Theta g = (d \log g_{ij})$. Q.E.D.

A continuación se demuestran los teoremas principales de esta sección, análogos a los resultados 3.1.1 y 3.1.2.

Teorema 3.4.2. *La clase de hipercohomología $[-\omega, g] \in \check{H}^1(X; \mathcal{O}_1^*)$ es independiente del cubrimiento \mathfrak{U} considerado y de las secciones $s_i, i \in I$.*

Demostración. La independencia del cubrimiento se demuestra de la misma forma en que se demostró para el grupo $\text{Pic}^\infty(X)$; ver el teorema 3.1.1.

Sean $s'_i : U_i \rightarrow L|_{U_i}, i \in I$, otra familia de secciones locales nunca nulas de L y $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$ diferenciables tales que $s'_i = f_i s_i$. Llamemos f a la 0-cocadena de Čech (f_i) a valores en el haz \mathbb{C}_X^* . Entonces, los cociclos g'_{ij} asociados a las secciones s'_i son

$$g'_{ij} = \frac{f_i}{f_j} g_{ij}$$

y las formas de conexión

$$\begin{aligned} \omega'_i &= \frac{\nabla(s'_i)}{s'_i} = \frac{\nabla(f_i s_i)}{f_i s_i} \\ &= \frac{df_i \otimes s_i + f_i \nabla(s_i)}{f_i s_i} \\ &= \frac{\nabla(s_i)}{s_i} + \frac{df_i}{f_i} \\ &= \omega_i + d \log f_i. \end{aligned}$$

En grado 0, el diferencial del complejo total $\text{Tot}(\mathcal{C}_{\mathfrak{U}})$ es $D : C^0(\mathfrak{U}; \mathbb{C}_X^*) \rightarrow C^0(\mathfrak{U}; \Omega_{X, \mathbb{C}}^1) \oplus C^1(\mathfrak{U}; \mathbb{C}_X^*)$ y viene dado por

$$D = (\Theta, \delta).$$

Ahora bien, $(\delta f)_{ij} = f_j f_i^{-1}$ y $(\Theta f)_i = d \log f_i$, y luego $D(f) = ((d \log f_i), (f_j f_i^{-1}))$.

Para ver que las clases de $(-\omega, g)$ y $(-\omega', g')$ coinciden, donde $g' = (g'_{ij})$, veamos que difieren en el coborde $D(f^{-1})$, donde $(f^{-1})_i = f_i^{-1}$;

$$\begin{aligned} (-\omega', g') - (-\omega, g) &= (-\omega' + \omega, g' g^{-1}) \\ &= ((-\omega_i + d \log f_i) + \omega_i, (f_i f_j^{-1} g_{ij} g_{ij}^{-1})) \\ &= ((-d \log f_i), (f_i f_j^{-1})) \\ &= (\Theta(f^{-1}), \delta(f^{-1})) \\ &= D(f^{-1}). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Obtenemos entonces un homomorfismo de grupos $\underline{c}_1 : \text{Pic}^\infty(X) \rightarrow \check{H}^1(X; \mathcal{O}_1^*)$.

Teorema 3.4.3. *El grupo $\text{Pic}^\infty(X, \omega)$ de clases de isomorfismo de fibrados de línea con conexión es isomorfo al grupo $\check{H}^1(X; \mathcal{O}_1^*)$, vía el homomorfismo \underline{c}_1 .*

Demostración. Supongamos que $\underline{c}_1[L, \nabla] \in \check{H}^1(X; \mathcal{O}_1^*)$ es el elemento neutro y sea $(\omega, g) = ((\omega_i), (g_{ij}))$ un 1-cociclo de Čech de un cubrimiento \mathfrak{U} a valores en \mathcal{O}_1^* , asociado a secciones locales $s : U_i \rightarrow L|_{U_i}$ nunca nulas, que representa a $\underline{c}_1[L, \nabla]$. Entonces, recurriendo si fuera necesario a los cálculos hechos en el teorema anterior, podemos afirmar que $\omega_i = 0$ y $g_{ij} = 1$ para cada $i, j \in I$. Luego, $s_i = s_j$ en las intersecciones U_{ij} , lo que permite definir una sección global nunca nula, y luego el

fibrado L es trivializable. Por otro lado, las formas ω_i son todas 0, lo que además muestra que la conexión ∇ es la trivial.

Para la sobreyectividad, consideremos un 1-cociclo de Čech (ω, g) de un cubrimiento \mathfrak{U} a valores en \mathcal{O}_1^* . Por la construcción de un fibrado a partir de sus cociclos, existe un fibrado de línea L y secciones nunca nulas $s_i : U_i \rightarrow L|_{U_i}$ tales que $s_i = g_{ij}s_j$ en U_{ij} . En cada abierto trivializante U_i podemos entonces definir la conexión ∇^i cuya forma asociada a la sección s_i es ω_i . Veamos que las conexiones ∇^i y ∇^j coinciden en U_{ij} , lo que implicaría que se pegan para obtener una conexión global en L . Es decir, por la proposición 3.2.5, solo se necesita verificar que las formas ω_i verifican la ecuación (3.1) en las intersecciones U_{ij} . Sea ξ un campo de vectores sobre U_{ij} ; entonces

$$\begin{aligned} \nabla_\xi^j(s_i) &= \nabla_\xi^j(g_{ij}s_j) \\ &= \langle dg_{ij}, \xi \rangle s_j + g_{ij} \nabla_\xi^j(s_j) \\ &= \langle dg_{ij}, \xi \rangle s_j + g_{ij} \langle \omega_j, \xi \rangle s_j \\ &= (\langle dg_{ij}, \xi \rangle + \langle \omega_j, \xi \rangle g_{ij}) s_j \\ &= \langle \omega_j + d \log g_{ij}, \xi \rangle g_{ij} s_j \\ &= \langle \omega_j + d \log g_{ij}, \xi \rangle s_i, \end{aligned}$$

es decir, $\frac{\nabla^j(s_i)}{s_i} = \omega_j + d \log g_{ij}$ en U_{ij} , que era lo que se quería demostrar. Q.E.D.

Podemos dar ahora una caracterización completa de los fibrados con conexiones.

Teorema 3.4.4. *El grupo $\text{Pic}^\infty(X, \omega)$ de clases de isomorfismo de fibrados de línea con conexión es canónicamente isomorfo al grupo $\check{H}^2(X; \mathbb{Z}(2)_{\mathcal{D}}^\infty) \otimes \mathbb{Z}(-1)$.*

Demostración. El resultado se desprende del teorema anterior y de la sucesión de isomorfismos

$$\check{H}^1(X; \mathcal{O}_1^*) \cong \check{H}^2(X; \mathbb{Z}(2)_{\mathcal{D}}^\infty \otimes \mathbb{Z}(-1)) \cong \check{H}^2(X; \mathbb{Z}(2)_{\mathcal{D}}^\infty) \otimes \mathbb{Z}(-1),$$

el primero válido por la proposición 3.3.8 y el segundo por el teorema de coeficientes universal. Q.E.D.

3.5. Curvatura y Cohomología.

3.5.1. La Curvatura de una Conexión.

La existencia de secciones planas de un fibrado equivale a encontrar alguna sección s que verifique la ecuación diferencial

$$\nabla_\xi(s) = 0$$

para cada campo de vectores ξ . Lo que se hará a continuación es en cierta forma medir, dada una conexión, cuán lejos se está de poder obtener una tal sección plana. Esta medición dará como resultado un invariante importante: la curvatura de la conexión.

Lema 3.5.1. Sea $L \rightarrow X$ un fibrado de línea complejo con conexión ∇ . Entonces existe una única aplicación \mathbb{C} -lineal $\widehat{\nabla} : \Omega_L^1(X) \rightarrow \Omega_L^2(X)$ que satisface la regla de Leibniz

$$\widehat{\nabla}(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + \omega \wedge \nabla(s)$$

para cada 1-forma compleja ω y $s : X \rightarrow L$ sección de L . Más aún, $\widehat{\nabla}$ satisface la identidad

$$\widehat{\nabla}(\lambda(\omega \otimes s)) = d\lambda \wedge (\omega \otimes s) + \lambda \widehat{\nabla}(\omega \otimes s).$$

Recordemos que, para cada sección s de L , $\nabla(s)$ es una 1-forma a valores en L , o sea $\nabla(s) \in \Omega_L^1(X)$ y, si ω es una 1-forma compleja, entonces está bien definido el producto $\omega \wedge \nabla(s) \in \Omega_L^2(X)$

Demostración. Basta definir $\widehat{\nabla}$ localmente. Sea $\omega \otimes s$ una sección local nunca nula en $\Omega_L^1(U)$. Luego, la fórmula

$$\widehat{\nabla}(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla(s)$$

define el operador buscado.

Q.E.D.

Consideremos ahora la composición

$$\Gamma(L) \xrightarrow{\nabla} \Omega_L^1(X) \xrightarrow{\widehat{\nabla}} \Omega_L^2(X)$$

y llamémosla K .

Corolario 3.5.2. K es $C^\infty(X, \mathbb{C})$ -lineal.

Demostración.

$$\begin{aligned} K(\lambda s) &= \widehat{\nabla}(\nabla(s)) = \widehat{\nabla}(d\lambda \otimes s + \lambda \nabla(s)) \\ &= \widehat{\nabla}(d\lambda \otimes s) + \widehat{\nabla}(\lambda \nabla(s)) \\ &= -d\lambda \wedge \nabla(s) + d\lambda \wedge \nabla(s) + \lambda \widehat{\nabla}(\nabla(s)) \\ &= \lambda K(s). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Definición 3.5.3. La aplicación K se llama el *tensor de curvatura* de la conexión ∇ .

Observación 5. Reemplazando L por el fibrado real TX , K resulta ser el *tensor de curvatura usual* $K : \Gamma(TX) \times \Gamma(TX) \times \Gamma(TX) \rightarrow \Gamma(TX)$,

$$K(\xi, \eta, \chi) = \nabla_\xi(\nabla_\eta(\chi)) - \nabla_\eta(\nabla_\xi(\chi)) - \nabla_{[\xi, \eta]}(\chi),$$

notado usualmente $K(\xi, \eta, \chi) = R(\xi, \eta)\chi$.

Sea ahora $U \subset X$ un abierto y $x \in U$. Sean $s, s', s'' : U \rightarrow L|_U$ secciones tales que $s'(x) = s''(x)$ y s nunca nula. La diferencia $s' - s''$ es otra sección local, y luego existe una aplicación suave $\lambda : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $s' - s'' = \lambda s$. Pero

$$0 = s'(x) - s''(x) = \lambda(x)s(x),$$

y entonces $\lambda(x) = 0$. Así,

$$K(s' - s'')(x) = K(\lambda s)(x) = \lambda(x)K(s)(x),$$

de donde se deduce que

$$K(s')(x) = K(s'')(x).$$

Es decir, al igual que las conexiones, si s es una sección que se anula en un abierto, $K(s)$ también. Las aplicaciones con esta propiedad se conocen como *operadores locales*.

Dada ahora una sección local $s : U \rightarrow L|_U$ nunca nula, podemos escribir

$$\begin{aligned} K(s) &= \widehat{\nabla}(\nabla(s)) = \widehat{\nabla}(\omega \otimes s) \\ &= d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla(s) \\ &= d\omega \otimes s - \omega \wedge (\omega \otimes s) \\ &= (d\omega - \omega \wedge \omega) \otimes s. \end{aligned}$$

Pero, en este caso particular para fibrados de línea, el producto $\omega \wedge \omega$ es 0, y así

$$K(s) = d\omega \otimes s.$$

Sean $s, s' : U \rightarrow L|_U$ secciones locales nunca nulas y sean ω y ω' las formas de conexión asociadas a s y s' respectivamente. Existe entonces una aplicación suave $\lambda : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $s' = \lambda s$ y $\omega' = \omega + \frac{d\lambda}{\lambda}$. Tomando derivada exterior a ambos lados se obtiene entonces la identidad

$$d\omega = d\omega'.$$

Es decir, las 1-formas $d\omega$ no dependen de la trivialización ni de las secciones consideradas.

Definición 3.5.4. La *forma de curvatura* de la conexión ∇ es la 2-forma $\theta \in \Omega_{\mathbb{C}}^2(X)$ definida localmente, en un abierto trivializante U , por la igualdad

$$\theta = d\omega_s,$$

donde $s : U \rightarrow L|_U$ es una sección nunca nula.

Es claro que si $s : U \rightarrow L|_U$ es una sección local horizontal y ω es su forma de conexión asociada, necesariamente $\theta = d\omega = 0$. Lo interesante es que también es suficiente. Ver, por ejemplo [Lee97], [Nom56] y [KN63].

Como las secciones locales del fibrado principal asociado $L^+ \rightarrow X$ son secciones locales nunca nulas del fibrado de línea $L \rightarrow X$, y una sección $s : U \rightarrow L^+|_U$ es horizontal si y solo si $s^*(\omega) = \omega_s = 0$ entonces podemos enunciar la

Definición 3.5.5. La *forma de curvatura*⁷ de la conexión inducida en el fibrado principal $L^+ \rightarrow X$ es la 2-forma θ^+ sobre L^+ dada por

$$\theta^+ = d\omega.$$

Si $s : U \rightarrow L|_U$ es una sección local nunca nula, entonces vale la identidad

$$s^*(\theta^+) = s^*(d\omega) = ds^*(\omega) = d\omega_s = \theta.$$

Y, al igual que para fibrados de línea, esta 2-forma contiene toda la información acerca de la existencia de secciones locales horizontales en L^+ . Ver [KN63].

Ejemplo 3.5.6. Sean ∇ y ∇' conexiones en el fibrado de línea $L \rightarrow X$, con formas de curvatura θ y θ' respectivamente, y sea α una 1-forma compleja en X . Entonces

1. la forma de curvatura de la conexión $\nabla + \alpha$ es $\theta + d\alpha$ y
2. la forma de curvatura de $\nabla + \nabla'$ es $\theta + \theta'$.

3.5.2. La Relación con las Cohomologías de de Rham y Deligne.

En esta sección se relaciona la construcción de la curvatura de una conexión con la primer clase de Chern y con la cohomología de de Rham.

Llamemos d al morfismo de complejos de haces $\mathcal{O}_1^* \rightarrow \Omega_{X,\mathbb{C}}^2[-1]$ definido por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_X^* & \xrightarrow{d \log} & \Omega_{X,\mathbb{C}}^1 \\ \downarrow & & \downarrow d \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_{X,\mathbb{C}}^2. \end{array}$$

Queda definido entonces un homomorfismo

$$d_\bullet : \check{H}^1(X; \mathcal{O}_1^*) \rightarrow \check{H}^1(X; \Omega_{X,\mathbb{C}}^2[-1]) = \check{H}^0(X; \Omega_{X,\mathbb{C}}^2) \cong \Omega_{\mathbb{C}}^2(X),$$

que pasamos a describir.

Fijemos un cubrimiento \mathfrak{U} de X . Las 0-cocadenas del complejo $\Omega_{X,\mathbb{C}}^2[-1]$ son el grupo trivial y luego el homomorfismo d_\bullet^0 es el nulo. En grado 1, a nivel de cocadenas se tiene

$$d_\bullet^1 : C^0(\mathfrak{U}; \Omega_{X,\mathbb{C}}^1) \oplus C^1(\mathfrak{U}; \mathbb{C}_X^*) \rightarrow C^0(\mathfrak{U}; \Omega_{X,\mathbb{C}}^2),$$

que viene dado por $d_\bullet^1((\omega_i), (g_{ij})) = (d\omega_i)$. Siguiendo, para las 2-cocadenas tenemos el homomorfismo

$$d_\bullet^2 : C^1(\mathfrak{U}; \Omega_{X,\mathbb{C}}^1) \oplus C^2(\mathfrak{U}; \mathbb{C}_X^*) \rightarrow C^1(\mathfrak{U}; \Omega_{X,\mathbb{C}}^2),$$

definido por $d_\bullet^2((\omega_{ij}), (g_{ijk})) = (d\omega_{ij})$.

Recordemos también el isomorfismo $\underline{c}_1 : \text{Pic}^\infty(X, \omega) \rightarrow \check{H}^1(X; \mathcal{O}_1^*)$ descrito anteriormente.

⁷En el siguiente capítulo se dará una definición general de forma de curvatura para fibrados principales arbitrarios.

Proposición 3.5.7. *Sea L un fibrado con conexión ∇ y curvatura θ . Entonces*

$$d_{\bullet}c_1[L, \nabla] = -\theta \in \Omega_{\mathbb{C}}^2(X).$$

Demostración. Sea $c_1[L, \nabla] = [-\omega, g]$, donde $\omega = (\omega_i)$ y ω_i son las formas locales de la conexión ∇ . Entonces $d_{\bullet}[-\omega, g] = (-d\omega_i) = -d\omega$ es la 2-forma compleja sobre X cuya restricción a un abierto U_i es $-d\omega_i$, o sea $d_{\bullet}c_1[L, \nabla] = -\theta$. Q.E.D.

Notar que se tiene bien definido un homomorfismo $\text{Pic}^{\infty}(X, \omega) \rightarrow H^2(X; \mathbb{C})$ que mapea la clase de isomorfismo $[L, \nabla]$ a la clase de cohomología de la curvatura de ∇ .

Teorema 3.5.8 (Weil, Kostant). *Sea θ la curvatura del fibrado de línea L con conexión ω . Entonces la clase de cohomología $[\theta] \in H^2(X; \mathbb{C})$ es la imagen de $-c_1(L)$ vía la composición*

$$\check{H}^2(X; \underline{\mathbb{Z}}(1)) \rightarrow \check{H}^2(X; \underline{\mathbb{C}}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{C}), \quad (3.13)$$

donde el segundo homomorfismo es el isomorfismo entre las cohomologías de Čech y de Rham.

Demostración. Sean $g = (g_{ij})$ y $\omega = (\omega_i)$ como en el teorema 3.4.3 y sea $\mu = (\mu_{ijk})$ el 2-cociclo de Čech a valores en $\underline{\mathbb{Z}}(1)$ que representa a $c_1(L)$, es decir

$$\mu_{ijk} = \log g_{jk} - \log g_{ik} + \log g_{ij}.$$

Entonces, como muestra un cálculo directo, $\alpha := (2\pi i\omega, -2\pi i \log g, -2\pi i\mu)$, donde $\log g = (\log g_{ij})$, es un 2-cociclo de Čech a valores en el complejo de Deligne $\mathbb{R}(2)_{\mathbb{D}}^{\infty}$.

Consideremos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \text{Pic}^{\infty}(X, \omega) & \xrightarrow{\pi} & \text{Pic}^{\infty}(X) & & \\ \downarrow & & \downarrow c_1 & & \\ H^2(X; \mathbb{C}) & \xleftarrow{\cong} & \check{H}^2(X; \underline{\mathbb{C}}) & \xleftarrow{\quad} & \check{H}^2(X; \underline{\mathbb{Z}}(1)) \\ & \swarrow & \uparrow & \nwarrow 2\pi i & \\ & & \check{H}^2(X; \underline{\mathbb{R}}(2)) & & \end{array}$$

donde la aplicación $2\pi i$ es la multiplicación por esta constante y el homomorfismo $\check{H}^2(X; \underline{\mathbb{R}}(2)) \rightarrow H^2(X; \mathbb{C})$ es el del teorema 3.3.9.

Ahora bien, nuevamente por el teorema 3.3.9, la clase $\pi_{\bullet}[\alpha]$ se corresponde con la clase de cohomología en grado 2 de la curvatura de la conexión ∇ , ya que $\theta|_{U_i} = d\omega_i = (-1)^2 d\omega_i$; es decir, la imagen de $\pi_{\bullet}[\alpha]$ por la composición

$$\check{H}^2(X; \underline{\mathbb{R}}(2)) \rightarrow \check{H}^2(X; \underline{\mathbb{C}}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{C}),$$

donde el primer homomorfismo es el inducido por la inclusión, es precisamente $[\theta]$. Q.E.D.

Antes de probar el resultado recíproco al anterior, veamos una definición y algunas consecuencias de ella.

Definición 3.5.9. Una 2-forma cerrada $\theta \in \Omega_{\mathbb{C}}^2(X)$ se dice que es *entera* si su clase de cohomología $[\theta] \in H^2(X; \mathbb{C})$ está en la imagen de la composición (3.13).

El siguiente lema caracteriza las 2-formas enteras.

Lema 3.5.10. Una forma $\theta \in \Omega_{\mathbb{C}}^2(X)$ es entera si y solo si existe un buen cubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de X , formas $\omega_i \in \Omega_{\mathbb{C}}^1(U_i)$ ($i \in I$) y aplicaciones suaves $f_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}$ ($i, j \in I$) tales que, para cada $i, j \in I$,

1. $\theta = d\omega_i$ en U_i ,
2. $\omega_i - \omega_j = df_{ij}$ en U_{ij} y
3. $f_{ij} + f_{jk} - f_{ik} =: a_{ijk} \in \mathbb{Z}(1)$ en U_{ijk} .

Demostración. Dados el cubrimiento \mathfrak{U} , las 1-formas $(\omega_i)_{i \in I}$ y las aplicaciones $(f_{ij})_{i, j \in I}$ como en el enunciado, entonces (a_{ijk}) resulta un 2-cociclo de Čech a valores en $\mathbb{Z}(1)$ que se corresponde con $[\theta]$ vía el homomorfismo inducido por la inclusión $\check{H}^2(X; \mathbb{Z}(1)) \rightarrow \check{H}^2(X; \mathbb{C})$ y el isomorfismo entre las cohomologías de Čech y de Rham.

Si ahora θ es entera, sea $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un cubrimiento y (a_{ijk}) un 2-cociclo de Čech a valores en $\mathbb{Z}(1)$ tal que $[(a_{ijk})] \mapsto [\theta]$ vía el homomorfismo (3.13). Refinando si fuera necesario, podemos considerar a \mathfrak{U} como un buen cubrimiento, de donde se deduce la existencia de las formas $(\omega_i)_{i \in I}$ y de las aplicaciones $(f_{ij})_{i, j \in I}$, siguiendo nuevamente el desarrollo para llegar al isomorfismo entre las cohomologías de Čech y de Rham. Q.E.D.

Teorema 3.5.11 (Weil, Kostant). Si $\theta \in \Omega_{\mathbb{C}}^2(X)$ es una 2-forma entera, entonces existe un fibrado de línea sobre X con conexión cuya curvatura es θ .

Demostración. Siendo θ entera, podemos considerar un cubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$, 1-formas $(\omega_i)_{i \in I}$ y aplicaciones $(f_{ij})_{i, j \in I}$ como en el lema anterior. Sean entonces $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}^*$ las aplicaciones

$$g_{ij} = e^{f_{ij}}.$$

Un cálculo directo muestra que $g_{ik} = g_{ij}g_{jk}$ y $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$, y luego, por lo visto en la sección 2.4, existe un fibrado de línea L sobre X tal que

1. $L|_{U_i}$ es trivial y
2. las funciones g_{ij} , para $i, j \in I$, son cociclos de L .

Llamemos ε a la composición (3.13). Entonces, recordando la definición del 2-cociclo μ que representa a la clase de Chern $c_1(L)$ y por construcción de los cociclos g_{ij} , se verifica la identidad

$$\varepsilon(c_1(L)) = [\theta].$$

Sea ahora L' otro fibrado de línea sobre X tal que $\varepsilon(c_1(L')) = [\theta]$. Veamos entonces que $[L] = [L'] \in \text{Pic}^\infty(X)$.

Supongamos que g'_{ij} , para $i, j \in I$, son los cociclos para L' asociados al cubrimiento \mathfrak{U} y

$$f'_{ij} = \log g'_{ij}.$$

Entonces, para cada par de índices $i, j \in I$, existen constantes $r_{ij} \in \mathbb{Z}(1)$ tales que $f'_{ij} = f_{ij} + r_{ij}$.

Sea $a = (a_{ijk})$ y $a' = (a'_{ijk})$, donde cada a'_{ijk} se define en forma análoga a como se definieron las aplicaciones a_{ijk} . Tenemos entonces que, para cada $i, j, k \in I$, existen constantes $r_{ijk} \in \mathbb{Z}(1)$ tales que

$$a'_{ijk} - a_{ijk} = r_{ijk}.$$

Luego, las constantes $r_{ijk} = r_{ij} + r_{jk} - r_{ik}$ forman un 2-coborde de Čech a valores en $\underline{\mathbb{Z}}(1)$ y entonces

$$[a] = [a'],$$

y por lo tanto $c_1(L) = c_1(L')$ ya que a y a' representan a las clases de Chern de L y L' respectivamente, es decir, $a = \mu$ y $a' = \mu'$.

Ahora bien, en U_{ij} vale la identidad $\omega_i - \omega_j = df_{ij}$, o sea

$$\omega_i = \omega_j + \frac{dg_{ij}}{g_{ij}},$$

y luego, por la proposición 3.2.5, las formas $(\omega_i)_{i \in I}$ definen una conexión ∇ en L y, siendo $d\omega_i = \theta|_{U_i}$ para cada i , θ resulta ser la curvatura de ∇ . Q.E.D.

Capítulo 4

Cohomología en Grado 3.

El objetivo en este capítulo es llegar a una caracterización geométrica del grupo de cohomología $\check{H}^3(X; \mathbb{Z}(1))$. En lugar de fibrados de línea, ó, equivalentemente \mathbb{C}^* -fibrados principales sobre X , en este caso se considerarán G -fibrados principales sobre X para otro grupo de Lie G . En analogía con el capítulo anterior, se relacionarán los conjuntos de clases de isomorfismo de G -fibrados principales sobre X con y sin conexión, con la cohomología en grado 3 de X .

4.1. Cohomología No Abeliana.

Así como los cociclos de un fibrado de línea permiten construir clases de cohomología, podemos preguntarnos que pasa en general, al considerar un G -fibrado principal. Estos fibrado también tienen cociclos que verifican relaciones análogas a las de los cociclos de fibrados de línea; la diferencia sustancial en este caso es que los cociclos son funciones a valores en un grupo de Lie G , que no necesariamente es conmutativo. Para la teoría desarrollada en el capítulo anterior, el grupo de Lie en cuestión era \mathbb{C}^* . En consecuencia, no se abandonó nunca el contexto abeliano; el haz de coeficientes que considerábamos era \mathbb{C}_X^* , con el que no hay ningún problema a la hora de usar los métodos del álgebra homológica.

Tratando de traducir lo anterior al caso de un G -fibrado principal, nos encontramos con el haz G_X , para G un grupo no necesariamente abeliano. Al tratar en este caso de construir el complejo $C^\bullet(\mathfrak{U}; G_X)$, la no conmutatividad de G impide trabajar como en el caso abeliano. Por ejemplo, para probar que $\delta^2 = 0$ se usa fuertemente la conmutatividad en las cocadenas.

En esta sección se definirá, para G un grupo de Lie, el primer conjunto de cohomología $\check{H}^1(X; G_X)$; la idea de la definición está basada fundamentalmente en las relaciones entre los cociclos de los G -fibrados principales. La estructura de grupo en este primer conjunto de cohomología, lejos de ser canónica, vendrá inducida por el grupo $\check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*)$. Pero si el grupo G es abeliano, el conjunto $\check{H}^1(X; G_X)$ es en efecto el primer grupo de cohomología de Čech, definido anteriormente.

El lector interesado en profundizar sobre el álgebra homológica no conmutativa puede consultar por ejemplo [Gro55], [Gir71] y [Gro57].

En primer lugar, y tomando como ejemplo el caso abeliano, se definen las 1-cocadenas de Čech a valores en un haz de grupos. Como antes, sea $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$

un cubrimiento del espacio X y $F : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{G}$ un haz de grupos.

Definición 4.1.1. Un 1-cociclo de Čech ω a valores en F es una familia $(\omega_{ij}) \in \prod_{(i,j) \in I^2} F(U_{ij})$ tal que

$$\rho_{U_{ik}U_{ijk}}(\omega_{ik}) = \rho_{U_{ij}U_{ijk}}(\omega_{ij})\rho_{U_{jk}U_{ijk}}(\omega_{jk})$$

en $F(U_{ijk})$.

La igualdad anterior, por simplicidad, se notará simplemente $\omega_{ik} = \omega_{ij}\omega_{jk}$. Dos 1-cociclos $\omega = (\omega_{ij})$, $\omega' = (\omega'_{ij})$ se dicen *cohomólogos*, notado $\omega \sim \omega'$ si y solo si existe una familia $h = (h_i) \in \prod_{i \in I} F(U_i)$ tal que $\omega'_{ij} = \rho_{U_iU_{ij}}(h_i^{-1})\omega_{ij}\rho_{U_jU_{ij}}(h_j)$ en $F(U_{ij})$, ó, en forma abreviada,

$$\omega'_{ij} = h_i^{-1}\omega_{ij}h_j.$$

Considerando el producto usual en el grupo $\prod_{(i,j) \in I^2} F(U_{ij})$, esto es, $(\omega_{ij})(\omega'_{ij}) = (\omega_{ij}\omega'_{ij})$, supongamos que, dado un 1-cociclo $\omega = (\omega_{ij})$, existe un elemento $\omega' = (\omega'_{ij}) \in \prod_{(i,j) \in I^2} F(U_{ij})$ tal que $\omega\omega' = 1$. En ese caso, necesariamente debe valer que $\omega'_{ij} = \omega_{ij}^{-1}$. Si además ω' es un 1-cociclo, entonces se debe verificar la igualdad $\omega_{ik}^{-1} = \omega_{ij}^{-1}\omega_{jk}^{-1}$. Así, $1 = \omega_{ik}\omega_{ik}^{-1} = \omega_{ij}\omega_{jk}\omega_{ij}^{-1}\omega_{jk}^{-1}$, o sea

$$\omega_{ij}\omega_{jk} = \omega_{jk}\omega_{ij},$$

lo cual no es cierto en este caso, considerando el haz F . Luego, el conjunto de 1-cocadenas, que se notará $C^1(\mathfrak{U}; F)$, no tiene estructura de grupo. Es simplemente un conjunto, con un elemento distinguido, a saber, la familia 1, que en la coordenada correspondiente al par (i, j) tiene al neutro del grupo $F(U_{ij})$.

Definición 4.1.2. Se define el *primer conjunto de cohomología* del cubrimiento \mathfrak{U} con coeficientes en el (pre)haz F como

$$H^1(\mathfrak{U}; F) = C^1(\mathfrak{U}; F) / \sim .$$

Tomando refinamientos, se define el *primer conjunto de cohomología de Čech* de X con coeficientes en el (pre)haz F por

$$\check{H}^1(X; F) = \text{colim}_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}; F).$$

La sucesión del siguiente resultado es la análoga a la sucesión exacta de cohomología para el caso abeliano. La demostración se puede ver en [Gro55].

Teorema 4.1.3. Sean F, F', F'' haces de grupos sobre el espacio X y $1 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 1$ una sucesión exacta central (esto es, para cada U , $F'(U)$ está contenido en el centro del grupo $F(U)$)¹. Queda entonces inducida una sucesión exacta de conjuntos con punto base

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \check{H}^0(X; F') \rightarrow \check{H}^0(X; F) \rightarrow \check{H}^0(X; F'') \xrightarrow{\delta^0} \\ \check{H}^1(X; F') \rightarrow \check{H}^1(X; F) \rightarrow \check{H}^1(X; F'') \xrightarrow{\delta^1} \check{H}^2(X; F'). \end{aligned}$$

¹En particular, F' resulta un haz de grupos abelianos.

Veamos como se definen las aplicaciones δ^0 y δ^1 . Llamemos π al morfismo de haces sobreyectivo $F \rightarrow F''$.

Para δ^0 , sea $\omega'' \in F''(X)$. Por 1.1.54 podemos considerar un cubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de X con la propiedad siguiente: para cada $i \in I$, existe $\omega_i \in F(U_i)$ tal que, llamando π_i a π_{U_i} , verifica que

$$\pi_i(\omega_i) = \omega''|_{U_i}.$$

En U_{ij} consideremos la expresión $\omega_i^{-1}\omega_j$. Al ser F'' un haz y π compatible con las restricciones, $\pi_{ij}(\omega_i^{-1}\omega_j) = 1$; entonces $\omega_i^{-1}\omega_j$ se puede considerar como un elemento $\omega'_{ij} \in F'(U_{ij})$. Además

$$\omega'_{ij}\omega'_{jk} = \omega_i^{-1}\omega_j\omega_j^{-1}\omega_k = \omega'_{ik}$$

en U_{ijk} . Es decir, $\omega' = (\omega'_{ij})$ es un 1-cociclo de Čech a valores en F' , y su clase de cohomología es independiente del cubrimiento ni de $\omega = (\omega_i)$. Entonces definimos

$$\delta^0(\omega'') = [\omega'] \in \check{H}^1(X; F').$$

Para δ^1 es análogo, partiendo de 1-cociclos. Sea $\omega'' = (\omega''_{ij})$ un 1 cociclo de Čech del cubrimiento \mathfrak{U} a valores en F'' y tal que, para $i, j \in I$, $\pi_{ij}(\omega_{ij}) = \omega''_{ij}$, con $\omega_{ij} \in F(U_{ij})$. Ahora, análogamente al caso anterior, consideramos

$$\omega'_{ijk} = \omega_{ik}^{-1}\omega_{ij}\omega_{jk}.$$

Entonces $\omega' = (\omega'_{ijk})$ es un 2-cociclo de Čech a valores en F' . Se define entonces

$$\delta^1[\omega''] = [\omega'].$$

A pesar de no gozar de la misma estructura que la cohomología usual con coeficientes en un haz de grupos abelianos, el primer conjunto de cohomología se comporta de la misma forma en lo que a haces suaves se refiere.

Proposición 4.1.4. *Sea F un haz suave de grupos sobre el espacio X . Entonces $\check{H}^1(X; F) = 1$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X y $\omega = (\omega_{ij})$ un 1-cociclo de Čech del cubrimiento \mathfrak{U} a valores en F . Siendo X paracompacto podemos asumir que \mathfrak{U} es localmente finito y también que existe un subcubrimiento $\mathfrak{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ de \mathfrak{U} tal que $\bar{V}_i \subset U_i$ para cada $i \in I$. Si i_0, \dots, i_k son elementos de I , notamos $\bar{V}_{i_0 \dots i_k}$ a la intersección $\bar{V}_{i_0} \cap \dots \cap \bar{V}_{i_k}$.

Consideremos ahora el conjunto parcialmente ordenado

$$\mathscr{U} = \{(J, \tau) \mid J \subset I, \tau = (\tau_i)_{i \in J} \text{ con } \tau_i \in F(\bar{V}_i) \text{ y } \omega_{ij}|_{\bar{V}_{ij}} = \tau_i\tau_j^{-1}\},$$

donde el orden parcial viene dado por: $(J, \tau) < (J', \tau')$ si y solo si $J \subset J'$ y $\tau_i = \tau'_i$ para cada $i \in J$. Este conjunto \mathscr{U} no es vacío, puesto que para cada $i \in I$, el par $(\{i\}, \tau_i)$ está en \mathscr{U} .

Sea ahora \mathscr{C} una cadena en \mathscr{U} y (J^0, τ^0) el par dado por $J^0 = \bigcup_{(J, \tau) \in \mathscr{C}} (J, \tau)$ y $\tau_i^0 = \tau_i$ para $\tau = (\tau_i)_{i \in J}$ tal que $(J, \tau) \in \mathscr{C}$. Al ser \mathscr{C} una cadena, (J^0, τ^0) está en

\mathcal{U} y es una cota superior para \mathcal{C} . Luego, por el lema de Zorn, \mathcal{U} tiene un elemento maximal. Llamemos (J, τ) a este elemento y veamos que $J = I$.

Suponiendo lo contrario, sea $i \in I - J$ y consideremos el conjunto

$$K = \bar{V}_i \cap \left(\bigcup_{j \in J} \bar{V}_j \right) = \bigcup_{j \in J} \bar{V}_{ij}.$$

Como \mathcal{U} es localmente finito, entonces K resulta cerrado.² Para cada $j \in J$ definimos

$$\nu_j = \omega_{ij} \tau_j \in F(\bar{V}_{ij}).$$

Luego, si $j, k \in J$ valen las identidades

$$\nu_k = \omega_{ik} \tau_k = \omega_{ij} \omega_{jk} \tau_k = \omega_{ij} \tau_j = \nu_j.$$

Entonces, por el corolario 1.1.68, estas secciones se pegan para obtener una sección τ sobre K .

Como F es suave, el haz $F|_{\bar{V}_i}$ es suave y luego τ se puede extender a \bar{V}_i ; es decir existe $\tau_i \in F(\bar{V}_i)$ tal que $\tau_i|_K = \tau$. Entonces el par $(J \cup \{i\}, (\tau_j)_{j \in J \cup \{i\}})$ contradice la maximalidad de (J, τ) , lo que es absurdo.

Así, para cada par de índices $i, j \in I$, $\omega_{ij} = \tau_i \tau_j^{-1}$ y luego, por definición de la relación de cohomología, $\omega \sim 1$, que era lo que se quería demostrar. Q.E.D.

La demostración del siguiente resultado es muy técnica, y sigue la línea de varias demostraciones dadas anteriormente, usando el lema de Zorn en dos oportunidades. Se puede ver en [Bry92] y [DD63].

Proposición 4.1.5 (Dixmier, Douady). *En la situación del teorema 4.1.3, si F es un haz suave, entonces δ^1 es una biyección.*³

Sea G un grupo de Lie y sea G_X el haz que a cada abierto U de X le asigna el grupo de aplicaciones diferenciables $U \rightarrow G$. La definición del primer conjunto de cohomología hace inmediata la demostración del siguiente

Lema 4.1.6. *El conjunto punteado $\check{H}^1(X; G_X)$ está en biyección con el conjunto de clases de isomorfismo de G -fibrados principales sobre X .*

4.2. Planteo del Problema.

Al igual que se hizo para el grupo $\check{H}^2(X; \mathbb{Z}(1))$, en la sección que sigue buscamos una caracterización geométrica de la cohomología en grado 3 de una variedad suave X . Análogamente al caso en grado 2, en este caso también son fibrados los que permiten llegar a una interpretación geométrica del grupo $\check{H}^3(X; \mathbb{Z}(1))$, solo que esta vez los fibrados a considerar son más complicados que los fibrados de línea.

²Si $\{A_i \mid i \in I\}$ es una familia de subconjuntos de un espacio X localmente finita, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$; ver [Mun75].

³La inyectividad de δ^1 se prueba de la misma manera en que se probó que $\check{H}^1(X; F) = 1$, para F un haz suave.

La idea básica de esta interpretación es establecer un isomorfismo de funtores

$$\check{H}^3(X; \mathbb{Z}(1)) \cong \check{H}^1(X; G_X)$$

para un cierto grupo de Lie conveniente G y usar el lema 4.1.6 para vincular clases de cohomología con fibrados principales.

La construcción del primer conjunto de cohomología no abeliana y los resultados que se desprenden de esta construcción permiten relacionar este conjunto con grupos de cohomología usuales y, al estar este conjunto ligado íntimamente a los fibrados principales, provee un puente entre el álgebra y la geometría. Así, el isomorfismo que buscamos se obtendrá en dos etapas. Por un lado, del grupo $\check{H}^3(X; \mathbb{Z}(1))$ y por otro del conjunto $\check{H}^1(X; G_X)$, para G un grupo de Lie a especificar, para converger por ambos caminos a un grupo de cohomología usual que conecte a estos dos objetos.

Consideremos la sucesión exacta de haces $0 \rightarrow \mathbb{Z}(1) \rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow \mathbb{C}_X^* \rightarrow 0$. Esta sucesión induce una sucesión exacta larga de cohomología

$$\cdots \rightarrow \check{H}^2(X; \mathbb{C}_X) \rightarrow \check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*) \rightarrow \check{H}^3(X; \mathbb{Z}(1)) \rightarrow \check{H}^3(X; \mathbb{C}_X) \rightarrow \cdots,$$

de la cual, al ser $\check{H}^n(X; \mathbb{C}_X) = 0$ para $n \geq 1$ por ser \mathbb{C}_X un haz suave, se obtiene un isomorfismo

$$\check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*) \cong \check{H}^3(X; \mathbb{Z}(1)).$$

El grupo $\check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*)$ es precisamente el puente que permitirá conectar la cohomología en grado 3 y los G -fibrados principales.

Como \mathbb{C}_X^* es un haz de grupos abelianos, esto sugiere considerar la sucesión exacta de cohomología asociada a una sucesión exacta central de haces del tipo $1 \rightarrow \mathbb{C}_X^* \rightarrow F \rightarrow G_X \rightarrow 1$, para F un cierto haz a determinar,

$$\cdots \rightarrow \check{H}^1(X; F) \rightarrow \check{H}^1(X; G_X) \rightarrow \check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*).$$

Supongamos que el haz F resulta ser suave; entonces $\check{H}^1(X; F) = 1$ y este hecho permitirá mostrar que el homomorfismo de conexión

$$\check{H}^1(X; G_X) \rightarrow \check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*)$$

resulta en realidad una biyección. Se obtendrían así isomorfismos de conjuntos

$$\check{H}^1(X; G_X) \cong \check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*) \cong \check{H}^3(X; \mathbb{Z}(1)),$$

los cuales, además de caracterizar geoméricamente a las clases de cohomología en grado 3, permiten definir una estructura de grupo en el conjunto $\check{H}^1(X; G_X)$.

La elección adecuada del grupo de Lie G y del haz F a considerar en este caso fue dada en la introducción.

4.3. Cohomología en Grado 3 y Fibrados Principales.

En esta sección se consideran haces de funciones continuas y no de funciones diferenciables.

El siguiente resultado será de utilidad luego.

Lema 4.3.1. Sea $p : P \rightarrow X$ un G -fibrado principal, $x_0 \in X$ un punto prefijado y sea $i : G \rightarrow P$ la inclusión de G en la fibra P_{x_0} . Entonces, dado un espacio topológico Y , la sucesión de haces de conjuntos y transformaciones naturales

$$1 \rightarrow G_Y \xrightarrow{i_*} P_Y \xrightarrow{p_*} X_Y \rightarrow 1$$

es exacta.

Una sucesión de conjuntos con puntos base

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$$

se dice *exacta* si $g^{-1}(z_0) = f(X)$.

Demostración. Solo hace falta verificar la exactitud en P_y y X_Y , que haremos trabajando con los gérmenes en un punto $y \in Y$.

Para la transformación p_* debemos verificar entonces que $p_{*,y} : P_{Y,y} \rightarrow X_{Y,y}$ es sobreyectiva. Sea V un abierto de Y y $g : V \rightarrow X$ continua. Achicando el abierto V si fuera necesario, podemos suponer que $g(V)$ está contenido en un abierto trivializante U de X . Luego, sobre U , el fibrado P es (isomorfo a) $U \times G$ y podemos considerar a p como la proyección canónica $\pi_1 : U \times G \rightarrow U$. Sea entonces $f : V \rightarrow P|_U$ dada por $f = (g, \text{cte}_1)$. Esta función f es un levantamiento de g a P :

$$\begin{array}{ccc} & P|_U \cong U \times G & \\ & \nearrow f & \downarrow \pi_1 \\ V & \xrightarrow{g} & U, \end{array}$$

y además, al conmutar el diagrama, verifica que $p_*(f) = pf = g$ sobre V . Luego, p_* es un epimorfismo.

Para la exactitud en P_Y se debe verificar que, para cada $y \in Y$, los subconjuntos

$$p_{*,y}^{-1}((\text{cte}_{x_0})_y), \text{im } i_{*,y} \subset P_{Y,y}$$

coinciden (recordar que, dados espacios X, Y y $f : U \subset Y \rightarrow X$, el símbolo f_y indicaba el germen de f en y , es decir, f_y es la imagen de f vía la proyección canónica $X_Y(U) \rightarrow X_{Y,y}$). Pero esto es inmediato: si $f : V \rightarrow G$ es continua, entonces

$$p_{*,y} i_{*,y}(f_y) = (\text{cte}_{x_0})_y$$

ya que $i : G \subset P_{x_0}$. Si ahora $f : V \rightarrow P$ es tal que $f_y \in p_{*,y}^{-1}((\text{cte}_{x_0})_y)$, basta definir $g : V \rightarrow G$ como $g = i^{-1}f$ y luego $i_{*,y}(g_y) = f_y$. Q.E.D.

Así, gracias al lema anterior, la sucesión de haces y transformaciones naturales

$$1 \rightarrow S_X^1 \rightarrow U(H)_X \rightarrow \mathbb{P}U(H)_X \rightarrow 1,$$

inducida por la sucesión (1.9), es exacta.

El haz suave al que se hacía referencia en el planteo del problema resulta ser $U(H)_X$, como muestra el siguiente corolario de 1.3.5.

Corolario 4.3.2. *El haz $U(H)_X$ es suave.*

Demostración. La demostración es una copia de la dada en el ejemplo 1.1.75 para el haz \mathbb{C}_X . Sea $K \subset X$ un subespacio cerrado y sea $f_K \in U(H)_X(K)$. Por definición, existe un abierto U de X y una función continua $f : U \rightarrow U(H)$ que extiende a f_K ; es decir $f : U \rightarrow U(H)$ es continua, $K \subset U$ y f proyecta a f_K vía la proyección canónica al colímite $U(H)(U) \rightarrow U(H)(K)$. Siendo X paracompacto, existe una vecindad V de K tal que $\overline{V} \subset U$ y, como $U(H)$ es contráctil, tenemos también una homotopía $\Phi : U(H) \times I \rightarrow U(H)$, con $I = [0, 1]$, tal que $\Phi(A, 1) = A$ y $\Phi(A, 0) = \text{id}_H$; ver el lema 1.3.5. Sea ahora $h : X \rightarrow I$ una función continua con soporte en U y tal que $h(x) = 1$ para $x \in V$ y consideremos la aplicación continua $\varphi : U \rightarrow U(H)$ definida por

$$\varphi(x) = \Phi(f(x), h(x)).$$

Claramente, para $x \in V$, $\varphi(x) = f(x) \in U(H)$; la extensión buscada se obtiene entonces definiendo la aplicación $\overline{\varphi} : X \rightarrow U(H)$ por

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in U; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Q.E.D.

Luego, el primer conjunto de cohomología de X con coeficientes en $U(H)_X$ tiene un único elemento y mas aún, por 4.1.5, $\delta^1 : \check{H}^1(X; \mathbb{P}U(H)_X) \rightarrow \check{H}^2(X; S_X^1)$ resulta una biyección.

Proposición 4.3.3. *La inclusión $S^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$ induce un isomorfismo de grupos $\check{H}^2(X; S_X^1) \rightarrow \check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*)$.*

Demostración. La proyección $p : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$, donde \mathbb{R}^+ indica el grupo de los números reales positivos, define un S^1 -fibrado principal. Luego, por el lema anterior, la sucesión de haces y transformaciones naturales

$$1 \rightarrow S_X^1 \rightarrow \mathbb{C}_X^* \rightarrow \mathbb{R}_X^+ \rightarrow 1$$

es exacta. Consideremos entonces la sucesión exacta larga de cohomología

$$\cdots \rightarrow \check{H}^1(X; \mathbb{R}_X^+) \rightarrow \check{H}^2(X; S_X^1) \rightarrow \check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*) \rightarrow \check{H}^2(X; \mathbb{R}_X^+) \rightarrow \cdots$$

Al ser \mathbb{R}^+ contráctil, una demostración similar a la del corolario anterior muestra que el haz de funciones \mathbb{R}_X^+ es suave; luego $\check{H}^n(X; \mathbb{R}_X^+) = 0$ para $n \geq 1$, de donde se desprende el resultado que buscábamos probar. Q.E.D.

Combinando estos resultados con el isomorfismo $\check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*) \rightarrow \check{H}^3(X; \mathbb{Z}(1))$ obtenido a partir de la sucesión exacta larga de cohomología inducida por la sucesión exponencial, se obtiene el

Teorema 4.3.4 (Dixmier, Douady). *Para un espacio de Hilbert separable H se tiene una biyección canónica*

$$\check{H}^1(X; \mathbb{P}U(H)_X) \cong \check{H}^3(X; \mathbb{Z}(1)).$$

Llegamos así a la descripción geométrica del grupo $\check{H}^3(X; \underline{\mathbb{Z}}(1))$ que estabamos buscando: clases de cohomología en $\check{H}^3(X; \underline{\mathbb{Z}}(1))$ se corresponden con clases de isomorfismo de $\mathbb{P}U(H)$ -fibrados principales.

Otra forma de llegar a este resultado es considerando el grupo $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(H)$ de automorfismos (no necesariamente isométricos) de un espacio de Hilbert complejo H ; el centro de este grupo está formado por todos los operadores escalares no nulos, esto es \mathbb{C}^* , y, al ser $U(H)$ contráctil, $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(H)$ también resulta contráctil, gracias a la identidad

$$\text{Aut}_{\mathbb{C}}(H) = U(H) \times \{ \text{métricas de } H \}.$$

Este enfoque proviene de considerar el álgebra de Lie $\text{End}_{\mathbb{C}}(H)$ se endomorfismos de H . Llamemos A a éste álgebra y notemos con $Z(A)$ a su centro, es decir, los elementos de A que conmutan con todos los operadores de A , y con A^* al grupo de unidades de A . Se obtiene así una sucesión exacta

$$1 \rightarrow Z(A)^* \rightarrow A^* \rightarrow A^*/Z(A)^* \rightarrow 1.$$

Como el centro de A es precisamente \mathbb{C} , se obtiene así la sucesión exacta

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(H) \rightarrow \text{Aut}(H)/\mathbb{C}^* \rightarrow 1,$$

y, siendo $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(H)$ contráctil y $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(H)/\mathbb{C}^*$ isomorfo al grupo de automorfismos proyectivos de H , podemos llegar de esta manera a las mismas conclusiones.⁴

4.3.1. La estructura de Grupo en $\check{H}^1(X; \mathbb{P}U(H)_X)$.

Gracias a la biyección del teorema 4.3.4, el conjunto $\check{H}^1(X; \mathbb{P}U(H)_X)$ adquiere una estructura de grupo, a partir de la de $\check{H}^3(X; \underline{\mathbb{Z}}(1))$. A continuación vamos a describir explícitamente dicha estructura.

Siendo H un espacio de Hilbert separable, el producto tensorial $H \otimes H$ también lo es. Luego, como todos los espacios de Hilbert separables son isomorfos entre sí, fijemos un isomorfismo isométrico $\pi : H \otimes H \rightarrow H$. Esta aplicación induce un homomorfismo de álgebras $\bar{\pi} : \text{End}_{\mathbb{C}}(H) \times \text{End}_{\mathbb{C}}(H) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(H)$ dado por

$$\bar{\pi}(A, B) = \pi(A \otimes B)\pi^{-1} : H \rightarrow H.$$

Ahora bien, si A y B son isomorfismos, también lo es $A \otimes B$ y luego podemos restringir la aplicación $\bar{\pi}$ para obtener un homomorfismo de grupos de Lie $\bar{\pi} : U(H) \times U(H) \rightarrow U(H)$. Y más aun, si $\lambda, \mu \in S^1$ son operadores escalares, entonces $\lambda \otimes \mu$ también lo es, y así $\bar{\pi}(S^1 \times S^1) \subset S^1$. Luego, por definición de $\mathbb{P}U(H)$, obtenemos un homomorfismo de grupos de Lie $\bar{\pi} : \mathbb{P}U(H) \times \mathbb{P}U(H) \rightarrow \mathbb{P}U(H)$ y luego una aplicación en la cohomología

$$\check{H}^1(X; \mathbb{P}U(H)_X) \times \check{H}^1(X; \mathbb{P}U(H)_X) \rightarrow \check{H}^1(X; \mathbb{P}U(H)_X),$$

que notamos \otimes .

⁴Este enfoque se utilizará en la siguiente sección, cuando se consideren fibrados con conexiones.

Proposición 4.3.5. *El conjunto $\check{H}^1(X; \mathbb{P}U(H)_X)$ con la operación \otimes es un grupo abeliano y la biyección $\delta^1 : \check{H}^1(X; \mathbb{P}U(H)_X) \rightarrow \check{H}^2(X; S_X^1)$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Sean $g = (g_{ij}), g' = (g'_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}; \mathbb{P}U(H)_X)$ 1-cociclos de Čech. Siendo la proyección $\pi : U(H)_X \rightarrow \mathbb{P}U(H)_X$ un epimorfismo, podemos suponer que para cada par de índices i, j existen aplicaciones continuas $f_{ij} : U_{ij} \rightarrow U(H)$ tales que $\pi_{U_{ij}}(f_{ij}) = g_{ij}$ y lo mismo para cada g'_{ij} con f'_{ij} . Entonces, los 2-cociclos $h_{ijk} = f_{ik}^{-1} f_{ij} f_{jk}$ y $h'_{ijk} = f'_{ik}{}^{-1} f'_{ij} f'_{jk}$ representan, respectivamente, las clases de cohomología $\delta^1[g]$ y $\delta^1[g']$. Y por definición, el producto tensorial de estas clases en $\check{H}^1(X; \mathbb{P}U(H)_X)$ está representado por la 1-cocadena $f \otimes f' = (f_{ij} \otimes f'_{ij})$. Recordando que, si A, A', B, B' son operadores, $(A \otimes B)(A' \otimes B') = AA' \otimes BB'$, y entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} (\delta^1([g] \otimes [g']))_{ijk} &= (f_{ik} \otimes f'_{ik})^{-1} (f_{ij} \otimes f'_{ij}) (f_{jk} \otimes f'_{jk}) \\ &= f_{ik}^{-1} f_{ij} f_{jk} \otimes f'_{ik}{}^{-1} f'_{ij} f'_{jk} \\ &= h_{ijk} \otimes h'_{ijk} \\ &= h_{ijk} h'_{ijk} \\ &= \delta^1[g] \otimes \delta^1[g'], \end{aligned}$$

donde la primer y última igualdad son módulo cobordes.

Q.E.D.

4.4. Conexiones y Curvatura.

Así como para la caracterización geométrica de la cohomología en grado 2 hicimos uso de fibrados de línea ó \mathbb{C}^* -fibrados principales basándonos en la sucesión exponencial, si quisieramos partir de la misma idea para este caso, deberíamos considerar, como en la sección anterior, $\mathbb{P}U(H)$ -fibrados principales, donde $\mathbb{P}U(H)$ es el grupo de automorfismos proyectivos de un espacio de Hilbert separable H . Pero este es un grupo de Lie de dimensión infinita para el cual no se puede desarrollar un teoría adecuada como la que necesitamos para definir conexiones. Esto hace que la sucesión exacta

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(H) \rightarrow \mathbb{P}U(H) \rightarrow 1$$

no sea de utilidad en este caso. En general, el problema con estos grupos es el pasaje del álgebra de Lie al grupo de Lie; por ejemplo, en este caso, los subgrupos uniparamétricos usuales no son diferenciables (resultan ser operadores no acotados).

Una alternativa, motivada, entre otras cosas, por construcciones de teoría de cuerdas, es considerar el espacio de Fréchet $C^\infty(S^1, \mathbb{C})$, en lugar de usar un espacio de Hilbert H . Llamemos entonces L^∞ al álgebra de Lie de endomorfismos de $C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ y, como se hizo con el álgebra $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(H)$, consideremos en este caso el grupo de unidades $(L^\infty)^*$. Pero aquí nos encontramos con otro problema: este grupo no es abierto en L^∞ , y no queda entonces claro si podremos darle una estructura de grupo de Lie a $(L^\infty)^*$.

Sin embargo desarrollos motivados por la misma teoría de cuerdas muestra que hay grupos y sucesiones exactas que los involucran tales que a nivel de las sucesiones de álgebras de Lie se parecen⁵ a la sucesión

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow L^\infty \rightarrow L^\infty/\mathbb{C} \rightarrow 0$$

y para los cuales se puede desarrollar una teoría satisfactoria de fibrados principales.

Consideraremos entonces la siguiente situación: supongamos dada una sucesión central de grupos de Lie

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

y una acción lineal de \tilde{G} en el grupo $C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ tal que, si $a \in \mathbb{C}^* \subset \tilde{G}$, dicha acción es multiplicar por el escalar a . Esto da como resultado un morfismo de sucesiones exactas centrales de álgebras de Lie

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{g}} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & L^\infty & \longrightarrow & L^\infty/\mathbb{C} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Ejemplos de tales G y \tilde{G} incluyen

1. $G = \mathcal{L}U(n)$, el grupo de lazos libres diferenciables del grupo unitario. En [PS86] se construye una extensión central \tilde{G} de dicho grupo.
2. \tilde{G} el grupo de Heisenberg; para más detalles, ver [Bry92].⁶

Al igual que para los fibrados de línea, en esta sección estudiaremos G -fibrados principales dotados de una conexión.⁷

Definición 4.4.1. Sea $P \rightarrow X$ un G -fibrado principal, \mathfrak{g} el álgebra de Lie del grupo G y, para cada $a \in \mathfrak{g}$, $\sigma(a) : P \rightarrow TP$ el campo fundamental. Una *conexión* en $P \rightarrow X$ es una 1-forma ω en P a valores en \mathfrak{g} que verifica:

1. $\omega(\sigma(a))(e) = a$ para todo $e \in P$ y
2. $\omega_{e.g}((dR_g)_e(\xi(e))) = \text{Ad}(g^{-1})(\omega_e(\xi(e)))$ para cada $g \in G$ y $\xi \in \Gamma(TP)$.

⁵Cuando hablamos de parecer nos referimos a que existe un morfismo entre las sucesiones exactas que consideramos.

⁶En ambos casos, se tiene en realidad una extensión central del grupo de Lie G por S^1 ; el grupo \tilde{G} se considera entonces como la extensión central asociada de G por \mathbb{C}^* .

⁷Los fibrados principales, grupos y álgebras de Lie que se consideran en esta sección son algunos de dimensión infinita; justificar todas las construcciones que se hacen, análogas a las que se usaron en los capítulos anteriores, como por ejemplo los espacios tangentes, la representación adjunta, los fibrados vectoriales, las formas de conexión y curvatura, etc, extendería el texto considerablemente. Una referencia en la que se puede consultar la validez de los desarrollos en dimensión infinita utilizados en esta sección es [KM91].

La ecuación del ítem 1 de la definición anterior se abrevia usualmente $\omega(a^*) = a$, donde $a^* = \sigma(a)$ y la del ítem 2, $R_g^*\omega = \text{Ad}(g^{-1})\omega$.

Una forma de encarar el problema, y así lo haremos, es considerar una caracterización equivalente del problema considerado en grado 2, adaptado a este caso. Más específicamente, vamos a construir clases de cohomología a partir de levantamientos de un cierto fibrado principal, en lugar de construir estas clases vía cociclos y formas locales.⁸

Para eso, sea $p : P \rightarrow X$ un G -fibrado principal con conexión ω y supongamos que tenemos dada una sucesión central de grupos de Lie

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1 \quad (4.1)$$

junto con una acción lineal suave de \tilde{G} en $C^\infty(S^1)$ tal que, si $a \in \mathbb{C}^* \subset \tilde{G}$, entonces $(a.f)(x) = af(x)$. Lo que se quiere es medir la obstrucción a levantar el grupo estructural del fibrado $P \rightarrow X$ al grupo \tilde{G} . Un tal levantamiento es un \tilde{G} -fibrado principal $\tilde{p} : \tilde{P} \rightarrow X$ junto con un isomorfismo de G -fibrados principales sobre X

$$f : \tilde{P}/\mathbb{C}^* \rightarrow P.$$

Este isomorfismo f induce una aplicación $\tilde{P} \rightarrow P$, que también llamaremos f , vía la composición

$$\tilde{P} \xrightarrow{\pi} \tilde{P}/\mathbb{C}^* \xrightarrow{f} P,$$

donde π es la proyección canónica. Esta aplicación verifica que $pf = \tilde{p}$ y, si $\tilde{g} \in \tilde{G}$ y $g \in G$ es la clase de \tilde{g} vía el isomorfismo $\tilde{G}/\mathbb{C}^* \cong G$, entonces

$$f(e.\tilde{g}) = f(e).g$$

Si U es un abierto de la variedad X que trivializa a $P|_U$ vía el difeomorfismo $h : P|_U \rightarrow U \times G$, entonces un tal levantamiento existe, considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P|_U & \\ & \downarrow h & \\ U \times \tilde{G} & \xrightarrow{(\text{id}, \pi)} & U \times G. \end{array}$$

Las conexiones en \tilde{P} que estudiaremos son aquellas compatibles con los conexión ω en P , que pasamos a describir a continuación.

Dada la conexión $\omega \in \Omega_{\mathfrak{g}}^1(P) = \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$, $f^*(\omega)$ resulta una 1-forma sobre \tilde{P} a valores también en el álgebra de Lie de G . Dada ahora una conexión $\tilde{\omega}$ en \tilde{P} , considerando el homomorfismo inducido de álgebras de Lie $\pi_* : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ se obtiene una 1-forma sobre \tilde{P} pero a valores en \mathfrak{g} via la aplicación

$$\text{id} \otimes \pi_* : \Omega^1(\tilde{P}) \otimes \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \Omega^1(\tilde{P}) \otimes \mathfrak{g}.$$

⁸Cabe destacar que la construcción que se dará en este capítulo también se puede hacer para construir clases de cohomología en grado 2.

Definición 4.4.2. Una conexión $\tilde{\omega}$ en el levantamiento \tilde{P} se dice *compatible* con ω si y solo si

$$f^*(\omega) = (\text{id} \otimes \pi_*)(\tilde{\omega}).$$

Observación 6. Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Para cada campo de vectores $\xi \in \mathfrak{g}$, existe un único campo de vectores $\eta \in \mathfrak{h}$ f -relacionado con ξ , esto es, para cada $g \in G$, $df_g(\xi(g)) = \eta(f(g))$. Esto induce entonces un homomorfismo de álgebras de Lie $f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ dado por $f_*(\xi) = \eta$. Es decir, f_* es una transformación lineal tal que $f_*([\xi, \xi']) = [f_*(\xi), f_*(\xi')]$, donde $[\xi, \xi']$ indica el corchete de Lie de los campos ξ y ξ' .

Sea $\tilde{\omega}$ una conexión en el levantamiento \tilde{P} y α una 1-forma compleja sobre X . Consideremos entonces la conexión $\tilde{\omega} + \alpha^*$, y escribamos a α^* como

$$\alpha^* = \sum_i \tau_i \otimes z_i \in \Omega^1(\tilde{P}) \otimes \mathbb{C}.$$

Entonces,

$$(\text{id} \otimes \pi_*)(\alpha^*) = \sum_i \tau_i \otimes \pi_*(z_i).$$

Pero, al ser exacta la sucesión de álgebras de Lie

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi_*} \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

inducida por la sucesión (4.1), entonces $\pi_*(z_i) = 0$ para cada i , lo que prueba que $(\text{id} \otimes \pi_*)(\alpha^*) = 0$. Luego,

$$f^*(\omega) = (\text{id} \otimes \pi_*)(\tilde{\omega}) = (\text{id} \otimes \pi_*)(\tilde{\omega} + \alpha^*),$$

y entonces la conexión $\tilde{\omega} + \alpha^*$ también resulta compatible con ω .

Lema 4.4.3. Sea $\tilde{\omega} \in \Omega_{\mathfrak{g}}^1(\tilde{P})$ una conexión en el levantamiento $\tilde{P} \rightarrow U$ compatible con ω . Entonces toda otra forma de conexión sobre \tilde{P} compatible con ω es de la forma $\tilde{\omega} + \alpha^*$, para $\alpha \in \Omega_{\mathbb{C}}^1(X)$.

Idea de la Demostración. A pesar de que estamos trabajando en dimensión infinita, la idea de la demostración es la misma que para dimensión finita.

Basta ver que, dadas dos formas de conexión $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\omega}'$ compatibles con ω , entonces la diferencia $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$ define unívocamente una 1-forma compleja sobre X .

De la compatibilidad con ω se desprende la identidad

$$(\text{id} \otimes \pi_*)(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') = 0,$$

y luego hace que la forma $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$ se pueda considerar como una forma sobre \tilde{P} pero a valores en \mathbb{C} , ya que $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \tilde{\mathfrak{g}}/\mathbb{C}$.

Por otro lado, por el ítem 1 de la definición de conexión 4.4.1, la forma $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$ se anula en cualquier vector vertical; es decir, es lo que se llama un 1-forma *horizontal*. A partir de esto y de que tanto $\tilde{\omega}$ como $\tilde{\omega}'$ son G -equivariantes, se puede deducir la existencia de la forma compleja buscada. Para mas detalles, consultar [KM91].

Definición 4.4.4. ⁹ La curvatura θ de la conexión ω en un G -fibrado principal $P \rightarrow X$ es la 2-forma en P a valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} definida por

$$\theta = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega],$$

donde $[\omega, \omega]$ es la 2-forma definida por $[\omega, \omega](\xi, \eta)(e) = [\omega(\xi)(e), \omega(\eta)(e)]$.¹⁰ Equivalentemente, θ se define también como

$$\theta(\xi, \eta) = d\omega(\xi^h, \eta^h),$$

donde ξ y η son campos de vectores en P y el supraíndice h indica la componente horizontal.^{11 12}

Nos interesarán solo las curvaturas en el fibrado \tilde{P} compatibles con la curvatura θ de ω , es decir, las curvaturas $\tilde{\theta}$ en \tilde{P} tal que $f^*(\theta) = (\text{id} \otimes \pi_*)(\tilde{\theta})$. Ahora, a partir de la definición de curvatura se puede ver fácilmente que, si $\tilde{\omega}$ es compatible con ω , entonces necesariamente $\tilde{\theta}$ es compatible con θ .

Lema 4.4.5. Si $\tilde{\omega}$ es una conexión en \tilde{P} compatible con ω y con curvatura $\tilde{\theta}$ y α es una 1-forma compleja sobre X , entonces la curvatura de la conexión $\tilde{\omega} + \alpha^*$ es $\tilde{\theta} + d\alpha^*$.

Demostración. Sea $\tilde{\theta}_\alpha$ la curvatura de $\tilde{\omega} + \alpha^*$. Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_\alpha &= d(\tilde{\omega} + \alpha^*) + \frac{1}{2}[\tilde{\omega} + \alpha^*, \tilde{\omega} + \alpha^*] \\ &= \tilde{\theta} + d\alpha^* + [\tilde{\omega}, \alpha^*] + [\alpha^*, \tilde{\omega}] + [\alpha^*, \alpha^*] \\ &= \tilde{\theta} + d\alpha^* \end{aligned}$$

ya que α^* es una forma a valores complejos y \mathbb{C} está en el centro de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Q.E.D.

Hagamos ahora actuar a G en \mathbb{C} vía la representación trivial $\pi_2 : G \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(g, z) \mapsto z,$$

y consideremos también la representación adjunta $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$,

$$\text{Ad}(g, v) = \text{Ad}(g)(v).$$

Lema 4.4.6. La representación adjunta $\text{Ad} : \tilde{G} \times \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ induce una representación lineal $\rho : G \times \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\text{Ad}} & \tilde{\mathfrak{g}} \\ & \searrow (\pi, \text{id}) & \nearrow \rho \\ & G \times \tilde{\mathfrak{g}} & \end{array}$$

donde $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ es el homomorfismo de la sucesión (4.1).

⁹Esta definición es la generalización a fibrados principales arbitrarios de la definición 3.5.5 vista anteriormente.

¹⁰Recordar que el corchete de Lie es el producto que da a \mathfrak{g} la estructura de álgebra.

¹¹El subespacio horizontal en un punto $e \in P$, que notamos H_e , es, como se vió en el capítulo anterior, el núcleo de la aplicación lineal ω_e .

¹²La ecuación $\theta = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ se conoce como la *ecuación de Maurer-Cartan*.

Demostración. Sean \tilde{g} y \tilde{g}' en \tilde{G} tales que sus clases en $G \cong \tilde{G}/\mathbb{C}^*$, que llamamos g y g' respectivamente, coinciden; esto es, $\tilde{g}^{-1}\tilde{g}' \in \mathbb{C}^*$. Veamos entonces que $\text{Ad}(\tilde{g}^{-1}\tilde{g}') : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ es la identidad. Llamemos a al producto $\tilde{g}^{-1}\tilde{g}' \in \mathbb{C}^*$. Entonces $\text{Ad}(a) = (dL_a R_a^{-1})_1$. Sea $\tilde{h} \in \tilde{G}$; luego, $L_a R_a^{-1}(\tilde{h}) = a\tilde{h}a^{-1}$. Pero la sucesión (4.1) es central, y luego a y a^{-1} están en el centro de \tilde{G} , con lo cual

$$a\tilde{h}a^{-1} = \tilde{h},$$

y así $\text{Ad}(a)$ resulta la identidad.

Por esto, definiendo $\rho : G \times \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ por la fórmula

$$\rho(g, \tilde{v}) = \text{Ad}(\tilde{g})(\tilde{v}),$$

queda establecida la representación que se buscaba. Q.E.D.

Queda entonces definida una sucesión exacta de representaciones de G

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi_*} \mathfrak{g} \rightarrow 0,$$

la cual induce una sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre X

$$0 \rightarrow X \times \mathbb{C} \longrightarrow P \times^G \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi_*} P \times^G \mathfrak{g} \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Por simplicidad, si G es un grupo de Lie que actúa linealmente en el espacio vectorial complejo V y P es un G -fibrado principal, notaremos al fibrado vectorial asociado $P \times^G V$ por $V(P, G)$.

Gracias a que la diferencial dR_g preserva subespacios horizontales y a la conmutatividad del operador de diferenciación exterior d con los pullbacks R_g^* , se puede probar que la curvatura θ verifica una ecuación análoga a la del ítem 2 de la definición 4.4.1, es decir, en forma abreviada,

$$R_g^* \theta = \text{Ad}(g^{-1})\theta. \quad (4.3)$$

Dado ahora un campo de vectores ξ sobre X , se puede construir un campo $\tilde{\xi}$ sobre P con la particularidad de ser horizontal, es decir, para cada $e \in P$, $\tilde{\xi}(e) \in H_e$ y tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{\xi}} & TP \\ p \downarrow & & \downarrow dp \\ X & \xrightarrow{\xi} & TX \end{array}$$

conmute; para ver esto, recordemos que para cada $e \in P$, la diferencial $dp_e : TP_e \rightarrow TX_x$, para $p(e) = x$, define, al restringirla al subespacio H_e , un isomorfismo entre H_e y TX_x . Definimos entonces el *levantamiento horizontal* del campo ξ por

$$\tilde{\xi}(e) = (dp_e|_{H_e})^{-1}(\xi(p(e))).$$

Ahora bien, la identidad (4.3) dice precisamente que, para cada par de campos de vectores ξ, η sobre P , la aplicación $\tilde{\theta} : P \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por $\tilde{\theta}(e) = \theta(\xi, \eta)(e)$ es

G -equivariante.¹³ Y luego, por la proposición 2.8.12, es equivalente a una sección del fibrado asociado $\mathfrak{g}(P, G)$.

Definiendo entonces $\widehat{\theta} : \Gamma(TX) \times \Gamma(TX) \rightarrow \Gamma(\mathfrak{g}(P, G))$ por

$$\widehat{\theta}(\xi, \eta) = \theta(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$$

queda definida la forma sobre X a valores en $\mathfrak{g}(P, G)$ que buscábamos.

Para lo que sigue, identificaremos a θ con esta 2-forma $\widehat{\theta}$ y la notaremos directamente θ . La misma consideración para $\widetilde{\theta}$, considerando el fibrado $\widetilde{\mathfrak{g}}(P, \widetilde{G})$.

El siguiente lema es una consecuencia del teorema 29.8 en [KM91].

Lema 4.4.7. *La sucesión (4.2) se escinde.*

Sea ahora $\ell : \widetilde{\mathfrak{g}}(P, \widetilde{G}) \rightarrow X \times \mathbb{C}$ un epimorfismo que escinde a la sucesión (4.2). Componiendo con la proyección canónica, podemos considerar a ℓ como una aplicación suave $\ell : \widetilde{\mathfrak{g}}(P, \widetilde{G}) \rightarrow \mathbb{C}$ que es lineal en las fibras.

Definición 4.4.8. Sea $\widetilde{P} \rightarrow X$ un levantamiento del fibrado $P \rightarrow X$, con conexión $\widetilde{\omega}$ y curvatura $\widetilde{\theta}$ compatibles con la conexión ω en $P \rightarrow X$. La *curvatura escalar* de $\widetilde{\omega}$ es la 2-forma a valores complejos $\ell(\widetilde{\omega})$ definida por la composición

$$X \xrightarrow{\widetilde{\theta}} \Lambda^2(TX) \otimes \widetilde{\mathfrak{g}}(P, \widetilde{G}) \xrightarrow{\text{id} \otimes \ell} \Lambda^2(TX) \otimes \mathbb{C}.$$

La demostración de la siguiente proposición es análoga a la del lema 4.4.5.

Proposición 4.4.9. *En las condiciones de la definición anterior, si α es una 1-forma compleja sobre X , entonces*

$$\ell(\widetilde{\omega} + \alpha^*) = \ell(\widetilde{\omega}) + d\alpha^*.$$

Supongamos ahora que el levantamiento es local; es decir, existe un levantamiento $\widetilde{P}_U \rightarrow U$ del G -fibrado principal $P|_U \rightarrow U$, para U un abierto trivializante de X . Sea $\widetilde{\omega}_U$ una conexión en \widetilde{P}_U compatible con la conexión $\omega|_U$ de $P|_U$. Si V es otro abierto trivializante de X con las mismas propiedades que U y tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces, en $U \cap V$, existe una 1-forma compleja α tal que $\widetilde{\omega}_V = \widetilde{\omega}_U + \alpha^*$ y luego, por la proposición anterior

$$\ell(\widetilde{\omega}_V) = \ell(\widetilde{\omega}_U) + d\alpha^*.$$

En particular, además de que en general las curvaturas escalares no son cerradas, no definen una forma global en X .

A continuación, remediamos este problema.

Proposición 4.4.10. *Sea $p : P \rightarrow X$ un G -fibrado principal con conexión ω y ℓ como antes. Existe una única 3-forma compleja Ω sobre X tal que, para cualquier levantamiento $\widetilde{P} \rightarrow U$ de $P \rightarrow X$ sobre un abierto $U \subset X$ y cualquier conexión $\widetilde{\omega}$ compatible con ω , verifica la identidad*

$$\Omega|_U = d(\ell(\widetilde{\omega}_U)).$$

¹³En este caso particular, una aplicación $f : P \rightarrow \mathfrak{g}$ es G -equivariante si para cada $e \in P$ y cada $g \in G$, $f(e.g) = \text{Ad}(g^{-1})(f(e))$.

Demostración. Se debe verificar que la forma $\Omega|_U$ no depende del levantamiento local considerado ni de la conexión compatible con ω , lo que probaría que Ω está bien definida y es una 3-forma compleja sobre X .

La independencia de la conexión compatible con ω se sigue inmediatamente de la proposición 4.4.9 y del párrafo que le sigue. Por otro lado, si $\tilde{P}' \rightarrow U$ es otro levantamiento local de $P \rightarrow X$, entonces \tilde{P} y \tilde{P}' , siendo \tilde{G} -fibrados principales, son localmente isomorfos. Q.E.D.

Definición 4.4.11. La 3-forma Ω se llama la *3-curvatura* del G -fibrado principal $P \rightarrow X$, equipado con la conexión ω y la aplicación $\ell : \tilde{\mathfrak{g}}(P, \tilde{G}) \rightarrow \mathbb{C}$.

Obtuvimos así una 3-forma cerrada a valores escalares; esta forma es la que nos permitirá relacionar fibrados principales con clases de cohomología de de Rham.

Lo que haremos a continuación es construir clases de cohomología en $\check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*)$ por medio de los levantamientos definidos anteriormente y veremos que relación guardan estas clases con la curvatura escalar. Esta construcción permite pasar del contexto no abeliano en el que veníamos trabajando, esto es, el de los G -fibrados principales, a uno abeliano.

Definimos a continuación la categoría $\mathcal{Lift}(U)$ cuyos objetos son pares (\tilde{P}, f) , donde $\tilde{P} \rightarrow U$ es un \tilde{G} -fibrado principal que levanta al G -fibrado $P|_U \rightarrow U$ y $f : \tilde{P}/\mathbb{C}^* \rightarrow P|_U$ es un isomorfismo de G -fibrados principales y, dados dos pares de objetos (\tilde{P}_1, f_1) y (\tilde{P}_2, f_2) , un morfismo $g : (\tilde{P}_1, f_1) \rightarrow (\tilde{P}_2, f_2)$ es un isomorfismo de \tilde{G} -fibrados principales $g : \tilde{P}_1 \rightarrow \tilde{P}_2$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{P}_1 & \xrightarrow{g} & \tilde{P}_2 \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \tilde{P}_1/\mathbb{C}^* & & \tilde{P}_2/\mathbb{C}^* \\
 & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\
 & P|_U &
 \end{array}$$

Como fue indicado anteriormente, llamaremos directamente f_i a las composiciones $f_i \pi : \tilde{P}_i \rightarrow P|_U$, $i = 1, 2$.

Dado un par (\tilde{P}, f) en $\mathcal{Lift}(U)$, sea $\text{Aut}(\tilde{P}, f)$ el grupo de automorfismos $(\tilde{P}, f) \rightarrow (\tilde{P}, f)$.

Lema 4.4.12. *El grupo $\text{Aut}(\tilde{P}, f)$ es isomorfo a $\mathbb{C}_X^*(U) = C^\infty(U, \mathbb{C}^*)$.*

Demostración. Sea $g : (\tilde{P}, f) \rightarrow (\tilde{P}, f)$ un automorfismo. Siendo \tilde{P} isomorfo al fibrado trivial $U \times \tilde{G}$, g equivale a un difeomorfismo $g : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$. Además, por ser g un automorfismo en $\mathcal{Lift}(U)$, $\pi g = \pi : \tilde{P} \rightarrow \tilde{P}/\mathbb{C}^*$. Luego, para $e \in \tilde{P}_x$, $\pi(g(e)) = \pi(e)$, o sea, existe un número complejo no nulo λ tal que $g(e) = \lambda e$. Si ahora e' es otro elemento de la fibra \tilde{P}_x , entonces existe $g_0 \in \tilde{G}$ tal que $e' = e.g_0$. Luego, por ser g un homomorfismo de fibrados,

$$g(e') = g(e.g_0) = g(e).g_0 = (\lambda e).g_0 = \lambda e'.$$

O sea, λ depende solamente de $x \in U$ y no de los elementos de la fibra \tilde{P}_x . Queda así definida una aplicación diferenciable $\lambda_g : U \rightarrow \mathbb{C}^*$, que verifica

$$g(e) = \lambda_g(\tilde{p}(e))e,$$

donde $\tilde{p} : \tilde{P} \rightarrow U$ es la proyección. Definiendo entonces $\text{Aut}(\tilde{P}, f) \rightarrow \mathbb{C}_X^*(U)$ por

$$g \mapsto \lambda_g$$

se obtiene el isomorfismo buscado. Q.E.D.

Dada una inclusión $V \rightarrow U$ de un abierto de X en otro, queda definido un functor de restricción $\mathcal{L}\mathcal{H}(U) \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{H}(V)$. Vamos a definir un cociclo de Čech por medio de estos funtores de restricción.

Sea $[P]$ la clase del fibrado $P \rightarrow X$ en $\check{H}^1(X, G_X)$ y sea $\delta^1[P]$ la imagen de $[P]$ vía el homomorfismo

$$\delta^1 : \check{H}^1(X; G_X) \rightarrow \check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*).$$

Sea $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un cubrimiento de X tal que, para cada $i \in I$, se tiene un objeto (\tilde{P}_i, f_i) en $\mathcal{L}\mathcal{H}(U_i)$. Supongamos además que, para i, j en I , existe un isomorfismo

$$g_{ij} : (\tilde{P}_j|_{U_{ij}}, f_j) \rightarrow (\tilde{P}_i|_{U_{ij}}, f_i)$$

en la categoría $\mathcal{L}\mathcal{H}(U_{ij})$, que por simplicidad notaremos $g_{ij} : (\tilde{P}_j, f_j) \rightarrow (\tilde{P}_i, f_i)$. Vía los funtores de restricción, queda definido entonces un automorfismo $h_{ijk} = g_{ik}^{-1}g_{ij}g_{jk} : (\tilde{P}_k, f_k) \rightarrow (\tilde{P}_k, f_k)$ en $\mathcal{L}\mathcal{H}(U_{ijk})$ y, por el lema anterior, también una función diferenciable en $\mathbb{C}_X^*(U_{ijk})$, que también llamamos h_{ijk} .

Proposición 4.4.13. *El elemento $h = (h_{ijk}) \in \prod_{(i,j,k) \in I^3} \mathbb{C}_X^*(U_{ijk})$ es un 2-cociclo de Čech cuya clase de cohomología es $\delta^1[P]$.*

Demostración. Por el lema anterior, basta probar la proposición para una elección particular de los isomorfismos g_{ij} , ya que cualquier otro es de la forma $g_{ij} \cdot \alpha_{ij}$ para cierta aplicación $\alpha_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}^*$, y luego, modifica a $h = (h_{ijk})$ por el coborde de $\alpha = (\alpha_{ij})$.

La construcción de la clase de cohomología $[P] \in \check{H}^1(X; G_X)$ se puede hacer también considerando trivializaciones locales

$$t_i : U_i \times G \rightarrow P|_{U_i}.$$

Las aplicaciones $t_{ij} = t_i^{-1}t_j$ definen un automorfismo del G -fibrado principal trivial $U_{ij} \times G$ ó, lo que es lo mismo, una aplicación, que notamos de la misma forma, $t_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ tal que

$$t_{ij}(x, g) = (x, t_{ij}(x)g).$$

Así, (t_{ij}) es un 1-cociclo de Čech que representa a $[P]$. Para calcular $\delta^1[P]$, consideremos la sucesión exacta inducida por la sucesión (4.1)

$$1 \rightarrow \mathbb{C}_X^* \rightarrow \tilde{G}_X \rightarrow G_X \rightarrow 1$$

y sean $\tilde{g}_{ij} : U_{ij} \rightarrow \tilde{G}$ tales que

$$\pi \tilde{g}_{ij} = t_{ij}.$$

Entonces, por construcción de la aplicación δ^1 , un 2-cociclo que representa a $\delta^1[P]$ es $a_{ijk} = \tilde{g}_{ik}^{-1} \tilde{g}_{ij} \tilde{g}_{jk}$.

Ahora bien, achicando el cubrimiento si fuera necesario —para que los fibrados sean triviales sobre los abiertos de dicho cubrimiento—, podemos suponer que cada t_i se levanta a un isomorfismo $\tilde{t}_i : U_i \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{P}_i$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_i \times \tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{t}_i} & \tilde{P}_i \\ (\text{id}, \pi) \downarrow & & \downarrow f_i \\ U_i \times G & \xrightarrow{t_i} & P|_{U_i} \end{array}$$

conmuta.

Definimos ahora el isomorfismo $g_{ij} : \tilde{P}_j|_{U_{ij}} \rightarrow \tilde{P}_i|_{U_{ij}}$ por la fórmula

$$g_{ij} = \tilde{t}_i^{-1} \tilde{g}_{ij} \tilde{t}_j,$$

donde consideramos a \tilde{g}_{ij} como un homomorfismo $\tilde{g}_{ij} : U_{ij} \times \tilde{G} \rightarrow U_{ij} \times \tilde{G}$, $\tilde{g}_{ij}(x, \tilde{g}) = (x, \tilde{g}_{ij}(x) \tilde{g})$. Este isomorfismo hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P_j|_{U_{ij}} & \xrightarrow{g_{ij}} & P_i|_{U_{ij}} \\ & \searrow f_j & \swarrow f_i \\ & P|_{U_{ij}} & \end{array}$$

Ahora bien, considerando las aplicaciones $a_{ijk} : U_{ijk} \rightarrow \mathbb{C}^*$ como homomorfismos $a_{ijk} : U_{ijk} \times \mathbb{C}^* \rightarrow U_{ijk} \times \mathbb{C}^*$, tenemos que

$$\begin{aligned} h_{ijk} &= g_{ik}^{-1} g_{ij} g_{jk} \\ &= (\tilde{t}_i^{-1} \tilde{g}_{ik} \tilde{t}_k)^{-1} (\tilde{t}_i^{-1} \tilde{g}_{ij} \tilde{t}_j) (\tilde{t}_j^{-1} \tilde{g}_{jk} \tilde{t}_k) \\ &= \tilde{t}_k \tilde{g}_{ik}^{-1} \tilde{g}_{ij} \tilde{g}_{jk} \tilde{t}_k^{-1} \\ &= a_{ijk}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es válida ya que \mathbb{C}^* está en el centro del grupo \tilde{G} . Y la proposición queda demostrada. Q.E.D.

Consideremos ahora el complejo de haces \mathcal{O}_2^* ,

$$\mathbb{C}_X^* \xrightarrow{d \log} \Omega_{X, \mathbb{C}}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{X, \mathbb{C}}^2,$$

donde \mathbb{C}_X^* está en grado 0 y supongamos que para cada $i \in I$ existe una conexión $\tilde{\omega}_i$ en el levantamiento \tilde{P}_i , compatible con ω . En la intersección $U_i \cap U_j$ podemos definir el homomorfismo

$$(g_{ij}^{-1})^* : \Omega_{\mathfrak{g}}^1(\tilde{P}_j) \rightarrow \Omega_{\mathfrak{g}}^1(\tilde{P}_i)$$

y, como los isomorfismos g_{ij} son \tilde{G} -equivariantes, entonces

$$(g_{ij}^{-1})^*(\tilde{\omega}_j)$$

es una forma de conexión en el levantamiento \tilde{P}_i . Luego, por el lema 4.4.3, existe una 1-forma compleja α_{ij} en U_{ij} tal que

$$\tilde{\omega}_i = (g_{ij}^{-1})^*(\tilde{\omega}_j) + \alpha_{ij}^*. \quad (4.4)$$

Haciendo lo mismo para $\tilde{\omega}_j$ en U_{jk} y reemplazando en (4.4) se obtiene la identidad en U_{ijk}

$$\tilde{\omega}_i = (g_{ij}^{-1})^*(g_{jk}^{-1})^*(\tilde{\omega}_k) + \alpha_{ij}^* + \alpha_{jk}^*, \quad (4.5)$$

ya que $(g_{ij}^{-1})^*(\alpha_{jk}^*) = (p_j g_{ij}^{-1})^*(\alpha_{jk}) = p_i^*(\alpha_{jk}) = \alpha_{jk}^*$, donde $p_j : \tilde{P}_j|_{U_{ij}} \rightarrow U_{ij}$ y $p_i : \tilde{P}_i|_{U_{ij}} \rightarrow U_{ij}$ son las proyecciones. Ahora bien, tenemos también que

$$\tilde{\omega}_i = (g_{ik}^{-1})^*(\tilde{\omega}_k) + \alpha_{ik}^*. \quad (4.6)$$

Igualando (4.5) y (4.6) obtenemos

$$\alpha_{ik}^* - \alpha_{ij}^* - \alpha_{jk}^* = (g_{ij}^{-1})^*(g_{jk}^{-1})^*(\tilde{\omega}_k) - (g_{ik}^{-1})^*(\tilde{\omega}_k). \quad (4.7)$$

Recordando ahora que $h_{ijk} = g_{ik}^{-1} g_{ij} g_{jk}$, podemos escribir

$$\alpha_{ik}^* - \alpha_{ij}^* - \alpha_{jk}^* = (h_{ijk}^{-1})^*(\tilde{\omega}_k) - \tilde{\omega}_k. \quad (4.8)$$

Ahora bien, análogamente a lo que ocurría para los \mathbb{C}^* -fibrados principales (ver el lema 3.2.31), vale la igualdad

$$(h_{ijk}^{-1})^*(\tilde{\omega}_k) = \tilde{\omega}_k + \frac{dh_{ijk}}{h_{ijk}},$$

y, reemplazando esta última igualdad en la ecuación (4.8) llegamos a que

$$\alpha_{ij}^* + \alpha_{jk}^* - \alpha_{ik}^* = d \log h_{ijk}.$$

Llamemos ahora ℓ_i a la curvatura escalar de la conexión $\tilde{\omega}_i$ en \tilde{P}_i . Entonces

$$\ell_i = \ell_j + d\alpha_{ij}^*,$$

o sea, llamando ℓ a la familia (ℓ_i) , $\delta\ell = -d\alpha$, para $\alpha = (\alpha_{ij})$.

Queda probado así el siguiente

Lema 4.4.14. *Si $\ell = (\ell_i)$, $\alpha = (\alpha_{ij}^*)$ y $h = (h_{ijk})$, entonces $(\ell, -\alpha, h)$ es un 2-cociclo de Čech del cubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ a valores en el complejo de haces \mathcal{O}_2^* .*

Podemos ahora caracterizar los G -fibrados principales con conexión.

Recordar del capítulo anterior –ver la proposición 3.3.8 y el párrafo siguiente– el cuasi isomorfismo

$$\mathbb{Z}(3)_{\mathbb{D}}^{\infty} \otimes \mathbb{Z}(-2) \rightarrow \mathcal{O}_2^*[-1],$$

que induce un isomorfismo

$$\check{H}^3(X; \mathbb{Z}(3)_{\mathcal{D}}^{\infty}) \otimes \mathbb{Z}(-2) \rightarrow \check{H}^2(X; \mathcal{O}_2^*).$$

Luego, podemos considerar a la clase $[\ell, -\alpha, h]$ recién obtenida como una clase en la cohomología de Deligne $\check{H}^3(X; \mathbb{Z}(3)_{\mathcal{D}}^{\infty}) \otimes \mathbb{Z}(-2)$. De la sucesión exacta larga de cohomología asociada a la sucesión exponencial, tenemos definido un isomorfismo $\check{H}^2(X; \mathbb{C}_X^*) \rightarrow \check{H}^3(X; \mathbb{Z}(1))$ y, por otro lado, un morfismo de complejos (la proyección) $\mathcal{O}_2^* \rightarrow \mathbb{C}_X^*$. Luego, la clase $[\ell, -\alpha, h]$ se corresponde con la clase $\delta^1[P]$ considerando la composición de morfismos

$$\mathbb{Z}(3)_{\mathcal{D}}^{\infty} \otimes \mathbb{Z}(-2) \rightarrow \mathcal{O}_2^* \rightarrow \mathbb{C}_X^* \rightarrow \mathbb{Z}(1).$$

Consideremos ahora el morfismo de complejos $d : \mathcal{O}_2^* \rightarrow \Omega_{X, \mathbb{C}}^3[-2]$,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}_X^* & \xrightarrow{d \log} & \Omega_{X, \mathbb{C}}^1 & \longrightarrow & \Omega_{X, \mathbb{C}}^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow d \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Omega_{X, \mathbb{C}}^3, \end{array}$$

que induce un homomorfismo

$$d_{\bullet} : \check{H}^2(X; \mathcal{O}_2^*) \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}}^3(X).$$

Ahora bien, la imagen del 2-cociclo $[\ell, -\alpha, h]$ es, como se puede verificar con un cálculo directo, la 3-forma que sobre cada abierto U_i viene definida por la ecuación $d\ell_i$, esto es, la 3-curvatura Ω . Y luego, la imagen en $H^3(X; \mathbb{C})$ de la clase $\delta^1[P]$ resulta ser la clase $[\Omega]$.

Observación 7. *Para este caso, la presente teoría de G -fibrados principales y levantamientos no alcanza a la hora de demostrar un resultado análogo al teorema 3.5.11. Ni siquiera queda claro cuál es el grupo de Lie G adecuado para utilizar. De todas formas, a pesar de esto, existe un resultado análogo para grado 3, al cual se puede llegar reformulando lo anterior utilizando ciertos haces de categorías, llamados gerbes, los cuales fueron introducidos por J. Giraud; ver [Gir71]. Para la teoría de conexiones y curvatura usando gerbes, consultar [Bry92].*

Bibliografía

- [Ada69] J. F. Adams. *Lectures on Lie Groups*. University of Chicago, 1969.
- [Ati67] M. F. Atiyah. *K-theory*. Benjamin, New York, 1967.
- [Bre72] G. Bredon. *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, 1972.
- [Bre97] G. E. Bredon. *Sheaf Theory*, volume 170 of *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, 1997.
- [Bry92] J. L. Brylinski. *Loop Spaces, Characteristic Classes, and Geometric Quantization*, volume 107 of *Progress in Mathematics*. Birkhauser, 1992.
- [BT82] R. Bott y L. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*, volume 82 of *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, 1982.
- [CM98] D. Carey, L. Crowley y M. Murray. Principal bundles and the Dixmier-Douady class. *Comm. Math. Physics*, 193:171–196, 1998.
- [DD63] J. Dixmier y A. Douady. Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^* -algebres. *Bulletin de la S. M. F.*, 91:227–284, 1963.
- [Del71] P. Deligne. Théorie de Hodge, II. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, 40:5–57, 1971.
- [Die66] J. Dieudonné. *Fundamentos de Análisis Moderno*. Editorial Reverté, 1966.
- [EH00] D. Eisenbud y J. Harris. *The Geometry of Schemes*, volume 197 of *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, 2000.
- [Gaj97] P. Gajer. Geometry of Deligne Cohomology. *Invent. Math.*, 127:155–207, 1997.
- [Gir71] J. Giraud. *Cohomologie non Abélienne*, volume 179 of *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1971.
- [God58] R. Godement. *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*. Hermann, 1958.
- [Gro55] A. Grothendieck. *A General Theory of Fibre Spaces With Structure Sheaf*. University of Kansas, 1955.

- [Gro57] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Mathematical Journal*, 9:119–221, 1957.
- [KF75] A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. MIR, 1975.
- [KM91] A. Kriegl y P. W. Michor. *The Convenient Setting of Global Analysis*, volume 53 of *Mathematical Surveys and Monographs*. A.M.S., 1991.
- [KN63] S. Kobayashi y K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry, Volume I*. Interscience, 1963.
- [Kos70] B. Kostant. *Quantization and Unitary Representations*, volume 170 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1970.
- [Lee97] J. M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1997.
- [Lee02] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, 2002.
- [Mil56] J. W. Milnor. Construction of Universal Bundles I, II. *Annals of Mathematics*, 63:272–284, 430–436, 1956.
- [ML71] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, volume 5 of *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, 1971.
- [ML94] S. Mac Lane. *Homology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, 1994.
- [MS74] J. W. Milnor y J. D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1974.
- [Mun75] J. R. Munkres. *Topology: A First Course*. Prentice Hall, 1975.
- [Nom56] K. Nomizu. *Lie Groups and Differential Geometry*. The Mathematical Society of Japan, 1956.
- [PS86] A. Pressley y G. B. Segal. *Loop Groups*. Oxford University Press, 1986.
- [RS80] M. Reed y B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume 1. Academic Press, Inc., 1980.
- [Spi79] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*, volume 2. Publish or Perish, inc., second edition, 1979.
- [Ste51] N. Steenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press, 1951.
- [tD87] T. tom Dieck. *Transformation Groups*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987.
- [War83] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1983.

[Wei96] S. Weinberg. *The quantum theory of fields*, volume I. Cambridge University Press, 1996.