Notas

de

ANÁLISIS FUNCIONAL

G. Corach E. Andruchov

1997

El presente es un resumen de los apuntes de la materia Análisis Funcional (materia obligatoria de la carrera Licenciatura en Cs. Matemáticas, orientación pura, del Depto. de Matemáticas de la FCEyN, UBA), dictada por los profesores Dr Gustavo Corach y Dr Esteban Andruchov durante el primer cua-trimestre del año 1996.

I

ESPACIOS NORMADOS

En este capítulo daremos las definiciones necesarias y algunas propiedades básicas de la teoría de espacios normados, para tener una base sólida sobre la cual trabajar luego en los casos más concretos.

I.1 Norma y seminorma

Consideremos un cuerpo $\mathbb{F}$ (en general, $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$), y tomemos sobre él un $\mathbb{F}$-espacio vectorial E

Definición I.1 (norma) *Una* **norma** *es una función sobre el espacio vectorial, que usualmente se denota* $\| \quad \|_E : E \to \mathbb{R}^+$ *(donde* $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$*) que tiene además las siguientes tres propiedades:*

$$\| x + y \|_E \leq \| x \|_E + \| y \|_E \quad \forall\, x, y \in E \qquad (I)$$

$$\| \lambda \cdot x \|_E = | \lambda | \cdot \| x \|_E \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{F} \qquad (II)$$

$$\| x \|_E = 0 \Rightarrow x = 0\ . \qquad (III)$$

Definición I.2 (seminorma) *Se define asimismo una* **seminorma** *como una función sobre el espacio vectorial, a valores en el cuerpo, de manera que valen las propiedades* (I) *y* (II) *de una norma. Está claro que toda norma es una seminorma.*

Definición I.3 (espacio normado) *Un* **espacio normado** *es un par* $(E, \| \quad \|_E)$ *formado por un espacio vectorial* E *sobre un cuerpo* $\mathbb{F}$*, y una norma a valores en el cuerpo* $\mathbb{F}$*.*

Si miramos con cuidado las propiedades (I), (II) y (III) de la definición de norma, podemos notar que todo espacio normado es un espacio vectorial métrico, donde la métrica tiene las propiedades adicionales

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y)$$

$$d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

Podemos entonces hablar de continuidad, y como en el caso de un espacio métrico, es trivial la verificación de que la función $\| \quad \| : E \to \mathbb{R}^+$ es una función continua, simplemente reescribiendo la desigualdad triangular (propiedad (I))

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \| x - y \| . \tag{I.1}$$

Además las desigualdades

$$\|x_1 + y_1 - (x_2 + y_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| \tag{I.2}$$

y

$$\begin{aligned} \|\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2\| &\leq \|\lambda_1 x_1 - \lambda_1 x_2\| + \|\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_2\| \\ &= |\lambda_1| \cdot \|x_1 - x_2\| + |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \|x_2\| \end{aligned} \tag{I.3}$$

prueban que tanto la suma como el producto por escalares son funciones continuas en cualquier espacio normado.

Definición I.4 (normas equivalentes) *Diremos que dos normas* $\| \quad \|_1$ *y* $\| \quad \|_2$ *, sobre un espacio vectorial* E*, son* **equivalentes** *si y sólo si existen constantes positivas* a*,* $b \in \mathbb{R}$*, tales que para todo* $x \in E$ *vale*

$$\|x\|_1 \leq a.\, \|x\|_2 \leq b.\, \|x\|_1$$

Notar que la desigualdad

$$\|x\|_1 \leq a.\, \|x\|_2$$

nos dice que la función $id : (E, \| \quad \|_2) \to (E, \| \quad \|_1)$ (donde id es la función $(x \mapsto x)$, es decir la identidad de E) es una función continua, y similarmente la desigualdad

$$\|x\|_2 \leq \frac{b}{a}\, \|x\|_1$$

nos dice que $id : (E, \| \quad \|_1) \to (E, \| \quad \|_2)$ es continua. En otras palabras: dos normas sobre un espacio vectorial son equivalentes si y sólo si los espacios métricos inducidos por ellas son homeomorfos.

Definición I.5 (espacio separable) *Diremos que un espacio normado* $(E, \| \quad \|_E)$ *es* **separable** *cuando exista un subconjunto* $H \subset E$ *numerable, de manera que* H *resulte denso en* E *con respecto a la distancia inducida por la norma* $\| \quad \|_E$ *.*

En presencia de una seminorma $\| \quad \|$, podremos hablar de separabilidad (con un pequeño abuso de lenguaje de por medio) de un espacio aún sin tener una estructura de cerrados y un operador de clausura (para hablar de conjuntos densos), de la siguiente manera: diremos que un conjunto numerable $\{e_n\} \subset E$ es denso, cuando para todo $x \in E$, y todo $\varepsilon > 0$, existe un elemento del denso tal que

$$\|x - e_n\| < \varepsilon.$$

Definición I.6 (base) *Un subconjunto numerable $B = \{x_n\} \subset (E, \| \quad \|_E)$, se llama* **base** *del espacio normado E, si es linealmente independiente y para todo x en E existe una sucesión $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ de escalares para los cuales vale el límite*

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|_E \longrightarrow_{n\to\infty} 0\,.$$

En ese caso es usual la notación $x = \sum_i \alpha_i x_i$.

Notar la diferencia con la definición de base en el sentido habitual, es decir, algebraico (base de Hamel); ver el Teorema II.25, en la sección II.6.

Es inmediata la observación de que todo espacio normado provisto de base B en el sentido anterior es separable, tomando como denso numerable al conjunto de las combinaciones lineales con coeficientes racionales (en el caso $\mathbb{F}$=$\mathbb{R}$) o coeficientes en $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ (en el caso $\mathbb{F}$= $\mathbb{C}$) de los vectores de B.

- NOTA: La recíproca de la observación anterior no es cierta. En 1973, P. Enflo [Enflo] dio el primer ejemplo de un espacio normado separable que no admite base de Schauder. La demostración utiliza en esencia propiedades de operadores compactos, así que volveremos a tratar el tema de bases de Schauder cuando nos ocupemos de ellos. Una versión simplificada del ejemplo de Enflo (debida A.M. Davie) puede hallarse en [Davie].

Definición I.7 (funciones coordenadas) *Sea $\{x_n\}$ una base de un espacio normado E. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos definir una función $\alpha_n : E \to \mathbb{F}$, como $\alpha_n(x) = \alpha_n$ si $x = \sum_i \alpha_i x_i$. De las igualdades $\lambda x = \sum_j (\lambda a_j)\, e_j$ y $x + y = \sum_j (a_j + b_j)\, e_j$ (si $y = \sum_j b_j e_j$) se deduce que cada α_n es lineal, y se suelen llamar* **funciones coordenadas** *(por razones obvias).*

Definición I.8 (base de Schauder) *Si $\{x_n\}$ es una base del espacio normado E, y todas sus funciones coordenadas $\{\alpha_n\}$ son continuas, se dice que $\{x_n\}$ es una* **base de Schauder** *de E.*

Volviendo a los comentarios sobre continuidad de la suma y el producto por escalares, debe quedar claro que **no necesariamente** una seminorma define una métrica sobre el espacio, y por ende no podemos hablar en forma rigurosa de continuidad u otros conceptos topologógicos con respecto a una seminorma si no tenemos una métrica (o al menos una estructura de abiertos) definida sobre el espacio. Sin embargo en un contexto más general las expresiones (I.1), (I.2) y (I.3) tienen su utilidad.

Antes de ocuparnos de algunas de las propiedades básicas que mencionamos, demos un poco más de notación, seguida de unos ejemplos:

Definición I.9 (traslación) *Dado un punto* $\mathbf{x} \in E$*, y un subconjunto cualquiera* $\mathbf{A} \subset E$*, llamamos*

$$\mathbf{x} + \mathbf{A} = \{y \in E \mid \exists\, a \in \mathbf{A} \quad con\ y = \mathbf{x} + a\}\,.$$

Es decir, la traslación rígida del conjunto $\mathbf{A}$ *en la dirección del vector* $\mathbf{x}$*. Puede notarse que si* $\mathbf{A}$ *es un subespacio, y* $\mathbf{x} \notin \mathbf{A}$*, entonces* $\mathbf{x} + \mathbf{A}$ *es una variedad "afín", y viceversa. En el caso* $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$*, es claro que* $\mathbf{x} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$*.*

Definición I.10 (homotecias) *Dado un número real* $\mathbf{r}$*, y un conjunto* $\mathbf{B} \subset E$*, se define*

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \{y \in E \mid \exists\, b \in \mathbf{B} \quad con\ y = \mathbf{r} \cdot \mathbf{b}\}\,.$$

En este caso se trata de una homotecia o "dilatación" del conjunto en un factor constante $\mathbf{r}$*. Un caso particular es el de la bola centrada en el origen: en ese caso es claro que* $r \cdot B_1 = r \cdot B(0,1) = B(0,r) = B_r$*.*

Definición I.11 (el espacio producto) *Si* $(E, \|\ \ \|_E)$ *y* $(F, \|\ \ \|_F)$ *son espacios normados, se toma el producto* $E \times F$*, que tiene estructura de espacio vectorial, y si* $(x, y) \in E \times F$*, entonces la función*

$$\|\ \ \|_{E\times F} : E \times F \longrightarrow I\!R^+$$

$$\|\ (x,y)\ \|_{E\times F} = \|\ x\ \|_E + \|\ y\ \|_F$$

es una norma, y al espacio normado $(E \times F, \|\ \ \|_{E\times F})$ *se lo llama comunmente* **espacio normado producto***.*

I.1.1 Algunos ejemplos de espacios normados

Más que nada a título ilustrativo, ya que volveremos sobre ellos (y otros) varias veces.

Ejemplo 1 $(I\!R, |\ \ |)$ *En este caso es sencillo ver que toda norma* $\|\ \ \|$ *sobre* $\mathbb{R}$ *es de la forma* $a\cdot |\ \ |$ *para un* $a > 0$*, puesto que la propiedad* (II) *de la norma nos dice*

$$\|\ r\ \| = \|\ r \cdot 1\ \| = \|\ 1\ \| \cdot |\ r\ |\,.$$

También está claro que toda función de la forma $a\cdot |\ \ |$ *con* $a > 0$ *es una norma sobre* $\mathbb{R}$*.*

Es conocido el resultado $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ *que nos dice que este espacio es separable.*

Ejemplo 2 $(\mathbb{C}, |\ \ |)$ *Vale la misma observación que en el ejemplo anterior, tomando* $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ *como subconjunto denso numerable. .*

Ejemplo 3 *Más generalmente, en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{C}^n$ *podemos definir varias normas, entre ellas*

1. $\| x \|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} | x_k |$

2. $\| x \|_p = (\sum_1^n | x_k |^p)^{\frac{1}{p}}$ *si* $1 \leq p < \infty$. *El caso particular* $p = 2$ *se denomina generalmente* **espacio Euclídeo.** *A partir de éstas podemos armar otras como combinaciones lineales utilizando la observación del Ejemplo 1:*

3. $\| x \| = \max 3 | x_k |$

4. $\| x \| = \max \alpha_k | x_k |$ *con* $\alpha_k > 0$.

5. $\| x \|_p = (\sum_1^n \beta_k | x_k |^p)^{\frac{1}{p}}$ *con* $\beta_k > 0$, *por el hecho general (y trivial) de que si* $\| \quad \|_1$ *y* $\| \quad \|_2$ *son normas sobre* E , *entonces cualquier combinación lineal de ellas con coeficientes positivos (y alguno de ellos no nulo) también es una norma.*

Las mismas consideraciones que en los ejemplos anteriores nos dicen que estos espacios son separables.

Ejemplo 4 $\mathbf{C[a,b]} = \{\varphi : [a,b] \to \mathbb{F} | \ \varphi$ *es continua*$\}$ *las* **funciones continuas sobre el intervalo** $[a, b]$.

1. $\| \varphi \|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} | \varphi(t) |$. *El espacio* $(C[a,b], \| \quad \|_\infty)$ *es separable: éste es en efecto el teorema de Weirstrass (Teorema I.54), que demostraremos sobre el final de éste capítulo (sección I.8).**

2. $\| \varphi \|_c = | \varphi(c) |$ *con* $c \in [a, b]$, *que se trata en realidad de una seminorma.*

Ejemplo 5 *Considerar* $(E, \| \quad \|_E)$ *espacio normado cualquiera y tomar*

$$\mathbf{C}\left([a, b], E\right) = \{\varphi : [a, b] \to E \mid \varphi \text{ es continua}\}$$

Sobre él se define $\| \varphi \|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \| \varphi(t) \|_E$ *(que es finita por ser* $[a, b]$ *compacto) y entonces se deduce la igualdad*

$$\| \varphi \|_\infty = \inf \{K > 0 : \| \varphi(t) \| \leq K \quad \forall\, t \in [a, b]\}$$

Ejemplo 6 *En el caso general, se considera un espacio compacto* X, *y* $\mathbf{C}\,(X, E)$ *como en el caso anterior, tomándose* $\| \varphi \|_\infty = \sup_{t\in K} \| \varphi(t) \|$. *En el caso particular en que el espacio* E *es el cuerpo* $\mathbb{F}$, $\mathbf{C}\,(X, \mathbb{F})$ *se denota directamente* $\mathbf{C(X)}$. *Este último espacio es también separable como veremos en la sección I.8 (Teorema I.61).*

Ejemplo 7 *Ahora pasamos a subespacios de* $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ *(las sucesiones), donde podemos considerar los casos como en el Ejemplo 3:*

*Puede hacerse una demostración más sencilla tomando como subconjunto denso numerable las funciones lineales a trozos con vértices de coordenadas racionales. Ver [Porta][II.2.2]

1. $\mathbf{l}_p = \{(x(n)) : \sum_{n=1}^{\infty} \mid x(n) \mid^p < \infty\}$ *si* $1 \leq p < \infty$, *y se toma el espacio normado* $\left(l_p, \| \quad \|_p\right)$ *donde la norma se define como*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \geq 1} \mid x(n) \mid^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

o bien tomar

2. $\mathbf{l}_\infty = \{(x(n)) : \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mid x(n) \mid < \infty\}$.

3. $\mathbf{c} = \{(x(n)) : \exists \quad \lim_{n \to \infty} x(n)\}$ *y* $\mathbf{c}_0 = \{(x(n)) : \lim_{n \to \infty} x(n) = 0\}$, *con la norma* $\| x \|_\infty$ *como en 7b. Es claro que* $\mathbf{c}_o$ *es un subespacio de* $\mathbf{c}$*; veremos más adelante que en realidad se trata de un subespacio* **cerrado** *de* $\mathbf{c}$ *(sección I.3.1).*

Es casi evidente de la definición que el subconjunto (numerable) de vectores de la forma

$$x_k(n) = \begin{cases} 1 & k = n \\ \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

es una base (en realidad, una base de Schauder: ver la sección II.7) para $\left(l_p, \| \quad \|_p\right)$, *si* $1 \leq p < \infty$, *y para* $\mathbf{c}_0$, *lo que prueba que estos espacios son todos separables. El espacio* $\mathbf{c}$ *también es separable (ver sección I.3.1).*

Por otra parte el espacio $(l_\infty, \| \quad \|_\infty)$ *no es separable, puesto que el subconjunto de vectores de la forma*

$$x(n) = 0 \text{ ó } 1$$

es claramente no numerable (su cardinal es $2^{\mathbb{N}}$*), y si* $x \neq y$*, entonces existe una coordenada tal que* $|x(n) - y(n)| = 1$*, lo que nos dice que* $\|x - y\|_\infty = 1$ *(es decir, son puntos aislados).*

Se tiene en cualquier caso la cadena de inclusiones

$$l_1 \subset l_2 \subset \ldots \subset l_\infty,$$

donde en general cada uno es un subespacio propio del otro. Demostraremos un sólo caso, la inclusión estricta $l_1 \subset l_2$ *:*

Tomemos entonces $x \in l_1$*; esto implica que la sucesión* $x_n = x(n)$ *es sumable, y por ende convergente a cero. Ésto asegura que a partir de un* $N_0 \in \mathbb{N}$ *dado, todos los términos serán (en módulo) menores o iguales a uno, y entonces la desigualdad*

$$|x(n)|^2 \leq |x(n)| \quad \forall\, n > N_0$$

nos lleva a la cota

$$\begin{aligned} \|x\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|^2 &= \sum_{n\le N_0} |x(n)|^2 + \sum_{n>N_0} |x(n)|^2 \\ &< \sum_{n\le N_0} |x(n)|^2 + \sum_{n>N_0} |x(n)| \\ &\le \sum_{n\le N_0} |x(n)|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| \\ &= \sum_{n\le N_0} |x(n)|^2 + \|x\|_1 \\ &= K + \|x\|_1 < \infty \end{aligned}$$

que prueba la inclusión. Por otra parte la sucesión $x(n) = \frac{1}{n}$ prueba que la inclusión es estricta.

Ahora podemos generalizar los ejemplos anteriores, considerando un espacio normado E y tomando, dentro de $E^{\mathbb{N}}$ el subespacio

4. $\mathbf{l}_p(\mathbf{E}) = \{(x_n) : \sum_k \| x_k \|^p < \infty\}$. *Más aún: podemos considerar el producto $T = \prod_{k\in\mathbb{N}} E_k$, donde cada $(E_k, \| \ \|_k)$ es un espacio normado y tomar el subespacio*

5. $\mathbf{l}_p(\mathbf{T}) = \{(x_k \in E_k) : \sum_k \| x_k \|_k^p < \infty\}$, *dándole una estructura de espacio normado mediante la* **norma p** *(como en 1).*

Ejemplo 8 *Tomemos un espacio cualquiera X, y sobre él consideremos el espacio $(X, \sum, \mu)$ un espacio de medida sobre $\sum = \{\sigma$-álgebra de conjuntos de $X\}$, con medida $\mu : \sum \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, o bien $\mu : \sum \to \mathbb{C}^+ \cup \{+\infty\}$ funciónes σ-aditivas.*

Aquí hay que tener un poco de cuidado ya que si dos funciones difieren sobre un conjunto de medida cero, entonces para cualquiera de las siguientes dos definiciones serán indistinguibles, con lo cual lo que tendremos son dos seminormas (esto se arregla muy fácil utilizando los resultados de la sección **Espacio cociente** *(sección II.5) del Capítulo II, más precisamente mediante la Proposición II.22, como mostraremos).*

1. *El primer caso es considerar el espacio*

$$\mathbf{L}^p(X, \sum, \mu) = \left\{ \varphi : X \to \mathbb{F} \text{ medible} : \int_X | \varphi(t) |^p \, d\mu(t) < \infty \right\}$$

y tomar el espacio vectorial con seminorma $(L^p, \| \ \|_p)$ donde

$$\| \varphi \|_p = \left(\int_X | \varphi |^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} .$$

La demostración de que se trata realmente de una seminorma (propiedad (I)) es la famosa desigualdad de Minkowski. Puede encontrarse en [Fava-Zo][Capítulo VII,5]. Sobre las condiciones para la separabilidad de estos espacios, ver la nota sobre el final de la sección II.5.1 (en el Capítulo II).

2. *También podemos considerar este otro subconjunto de las funciones medibles:*

$$\mathbf{L}^{\infty}(X, \sum, \mu) = \{\varphi : X \to \mathbb{F} \text{ medible} : \exists\, M > 0 \text{ tal que } \mu\left(\{|\ \varphi\ |> M\}\right) = 0\}$$

y se define

$$\|\ \varphi\ \|_{\infty} = ess\sup(\varphi) = \inf\{M > 0 : \text{vale lo anterior}\}$$

conocido como el **supremo esencial de** φ.

Cabe recordar que si $\mu(X) < \infty$, *entonces* $\mathbf{L}^{\infty} \subset \mathbf{L}^{p}$ *para todo* $1 \leq p < \infty$, *y además vale el límite*

$$\lim_{p} \|\varphi\|_{p} = \|\varphi\|_{\infty} \quad \forall\, \varphi \in \mathbf{L}^{\infty}. \tag{I.4}$$

Para verlo, si $\varphi \neq 0$ *c.t.p., podemos suponer (sin pérdida de generalidad)* $\|\varphi\|_{\infty} = 1$, *y entonces la inclusión es evidente de la desigualdad* $|\varphi|^{p} \leq 1 = \|\varphi\|_{\infty}^{p}$ *c.t.p., que nos dice*

$$\int_{X} |\varphi|^{p}\, d\mu \leq \int_{X} \|\varphi\|_{\infty}^{p}\, d\mu = \mu(X) \cdot \|\varphi\|_{\infty}^{p}. \tag{I.5}$$

Para probar el límite de la ecuación (I.4), si tomamos un número cualquiera $A < \|\varphi\|_{\infty}$, *y llamamos* E *al conjunto donde* $|\varphi(t)| > A$, *de la misma definición del supremo esencial se deduce que* $\mu(E) > 0$ *y además*

$$A \cdot \mu(E)^{\frac{1}{p}} = (A^{p})^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{X} \chi_{E}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{E} A^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{E} |\varphi|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{X} |\varphi|^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

siendo éste último término menor o igual $\mu(X)^{\frac{1}{p}} \cdot \|\varphi\|_{\infty}$ *por la ecuación (I.5). Combinando esto con la desigualdad anterior, y haciendo tender* $p \to \infty$, *se obtiene*

$$A \leq \liminf_{p} \left(\int_{X} |\varphi|\right)^{\frac{1}{p}} \leq \limsup_{p} \left(\int_{X} |\varphi|\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\varphi\|_{\infty};$$

haciendo tender $A \to \|\varphi\|_{\infty}$, *se obtiene que existe el límite y coincide con la norma supremo de* φ.

Otro resultado importante se obtiene si suponemos que X *contiene una familia no numerable de conjuntos* $\mathcal{S}$ *de medida positiva, tales que*

$$\mu(S - S') > 0 \quad \forall\, S, S' \in \mathcal{S},$$

ya que entonces este espacio no es separable; en efecto, las bolas

$$\left\{\varphi : \|\varphi - \chi_{S}\|_{\infty} < \frac{1}{2}\right\}$$

(donde χ_{S} *denota la función característica de* $S \in \mathcal{S}$*) constituyen una familia no numerable de abiertos no vacíos, disjuntos dos a dos.*

Este es el caso de $\mathbf{L}^{\infty}((a,b), \mathcal{B}, \mu)$ *siendo* μ *la medida usual de Lebesgue y* $\mathcal{B}$ *la* σ-*álgebra de los Borelianos, y tomando como* $\mathcal{S}$ *la familia de intervalos abiertos* (a,s), $s < b$. *Lo mismo vale para cualquier* $L^{\infty}(E, \mathcal{B}, \mu)$, *con* $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *medible.*

Ejemplo 9 *Dada cualquier función* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$*, y cualquier partición*

$$\Pi \equiv \{a = t_0 < t_1 < .... < t_n = b\},$$

se define $V(\varphi,\Pi) = \sum_{k=1}^{n} \mid \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \mid$*, y entonces podemos considerar el espacio* $\mathbf{BV[a,b]} = \{\varphi : V(\varphi) = Var(\varphi) = \sup_{\Pi} V(\varphi,\Pi) < \infty\}$*, las* **funciones de variación acotada sobre** $[a,b]$.

Se ve fácilmente que $V(\varphi)$ *es una seminorma y se conoce como* **variación de** φ*.*

Un caso trivial de función de variación acotada son las funciones monóto-nas, ya que en ese caso, para toda partición vale $V(\varphi,\Pi) = |\varphi(b) - \varphi(a)| = V(\varphi)$*.*

Observar que $V(\varphi) = 0$ *si y sólo si* φ *es constante, ya que* $V(\varphi) = 0$ *quiere decir que necesariamente para toda partición* Π *del intervalo* $[a,b]$*,* $V(\varphi,\Pi) = 0$*; la existencia de dos puntos* $u, v \in [a,b]$*, con* $u > v$*, donde* $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ *nos dice que* $V(\varphi) > 0$ *tomando la partición*

$$\Pi_* \equiv \{a = t_0 < t_1 = v < t_2 = u < t_3 = b\} \ .$$

A partir de V *es sencillo construir una norma, simplemente poniendo*

$$\| \varphi \|_{BV} = \mid \varphi(a) \mid + V(\varphi),$$

que verifica trivialmente ser una seminorma por ser la suma de dos de ellas; la observación anterior nos dice que $\| \varphi \|_{BV} = 0$ *implica* φ *constante, pero además debe ser* $\varphi(a) = 0$ *y por ende* φ *es la función nula.*

Un argumento similar al del ejemplo anterior (espacios $\mathbf{L}^\infty$*) nos dice que este espacio* **no** *es separable.*

- NOTA: El siguiente es un resultado fundamental de las funciones de variación acotada. Definamos $V(\varphi)$ (x) como la variación de φ en el intervalo [a,x], con x<b. Entonces φ se escribe como

$$\varphi = V(\varphi) - (V(\varphi) - \varphi) \ ,$$

y se prueba que ambas funciones son monótonas no decrecientes. Se concluye que φ es derivable en casi todo punto.(ver [Kolmogorov][TeoremaVII.2.1,p.378]).

Ejemplo 10 *Las funciones* **lipschitzianas de orden** α *(para* $0 < \alpha \leq 1$*) son las funciones* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{F}$ *que satisfacen*

$$\|\varphi\|_{L_\alpha} = \mid \varphi(a) \mid + \sup_{t \neq s} \frac{|\varphi(t) - \varphi(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty$$

Es claro que $\| \ \|_{L_\alpha}$ *cumple las propiedades de una norma por las mismas razones que utilizamos en el ejemplo anterior.*

Por otro lado puede probarse que todas las funciones lipschitzianas de orden β*, con* $\beta > 1$*, son exclusivamente las funciones constantes (y por ende un caso sin interés), de las siguiente manera:*

$$\frac{|\varphi(t) - \varphi(s)|}{|t-s|^\beta} \leq \sup_{t \neq s} \frac{|\varphi(t) - \varphi(s)|}{|t-s|^\beta} = S_\varphi \,, \tag{I.6}$$

si $t \neq s$, expresión de la que se deduce

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq S_\varphi \cdot |t-s|^\beta . \tag{I.7}$$

Con esto podemos probar que $\varphi \in BV[a,b]$, poniendo $\beta = 1+r$, y tomando

$$\begin{aligned} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| &\leq S_\varphi \cdot (t_k - t_{k-1})^\beta \leq S_\varphi \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot (t_k - t_{k-1})^r \\ &\leq S_\varphi \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot (b-a)^r \end{aligned}$$

con lo cual para cualquier partición Π se obtiene

$$\begin{aligned} V(\varphi, \Pi) = \textstyle\sum_{k=1}^n \mid \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \mid &\leq S_\varphi \cdot \textstyle\sum_k (t_k - t_{k-1}) \cdot (b-a)^r \\ &= S_\varphi \cdot (b-a) \cdot (b-a)^r \\ &= S_\varphi \cdot (b-a)^\beta . \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior observamos que todas las funciones de variación acotada son derivables en casi todo punto. Con esto las lipschitzianas de orden β (con $\beta > 1$) son derivables en casi todo punto $x_0 \in [a,b]$, con lo cual (nuevamente por (I.6))

$$\frac{|\varphi(x_o) - \varphi(x_0+h)|}{|h|} \leq S_\varphi \cdot |h|^r .,$$

lo que nos dice, tomando límite (el cual existe en casi todo punto por las consideraciones previas), que

$$|\varphi'(x_0)| = \lim_{|h| \to 0} \frac{|\varphi(x_o) - \varphi(x_0+h)|}{|h|} \leq 0 \quad c.t.p.$$

Ahora bien, esto nos dice que $\varphi' = 0$ c.t.p. Ahora probaremos que todas estas funciones son absolutamente continuas, con lo cual habremos probado que

$$\varphi(x) = \int_a^x \varphi'(t)dt + \varphi(a) = \varphi(a) = cte$$

Para esto tomemos un número $\varepsilon > 0$ y consideremos una familia arbitraria (finita) de intervalos $\{(x_i, x_i')\}_{i=1\ldots n}$ que formen un cubrimiento del intervalo $[a,b]$, de manera que

$$\sum_{i=1}^n |x_i' - x_i| < \frac{\varepsilon}{S_\varphi}$$

Podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que $|x_i' - x_i| \leq 1$ para todo i en $\{1, ..., n\}$, ya que en su defecto partimos a los intervalos de diámetro mayor en otros más pequeños hasta obtener esta cota, y una cota para esta subpartición será también una cota para *la partición original, por medio de la desigualdad triangular. Con esto,* $|x_i' - x_i|^{1+r} \leq |x_i' - x_i|$ *para todo* i. *Ahora calculemos*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i') - \varphi(x_i)| &\leq S_\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i|^\beta \\
&= S_\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i|^{1+r} \\
&\leq S_\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| \\
&< S_\varphi \cdot \frac{\varepsilon}{S_\varphi} = \varepsilon \,,
\end{aligned}$$

lo que termina de probar la continuidad absoluta de φ.

I.2 El lema de Riesz

El hecho de que toda norma defina una métrica sobre un espacio vectorial dado, nos permite hablar de los conceptos topológicos habituales como abiertos y cerrados; junto con ellos aparecen en forma natural otros algo más complejos, como por ejemplo el **borde** de un conjunto, un conjunto **nunca denso** (magro) o un conjunto **denso** en todo el espacio.

En un espacio normado E, es posible que un subespacio propio H sea denso (por ejemplo, el subespacio $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ de sucesiones con finitos términos no nulos en el espacio $l_\infty(\mathbb{R})$, como el lector puede verificar). Por otro lado, si H es cerrado, está claro que la única forma que tiene de ser denso, es ser todo E. Esto nos permite deducir que si H es un subespacio propio cerrado, entonces hay punto de E a distancia positiva de H, ya que $dist(x, H) = \inf \{\|x - h\|_E : h \in H\}$, y si éste ínfimo es cero para todo $x \in E$, entonces H es denso.

En el caso general, está claro que $dist(x, H) \leq \|x\|$, y uno estaría entonces tentado a tratar de encontrar algún vector $x \in E$ de manera que $\|x\| = dist(x, H)$, por la siguiente razón: el concepto intuitivo de distancia euclídea está íntimamente ligado con la idea de ortogonalidad; cada vez que pensamos en la distancia entre un punto y un objeto extenso, pensamos en la distancia perpendicular del objeto al punto. Ahora bien, la distancia perpendicular a un subespacio puede medirse en particular desde el origen, y entonces un vector en las condiciones de arriba sería lo más parecido a algo "perpendicular" u "ortogonal" al subespacio dado. Como veremos luego, este vector es posible de hallar en un espacio con producto interno, ya que en un espacio así subsiste la idea euclídea de ortogonalidad, inducida por el producto. Desgraciadamente, en la mayoría de los casos de espacios normados, este vector no existe, ni siquiera si el espacio es completo.

Un ejemplo clásico de esta patología es el siguiente:

Ejemplo 11 (a) *Tomemos el subespacio* X *de* $C[0,1]$ *formado por todas las funciones continuas* f *que satisfacen* $f(0) = 0$ *dotado de la norma supremo. Es un resultado conocido* *(que se demuestra en cualquier curso de cálculo avanzado) que* $(C[0,1], \| \quad \|_\infty)$ *es un espacio completo. Como* X *es un subespacio cerrado, resulta que* $(X, \| \quad \|_\infty)$ *es un espacio normado completo. Consideremos el subespacio* M *de* X *formado por todas las funciones* g *tales que*

$$\int_0^1 g(t)dt = 0$$

Si tomamos un punto de acumulación de este subespacio, y una sucesión de funciones $\{g_n\}$ *en* M*, la desigualdad*

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 g(t)dt\right| &\leq \left|\int_0^1 g(t) - g_n(t)dt\right| + \left|\int_0^1 g_n(t)dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 g(t) - g_n(t)dt\right| \\
&\leq \int_0^1 |g(t) - g_n(t)|\, dt \\
&\leq \|g(t) - g_n(t)\|_\infty \to_n 0
\end{aligned}$$

prueba que se trata de un subespacio cerrado.

Ahora supongamos que $f_0 \in X$, $\|f_0\|_\infty = 1$*, y que vale* $d(f_0, M) = 1$*, y veamos que esto es imposible. De la definición de distancia se obtiene que* $\|f_0 - g\|_\infty \geq 1$ *para todo* $g \in M$*. Para cada* $f \in X - M$ *definamos*

$$c_f = \frac{\int_0^1 f_0(t)dt}{\int_0^1 f(t)dt}$$

Entonces es trivial la verificación de que $f_0 - c_f.f \in M$*, y con esto*

$$\|f_0 - (f_0 - c_f.f)\|_\infty \geq 1,$$

es decir $|c_f| . \|f\|_\infty \geq 1$*, que en términos de la definición de* c_f *se escribe como*

$$\left|\int_0^1 f_0(t)dt\right| . \|f\|_\infty \geq \left|\int_0^1 f(t)dt\right| . \tag{I.8}$$

Ahora consideremos la sucesión de funciones $f_n(t) = t^{\frac{1}{n}}$ *en* $C[0,1]$*. Por un lado se ve que* $f_n(0) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, (o sea* $f_n \in X \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$*); y por otra parte está claro que ninguna está en* M*. Además es trivial la verificación de que* $\|f_n\|_\infty = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*; reemplazando en la ecuación (I.8) y tomando límite para* $n \to \infty$ *se obtiene*

$$\left|\int_0^1 f_0(t)dt\right| \geq \left|\int_0^1 f_n(t)dt\right| = \frac{t^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\ \Big|_0^1 = \frac{1}{\frac{1}{n}+1} \to_n 1$$

es decir que

$$\left|\int_0^1 f_0(t)dt\right| \geq 1.$$

Pero por otra parte la continuidad de f_0 *y el hecho de que* $f_0(0) = 0$*, junto con la cota* $|f_0(t)| \leq 1$ *nos asegura que debe ser*

$$\left| \int_0^1 f_0(t)dt \right| < 1,$$

lo cual es una contradicción.□

Sin embargo, en cualquier caso subsiste una idea de "cuasiortogonalidad" inducida por el siguiente lema

Lema I.12 (F. Riesz) *Sea* H *un subespacio propio y cerrado de un espacio normado* E*, y tomemos un* $\varepsilon > 0$ *arbitrario. Entonces existe algún* $x \in E$ *tal que* $\|x\| = 1$ *y la norma de* x *aproxima a menos de* ε *la distancia al subespacio, es decir*

$$\|x\| \geq dist(x, H) \geq 1 - \varepsilon = \|x\| - \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN:

De la misma definición de distancia se deduce la desigualdad $0 \leq dist(x, H) \leq \|x\|$ para todo $x \in E$. Como H es cerrado, y propio, existe por lo menos un x que hace la desigualdad estricta, es decir $0 < dist(x, H) \leq \|x\|$. Vamos a suponer (sin pérdida de generalidad) que $0 < \varepsilon < 1$, y que $H \neq \{0\}$ (ya que en ese caso la prueba es trivial, puesto que todo da cero). Tomemos $z \in E$ tal que $dist(z, H) = \delta > 0$; nuevamente de la definición de distancia se deduce que existe un $h_0 \in H$ tal que

$$\|z - h_0\| < \frac{\delta}{1+\varepsilon} < \delta\,. \tag{I.9}$$

Si llamamos $y = z - h_0$, entonces resulta que $dist(y, H) = dist(z, H) = \delta$ puesto que

$$\begin{aligned} dist(y, H) &= \inf \{\|y - h\|_E : h \in H\} = \inf \{\|z - h_0 - h\|_E : h \in H\} \\ &= \inf \{\|z - h'\|_E : h' \in H\} = dist(z, H)\,, \end{aligned}$$

y si tomamos un escalar positivo cualquiera α, se deduce que $dist(\alpha y, H) = \alpha\delta$ con un argumento similar. Llamando $x = \frac{y}{\|y\|}$, está claro que $\|x\| = 1$; por lo que mencionamos recién, $dist(x, H) = \frac{\delta}{\|y\|}$. Pero de la ecuación (I.9) se deduce la desigualdad $\frac{1}{\|y\|} > \frac{1+\varepsilon}{\delta}$, lo que nos lleva a

$$dist(x, H) > \frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon \quad \text{(puesto que } \varepsilon < 1\text{)}\,.\square$$

Ejemplo 11 (b) *Volviendo al ejemplo anterior al lema, se puede construir explícitamente una sucesión de vectores* $\{f_n\}_{n \in I\!N}$ *en* X*, de norma uno, tales que* $d(f_n, M) \to_n 1$*. Ésta es la siguiente*

$$f_n(t) = \begin{cases} n.t & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ \\ 1 & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Los detalles quedan a cargo del lector.

I.3 Clausura e hiperplanos

La discusión previa al lema de Riesz nos plantea el problema de tratar de decidir cuando un subespacio es denso. Esta pregunta tiene no tiene una respuesta automática, pero el panorama se aclara un poco después de los próximos resultados.

Proposición I.13 *Si H es un subespacio de un espacio normado E, su clausura es también un subespacio.*

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos las funciones $f : H \times H \to H$ y $g : \mathbb{F} \times H \to H$ definidas como $f(x,y) = x + y$ y $g(\alpha, z) = \alpha z$, que por las observaciones (I.2) y (I.3) del comienzo del capítulo son funciones continuas sobre todo el espacio, y por ende su restricción al subespacio H también es continua. Es un resultado conocido de las funciones sobre espacios topológicos cualquiera que f es continua si y sólo si para todo subconjunto C vale $f(\overline{C}) \subset \overline{f(C)}$. Por lo tanto en el caso particular de la suma y el subespacio H vale $f(\overline{H} \times \overline{H}) \subset \overline{f(H \times H)}$. Pero $f(H \times H) \subset H$, y entonces $\overline{f(H \times H)} \subset \overline{H}$. Esto prueba que la suma de dos elementos en la clausura del subespacio siguen estando en la clausura. Un argumento similar sobre la función producto por escalares concluye la prueba de que $\overline{H}$ es un subespacio.$\square$

Ahora un poco de álgebra lineal:

Definición I.14 *Un* **hiperplano** *H es un subespacio propio maximal en un espacio vectorial E; es decir que, si v es un vector del espacio que no pertenece al hiperplano, entonces vale*

$$E = H \oplus < v > \ .$$

O sea que para todo elemento $w \in E$ existen un vector $h \in H$ y un escalar $\lambda_w \in \mathbb{F}$ tales que $w = h + \lambda_w v$.

Está claro que hay un isomorfismo de espacios vectoriales $E/H \simeq \mathbb{F}$, definido como

$$\Phi\left([w]\right) = \Phi\left([\lambda_w v + h]\right) = \lambda_w$$

Proposición I.15 *Un subconjunto $H \subset E$ (donde E es un espacio vectorial) es un hiperplano si y sólo si existe una función lineal $f : E \to \mathbb{F}$* **no** *idénticamente nula tal que $H = \ker f$. La funcional f es única, salvo un factor constante: es decir, si existe otra funcional $g : E \to F$ tal que $\ker f = \ker g$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $f = \alpha g$.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $H = f^{-1}(0)$, con f lineal, entonces está claro que f es un subespacio; falta ver que es maximal. Para esto tomemos un vector cualquiera $v \in E$ tal que $f(v) \neq 0$, y consideremos el subespacio

$$S = H \oplus < v >$$

(donde $< v >$ indica el subespacio generado por v). Ahora tomemos un elemento cualquiera $w \in E$; y escribamos el vector $h = w - \frac{f(w)}{f(v)}v$. Como f es lineal,

$$f(h) = f(w) - \frac{f(w)}{f(v)} f(v) = f(w) - f(w) = 0\,.$$

Esto prueba que $h \in H$, y despejando se deduce

$$w = h + \frac{f(w)}{f(v)} v \tag{I.10}$$

lo que nos dice que $w \in S$. Como cualquier vector de E está en S, resulta $E \subset S$, luego debe ser $E = S$.

Para la recíproca, supongamos que existe un hiperplano H, por ende un vector $v \notin H$ tales que para todo vector w del espacio existen $h_w \in H$, $\lambda_w \in \mathbb{F}$ de manera que vale

$$w = h_w + \lambda_w v\,. \tag{I.11}$$

Se define $f : E \to \mathbb{F}$ como $f(w) = \lambda_w$. La igualdad $H = f^{-1}(0)$ se deduce trivialmente de las definiciones, y por último, como de (I.11) se ve que para cada $w \in E$ vale la igualdad $\lambda_w v = w - h_w$, entonces

$$\begin{aligned}
(f(\alpha w + \beta z) - \alpha f(w) - \beta f(z))\, v &= (\lambda_{\alpha w+\beta z} - \alpha\lambda_w - \beta\lambda_z)\, v \\
&= \lambda_{\alpha w+\beta z} v - \alpha\lambda_w v - \beta\lambda_z v \\
&= -h_{w+\alpha z} + \alpha h_w + \beta h_z
\end{aligned}$$

y como el el último término es un vector de H, en el cual por hipótesis v no está, se tiene que $f(\alpha w + \beta z) - \alpha f(w) - \beta f(z) = 0$, o lo que es lo mismo $f(\alpha w + \beta z) = \alpha f(w) + \beta f(z)$, que prueba la linealidad de f.

En cualquier caso, si suponemos que hay otra funcional $g : E \to \mathbb{F}$ tal que $H = g^{-1}(0)$, entonces aplicándola sobre (I.10) se deduce que, para todo $w \in E$

$$g(w) = g(h) + \frac{f(w)}{f(v)} g(v) = \frac{g(v)}{f(v)} f(w) = \alpha f(w)\,.\square$$

Volviendo a los espacios normados, la caracterización anterior de hiperplanos nos permite identificarlos con las funcionales lineales, y entonces podemos juntar esto con la Proposición I.13 para obtener la siguiente

Proposición I.16 *Supongamos que H es un hiperplano de un espacio normado E. Entonces H es cerrado o es denso en E. Además, si f es cualquier funcional tal que $H = \ker f$, entonces H es cerrado si y sólo si f es continua.*

Demostración:

Para la primer parte, las inlusiones obvias $H \subset \overline{H} \subset E$, junto con el hecho de que $\overline{H}$ es un subespacio y H un subespacio maximal, nos dicen que $\overline{H} = H$ o bien $\overline{H} = E$.

Si f es continua, H es automáticamente cerrado por ser la preimagen de un cerrado. Para la recíproca, lamentablemente vamos a necesitar (para no caer en una demostración altamente técnica) los resultados de la sección dedicada a espacios cocientes, en el Capítulo II sección II.5. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & \mathbb{F} \\ \Pi \downarrow & \nearrow_{\overline{f}} & \\ E/H & & \end{array}$$

donde Π es la proyección al cociente, y la función $\overline{f}$ está bien definida puesto que $\ker f = H$, y además es un morfismo (o sea es un aplicación lineal). Por ser H un hiperplano, el espacio cociente es un espacio vectorial de dimensión uno. La Proposición II.19 de la mencionada sección nos dice que el espacio vectorial E/H es en realidad un espacio normado (por ser H cerrado). Además la Proposición II.20.3 nos asegura que la proyección Π es una función continua. Por otra parte, el hecho de que H/S sea unidimensional nos dice que $H/S = \langle v_0 \rangle$, y entonces

$$\begin{aligned} \left\| \overline{f}(v) - \overline{f}(w) \right\| &= \left\| \overline{f}(\alpha v_0) - \overline{f}(\beta v_0) \right\| = |\alpha - \beta| \cdot \left\| \overline{f}(v_0) \right\| \\ &= |\alpha - \beta| \cdot \| v_0 \| \ \frac{\| \overline{f}(v_0) \|}{\| v_0 \|} = \| (\alpha - \beta)\, v_0 \| \cdot \frac{\| \overline{f}(v_0) \|}{\| v_0 \|} \\ &= \| v - w \| \cdot M \end{aligned}$$

lo que prueba que $\overline{f}$ es un monomorfismo continuo. Tomemos $g : E \to \mathbb{F}$, donde $g = \overline{f} \circ \Pi$. Está claro que g es una funcional lineal, pero además es continua puesto que es una composición de funciones continuas. Por otra parte

$$\ker g = g^{-1}(0) = \Pi^{-1}\left(\left(\overline{f} \right)^{-1}(0) \right) = \Pi^{-1}(0) = H = \ker f$$

y entonces la Proposición I.15 nos dice que existe una constante $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $f = \alpha g$, con lo cual f resulta continua.$\square$

Una generalización del argumento sobre la continuidad de $\overline{f}$ puede verse sobre el final de éste capítulo, en la sección I.7 sobre espacios normados de dimensión finita.

I.3.1 Los espacios $\mathbf{c}_0$ *y* $\mathbf{c}$

Como una aplicación del resultado anterior, consideremos la funcional $L : \mathbf{c} \to \mathbb{F}$ donde $\mathbf{c}$ tiene la norma supremo, y $L(\{x(n)\}) = \lim_n x(n)$. En principio habíamos observado que $\mathbf{c}_0$ es un subespacio de $\mathbf{c}$; como $\mathbf{c}_0 = \ker L$, si probamos que L es continua sobre $\mathbf{c}$, habremos demostrado que $\mathbf{c}_0$ es un hiperplano cerrado de $\mathbf{c}$. Para esto hagamos la diferencia de los límites, que es igual al límite de la diferencia (puesto que ambos límites existen) y utilicemos que el módulo es una función continua para sacar el límite:

$$\begin{aligned} |\lim_n x(n) - \lim_n y(n)| &= \lim_n |x(n) - y(n)| \\ &\leq \lim_n \sup_{n\in \mathbb{F}} |x(n) - y(n)| \\ &= \|x-y\|_\infty \to_{x\to y} 0 \,. \end{aligned}$$

Basta elegir entonces una sucesión con límite no nulo (por ejemplo, el elemento $x = (1, 1, 1, 1, ...)$, con límite igual a uno) para escribir

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 \oplus < x > \ .$$

Esta descripción de $\mathbf{c}$ nos dice también que se trata de un espacio normado separable, ya que en el Ejemplo 7 observamos que $\mathbf{c}_0$ es separable, y si $\{x_n\}$ es un denso numerable de $\mathbf{c}_0$, tomamos el subconjunto (numerable) de $\mathbf{c}$ formado por los vectores de la forma

$$y_{nk} = x_n + \lambda_k x$$

con $\{\lambda_k\}$ en $\mathbb{Q}$ (si $\mathbb{F}$=$\mathbb{R}$), o en $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ (si $\mathbb{F}$=$\mathbb{C}$). Es inmediata la demostración de la densidad de $\{y_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbf{c}$. En otras palabras: si $\{z_n\}$ es una base para $\mathbf{c}_0$, y z es cualquier vector en $\mathbf{c}$, con límite no nulo, entonces $\{z_n\} \cup \{z\}$ es una base para $\mathbf{c}$.

I.4 Equivalencia de espacios normados

Como idea general, se puede tratar de construir una "clasificación" de espacios normados, para poder trabajar con comodidad con aquellos espacios que resulten más "naturales" en su presentación, elegidos entre los de su misma clase. Para dar más precisión a este concepto, pensemos que los espacios entre los cuales se puede hallar un isomorfismo (en el sentido algebraico) son candidatos naturales a caer en una misma clase. Sin embargo una clasificación tan gruesa tiene una desventaja evidente: podemos dotar a un mismo espacio vectorial con dos estructuras topológicas distintas (es decir, definir dos normas no equivalentes para el mismo espacio) y ambos espacios (obviamente distintos como espacios normados) serán algebraicamente isomorfos.

Ejemplo 12 *Tomemos el espacio $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ de sucesiones con finitos términos no nulos, y démosle estructura de espacio normado con la norma supremo*

$$\|x\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| \,.$$

Ahora bien, también es posible darle estructura de espacio normado al mismo espacio vectorial por medio de la norma

$$\|x\|_1 = \sum_{n \in I\!N} |x(n)|$$

(donde en realidad se trata de una suma y no un límite, por ser casi todos los términos nulos). Está claro que la identidad sobre $\mathbb{R}^{(I\!N)}$ *es un isomorfismo algebraico: probaremos que ambos espacios* **no** *son homeomorfos.*

Para ésto basta probar que ambas normas no son equivalentes, y esto es trivial ya que la existencia de una constante $a \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\|x\|_1 \leq a \|x\|_\infty \tag{I.12}$$

para todo $x \in E$ *nos lleva al absurdo vía la sucesión de vectores* $\{x_k\}$ *de* $\mathbb{R}^{(I\!N)}$ *definida como*

$$x_k(n) = \begin{cases} 1 & n \leq k \\ \\ 0 & n > k \end{cases}$$

sobre la cual la ecuación (I.12) nos dice

$$k = \|x_k\|_1 \leq a \|x_k\|_\infty = a.1 = a \quad \forall\, k \in I\!N \,.\square$$

Es evidente que hay que pedir un poco más: una primera aproximación es pedir que el isomorfismo en cuestión sea bicontinuo (es decir, que sea un homeomorfismo). Esto nos permite asegurar que la estructura de abiertos (y cerrados) de ambos espacios será la misma.

También podremos considerar monomorfismos bicontinuos entre dos espacios normados, lo cual nos permitirá mirar al espacio de salida del monomorfismo como un subespacio propio y cerrado del de llegada. En general, con esto será suficiente. Sin embargo, hay una condición más fuerte que nos dice que dos espacios son (exceptuando la descripción y presentación) prácticamente el mismo: ésta es la siguiente

Definición I.17 *Sea* $T : E \to F$ *un isomorfismo (algebraico) entre espacios normados. Se dice que* T *es un* **isomorfismo isométrico** *si para todo* $x \in E$ *vale*

$$\|Tx\|_F = \|x\|_E$$

En ese caso se dice que los espacios normados E *y* F *son* **isométricamente isomorfos***, y lo denotaremos* $E \simeq F$*.*

Es evidente de la definición que T es una función continua, y con inversa continua, pero esta condición es mucho más fuerte que las anteriores, y para nosotros será una "igualdad" virtual de espacios normados: es decir que es la máxima aspiración que uno puede tener a la hora de ver hasta que punto dos espacios normados son el mismo.

I.5 El espacio dual y el teorema de Hahn-Banach

Como vimos, la clasificación de subespacios requiere fundamentalmente saber cuando una funcional es continua. En primer lugar hay que tener presente que las funcionales no continuas, aunque raramente aparecen, existen. Un ejemplo trivial de funcional lineal no continua es el siguiente:

Ejemplo 13 *Se toma el espacio vectorial* $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$ *(las sucesiones con "colas" de ceros), y se le da la norma*

$$\|x\| = \left\|\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}}\right\| = \max_n |x(n)| \tag{I.13}$$

que es un número finito puesto que hay finitos términos no nulos. Se toma la base canónica $B = \{e_k\}_{k\in N}$ *de* E*, donde*

$$e_k(n) = \begin{cases} k & n = k \\ \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

y se define $l : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ *como* $l(e_k) = k$ *sobre la base, extendiéndola en forma lineal a todo el espacio (lo que la hace automáticamente lineal). Ahora consideremos la sucesión* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *definida como* $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}e_k$*, es decir*

$$x_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} & n = k \\ \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

Cada uno de estos elementos x_k *está contenido claramente en* $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$*, pero además*

$$\|x_k\| = \max_n |x_k(n)| = \frac{1}{\sqrt{k}} \longrightarrow_k 0\,,$$

lo que nos dice que la sucesión tiende a cero. Pero por otra parte,

$$l(x_k) = l\left(\frac{1}{\sqrt{k}}e_k\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot l(e_k) = \sqrt{k} \longrightarrow_k +\infty$$

lo que prueba que l **no** *es continua.*

Hay algo más que se puede extraer de éste ejemplo: como l no es continua, el subconjunto H de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ definido como $H = \ker l$ es un hiperplano denso (Proposiciones I.15 y I.16). Uno podría verse tentado a decir que los únicos subespacios con posibilidad de ser densos son los hiperplanos, pero lamentablemente ésto es falso: consideremos el hiperplano $H = \ker l$. Por ser un subespacio de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ es un espacio normado, con una norma que es simplemente la restricción de la norma (I.13) al subespacio. Por otra parte está claro que $\dim H \geq \aleph_0$, puesto que se trata de un hiperplano, y si tuviera dimensión finita entonces todo el espacio tendría dimensión finita, lo cual es evidentemente falso.

Entonces $\dim H = \aleph_0$, por ser un subespacio de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Esto prueba que hay una base $\{h_k\}_{k\in N}$ de H sobre la cual se puede repetir la construcción anterior para obtener una funcional $l' : H \to \mathbb{R}$ que no es continua sobre H. Tomemos el conjunto $S = \ker l'$: el mismo razonamiento anterior nos dice que S es un hiperplano de H, denso en H. Entonces S es un subespacio propio de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, estrictamente incluido en un hiperplano, lo que prueba que no es un hiperplano. Pero por otra parte es trivial verificar que si A, B y C son espacios métricos, A es denso en B, y B es denso en C entonces A es denso en C : el subespacio S es un subespacio más pequeño que un hiperplano, pero es denso en $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

Volvamos al caso general: como todo espacio de funciones sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, el conjunto de todas las funcionales tiene estructura de $\mathbb{F}$-espacio vectorial, con la suma y el producto definidos punto a punto, es decir

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda\,(f(x))$$

Sin embargo, aparece un obstáculo cuando se trata de definir una norma sobre él, ya que el ejemplo anterior nos muestra que puede haber funcionales no continuas. Esto se resuelve observando que las funcionales lineales continuas forman un subespacio del espacio vectorial de todas las funcionales, puesto que la suma y multiplicación por escalares de funciones continuas son funciones continuas. Vamos a quedarnos entonces con las funcionales continuas, y para ellas tenemos la siguiente proposición-definición

Definición I.18 (espacio dual) *Sea $(E, \|\ \ \|_E)$ un espacio normado. Entonces el espacio vectorial de todas las funciones lineales continuas $f : E \to \mathbb{F}$ tiene una estructura natural de espacio normado, con la norma definida como*

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E = 1}} |f(x)| \tag{I.14}$$

Este espacio se denomina E^*, el **espacio dual** *de E.*

Demostración:

La continuidad de f asegura que $\|f\|$ es finito, ya que una sucesión $\{x_n\}$ de vectores de norma uno sobre la cual $|f(x_n)| \to_n \infty$ nos permitiría construir la sucesión (a partir de un n donde $|f(x_n)| > 0$)

$$y_n = \frac{x_n}{|f(x_n)|},$$

que tiende a cero pero sobre la cual $f(y_n) \equiv 1$ **no** tiende a cero.

La propiedad

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \,.\, \|f\|$$

es evidente. La subaditividad del supremo asegura la propiedad (I) de las normas, y por último es evidente que si $\|f\| = 0$ entonces $f(x) = 0$ para todo x de norma uno, y por la linealidad de f, para todo $x \in E$, lo que prueba que $f \equiv 0$.□

Una propiedad bastante útil de la norma (I.14) es la siguiente

$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \cdot \|x\| \leq \sup_{\substack{x' \in E \\ \|x'\|=1}} |f(x')| \cdot \|x\| = \|f\| \cdot \|x\| \ . \tag{I.15}$$

Así como hemos definido el dual de un espacio normado, puede definirse el enésimo dual en forma recursiva, es decir

$$E^{**\cdots\cdots*} = (((E^*)^*)^{\cdots\cdots})^*$$

donde cada uno de los espacios intermedios tiene una norma como en (I.14). Hay un caso que presenta especial interés, y es el del doble dual de un espacio normado, el espacio E^{**} dotado de la norma

$$\|\chi\| = \sup_{\substack{\varphi \in E^* \\ \|\varphi\|=1}} |\chi(\varphi)|$$

Este caso es importante porque existe una forma canónica de "sumergir" al espacio E dentro de E^{**}: si $x \in E$, y $\varphi \in E^*$, entonces el elemento x define una funcional $\widetilde{x} \in E^{**}$ que actúa sobre el punto φ de la siguiente manera

$$\widetilde{x}\,(\varphi) = \varphi(x) \tag{I.16}$$

Es claro que $\widetilde{x}$ es lineal, pero además es continua puesto que, si $\varphi_n \rightarrow_n \varphi$ en E^*, entonces la propiedad (I.15) nos dice que

$$\begin{aligned} |\widetilde{x}\,(\varphi_n) - \widetilde{x}\,(\varphi)| &= |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = |(\varphi_n - \varphi)\,(x)| \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\| \cdot \|x\| \rightarrow_n 0 \end{aligned}$$

Esto prueba que $\widetilde{x} \in E^{**}$.

Antes de seguir adelante vamos a necesitar un teorema muy importante que nos permite extender una funcional continua definida sobre un subespacio propio, a todo el espacio, de forma continua y sin alterar la norma. Este teorema tiene numerosas de aplicaciones, y hay varias versiones. En nuestro caso, vamos a dar las versiones sobre funcionales convexas.

Definición I.19 (funcional convexa) *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Una función ρ a valores reales definida sobre E que satisface*

$$\rho\,(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\rho(x) + (1-\alpha)\rho(y)$$

para todo $x, y \in E$, y todo $\alpha \in [0,1]$ se denomina **funcional convexa.**

Teorema I.20 (Hahn-Banach versión real) *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y ρ una funcional convexa sobre E. Supongamos que λ es una funcional lineal real definida sobre un subespacio S de E que satisface $\lambda(s) \leq \rho(s)$ para todo $s \in S$. Entonces existe una funcional Λ definida sobre E, que satisface $\Lambda(x) \leq \rho(x)$ para todo $x \in E$, y además Λ es una extensión de λ (es decir que $\Lambda(s) = \lambda(s)$ para todo $s \in S$).*

DEMOSTRACIÓN:

Haremos la demostración en dos pasos: primero demostraremos que si v es un vector de E que no está en S, entonces es posible extender la funcional λ a una funcional $\widetilde{\lambda}$ definida sobre el subespacio

$$\widetilde{S} = S \oplus < v >$$

de manera que tenga las propiedades requeridas. El segundo pasa es utilizar el Lema de Zorn para probar que este proceso de extensión se puede continuar hasta extender λ a todo el espacio E.

Para comenzar, observemos que si $\widetilde{\lambda}$ existe, su linealidad nos dice que basta saber cuanto vale sobre v, ya que entonces

$$\widetilde{\lambda}\,(av + s) = a\widetilde{\lambda}(v) + \widetilde{\lambda}(s) = a\widetilde{\lambda}(v) + \lambda(s) \tag{I.17}$$

Supongamos entonces que $s_1, s_2 \in S$ y $\alpha, \beta > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\beta\lambda(s_1) + \alpha\lambda(s_2) \quad &= \quad \lambda\,(\beta s_1 + \alpha s_2) \quad = \quad (\alpha+\beta)\lambda\left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}s_1 + \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}s_2\right) \\
&\leq \quad (\alpha+\beta)\rho\left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}s_1 + \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}s_2\right) \\
&= \quad (\alpha+\beta)\rho\left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\,(s_1 - \alpha v) + \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\,(s_2 + \beta v)\right) \\
&\leq \quad \beta\rho\,(s_1 - \alpha v) + \alpha p(s_2 + \beta v)
\end{aligned}$$

Así, para todo $\alpha, \beta > 0$ y $s_1, s_2 \in S$, vale

$$\frac{1}{\alpha}\left[-\rho\,(s_1 - \alpha v) + \lambda(s_1)\right] \leq \frac{1}{\beta}\left[p(s_2 + \beta v) - \lambda(s_2)\right]$$

Esto prueba que existe un número real r tal que

$$\sup_{\substack{s\in S\\ \alpha>0}} \left\{\frac{1}{\alpha}\left[-\rho\,(s - \alpha v) + \lambda(s)\right]\right\} \leq r \leq \inf_{\substack{s\in S\\ \beta>0}} \left\{\frac{1}{\beta}\left[\rho(s + \beta v) - \lambda(s)\right]\right\} \tag{I.18}$$

Vamos a darle un valor cualquiera entre los r en estas condiciones a la extensión sobre v, es decir $\widetilde{\lambda}(v) = r$. Evidentemente esta extensión es lineal y coincide con λ sobre S; falta probar que $\widetilde{\lambda}(x) \leq \rho(x)$ para todo $x \in \widetilde{S}$. Para esto volvamos a la ecuación (I.17).

Supongamos que $a > 0$; entonces, observando en (I.18) que el ínfimo sobre $\beta > 0$ es menor o igual que cualquiera de los valores de $\frac{1}{\beta}\left[p(s+\beta v) - \lambda(s)\right]$, (en particular con $\beta = a$)

$$\begin{array}{rclcl} \widetilde{\lambda}(x) & = & \widetilde{\lambda}\,(av+s) & = & a\widetilde{\lambda}(v) + \widetilde{\lambda}(s) = a\widetilde{\lambda}(v) + \lambda(s) = ar + \lambda(s) \\ & & & \leq & a \cdot \frac{1}{a}\left[\rho(s+av) - \lambda(s)\right] + \lambda(s) \\ & & & = & \rho(s+av) \quad = \quad \rho(x) \end{array}$$

El caso $a = 0$ es trivial ya que en ese caso $x \in S$; allí $\widetilde{\lambda}$ coincide con λ, que por hipótesis es menor o igual que ρ. El caso $a < 0$ se toma $\alpha = -a$, y entonces nuevamente de (I.18) se deduce que

$$\begin{array}{rclcl} \widetilde{\lambda}(-x) & = & \widetilde{\lambda}\,(-av-s) & = & (-a)\,\widetilde{\lambda}(v) - \lambda(s) = \alpha r - \lambda(s) \\ & & & \geq & \alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\left[-\rho\,(s-\alpha v) + \lambda(s)\right] - \lambda(s) \\ & & & = & -\rho(s-\alpha v) \\ & & & = & -\rho(s+av) \quad = \quad -\rho(x) \end{array}$$

y ahora sólo queda multiplicar por -1 para obtener

$$\widetilde{\lambda}(x) = -\widetilde{\lambda}(-x) \leq \rho(x)\,.$$

Ahora llamemos $\mathcal{E}$ a la familia de todos los pares (e, S) donde e es una extensión de λ definida sobre el subespacio S que satisface $e(x) \leq \rho(x)$ sobre S. Le damos un orden parcial a $\mathcal{E}$ diciendo que $(e_1, S_1) \preceq (e_2, S_2)$ si y sólo si $S_1 \subseteq S_2$ y además vale $e_1(x) = e_2(x)$ sobre S_1. Querríamos probar que toda cadena (es decir, todo subconjunto linealmente ordenado) de $\mathcal{E}$ tiene una cota superior en $\mathcal{E}$. Tomemos entonces una cadena $\mathcal{C} = \{(e_i, S_i)\}_{i \in I}$; entonces para todo par $i, j \in I$ vale $(e_i, S_i) \preceq (e_j, S_j)$ o bien vale $(e_j, S_j) \preceq (e_i, S_i)$. Es evidente que la unión

$$S_I = \cup_{i \in I}\,\{S_i\}$$

es un subespacio, porque $S_i \subseteq S_j$ o bien $S_j \subseteq S_i$ para todo $i, j \in I$, y entonces tomando elementos $x \in S_i$, $y \in S_j$ la suma está definida pues es la suma en el subespacio mayor, que es un miembro de la unión y por ende $x + y \in S_I$; el producto de un vector $x \in S_i$ por un escalar pertenece trivialmente al mismo S_i que x. Ahora definimos $e(x) = e_i(x)$ si $x \in S_i$. Resulta evidente que $(e, S_I) \succeq (e_i, S_i)$ para todo $i \in I$, lo que nos dice que (e, S_I) es cota superior de la cadena $\mathcal{C}$. Ahora el Lema de Zorn nos asegura que $\mathcal{E}$ tiene un elemento maximal, que es un par (Λ, E') tal que Λ es una extensión de λ, y además $\Lambda(x) \leq \rho(x)$ para todo $x \in E'$. El último detalle de la demostración es probar que E' es en realidad todo el espacio E; pero de no serlo entonces habría un vector z en $E - E'$

con el cual podríamos construir una extensión $\widetilde{\Lambda}$ de Λ repitiendo el procedimiento de la primera parte del teorema, con lo cual llegaríamos a un par $\left(\widetilde{\Lambda}, E' \oplus \langle z \rangle\right)$ que verifica trivialmente $\left(\widetilde{\Lambda}, E' \oplus \langle z \rangle\right) \succeq (\Lambda, E')$. Por la hipótesis de maximalidad de (Λ, E'), debe ser $\left(\widetilde{\Lambda}, E' \oplus \langle z \rangle\right) = (\Lambda, E')$, y por ende $E' \oplus \langle z \rangle = E'$. Ésto último es absurdo: debe ser entonces $E' = E$, y Λ una extensión de λ sobre todo el espacio E que satisface $\Lambda(x) \leq \rho(x)$ para todo $x \in E$.□

A partir del caso real es posible construir una variante del teorema anterior para espacios normados complejos, que es la siguiente

Teorema I.21 (Hahn-Banach versión compleja) *Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, y ρ una función sobre E a valores reales que satisface la desigualdad $\rho(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| \cdot \rho(x) + |\beta| \cdot \rho(y)$ para todo $x, y \in E$, y todo par $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| + |\beta| = 1$. Supongamos que λ es una funcional lineal compleja definida sobre un subespacio S de E que satisface $|\lambda(s)| \leq \rho(s)$ para todo $s \in S$. Entonces existe una funcional lineal compleja Λ definida sobre todo E que extiende a λ, y además vale $|\Lambda(x)| \leq \rho(x)$ para todo $x \in E$.*

Demostración:

Tomemos $l(x) = \Re e \{\lambda(x)\}$. Entonces l es una funcional lineal real sobre S, y como

$$l(ix) = \Re e \{\lambda(ix)\} = \Re e \{i\lambda(x)\} = -\Im m \{\lambda(x)\}$$

entonces

$$\lambda(x) = l(x) - il(ix) \tag{I.19}$$

Como l es real y además ρ restringida a $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \Im m \{z\} = 0\}$ es una funcional convexa, por el Teorema I.20 existe una extensión a valores reales L definida sobre todo el espacio E tal que $L(x) \leq \rho(x)$. Definamos

$$\Lambda(x) = L(x) - iL(ix)$$

Λ es claramente $\mathbb{R}$-lineal, y es una extensión de λ por la observación (I.19). Por otra parte la identidad $\Lambda(ix) = L(ix) - iL(i\,(ix)) = iL(x) + L(ix) = i\Lambda(x)$ permite probar fácilmente que Λ es $\mathbb{C}$-lineal. Veamos ahora que su módulo está acotado por ρ. Notemos que si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $|\alpha| = 1$ entonces $\rho(\alpha x) \leq |\alpha| \cdot \rho(x) = \rho(x) = \rho(\alpha^{-1}\alpha x) \leq \rho(\alpha x)$, puesto que también vale $|\alpha^{-1}| = 1$, lo que prueba que $\rho(\alpha x) = \rho(x)$. Esta igualdad junto con el hecho de que $\Re e \{\Lambda(x)\} = L(x)$ nos dice (llamando $\theta = \arg\{\Lambda(x)\}$) que

$$|\Lambda(x)| = e^{-i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-i\theta}x) = L(e^{-i\theta}x) - iL(e^{-i\theta}x) = L(e^{-i\theta}x)$$

puesto que el primer término de la igualdad es real, y por ende el anteúltimo también debe serlo. Ahora la condición sobre L nos dice que

$$|\Lambda(x)| = L(e^{-i\theta}x) \leq \rho(e^{-i\theta}x) = \rho(x)\,.□$$

A partir de los teoremas de Hahn-Banach se deducen una serie de corolarios, de los cuales sólo mencionaremos algunos:

Corolario I.22 *Sea E un espacio normado, S un subespacio de E y λ un elemento de S^*. Entonces existe $\varphi \in E^*$ que extiende a λ y además $\|\varphi\|_{E^*} = \|\lambda\|_{S^*}$*

DEMOSTRACIÓN:

Aplicar el Teorema I.21 a la función $\rho(x) = \|\lambda\|_{S^*} \cdot \|x\|_E$.□

Corolario I.23 *Sea x un elemento no nulo del espacio normado E. Entonces existe una $\varphi \in E^*$, tal que $\|\varphi\|_{E^*} = 1$ y $\varphi(x) = \|x\|_E$. En particular, si $E \neq \{0\}$, entonces $E^* \neq \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Tomemos el subespacio $S = \langle x \rangle$, generado por x, y sobre él definamos $\lambda(ax) = a\|x\|_E$ ($a \in \mathbb{F}$). Claramente λ es acotada y además $\|\lambda\|_{S^*} = 1$. Por el corolario anterior, existe $\varphi \in E^*$ que extiende a λ y $\|\varphi\|_{E^*} = \|\lambda\|_{S^*} = 1$. Por otra parte

$$\varphi(x) = \lambda(x) = \|x\|_E \,.\square$$

Corolario I.24 *Sea E un espacio normado. Entonces E^* separa los puntos de E (es decir, para todo par de puntos $x, y \in E$ con $x \neq y$, existe $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$).*

DEMOSTRACIÓN:

Por la linealidad de las funcionales, basta probar que para todo $x \in E$, $x \neq 0$, existe una $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(x) \neq 0$ y esto ocurre por el Corolario I.23.□

Corolario I.25 *Sea Z un subespacio de un espacio normado E. Supongamos que y es un elemento de X tal que $d(y, Z) = d$. Entonces existe $\varphi \in E^*$ tal que $\|\varphi\| \leq 1$, $\varphi(y) = d$ y $\varphi(z) = 0$ para todo $z \in Z$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $S = Z \oplus < y >$, y definamos una funcional lineal $\lambda : S \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera: para $s = z_0 + ay$ ($z \in Z$, $a \in \mathbb{C}$) pongamos $\lambda(s) = ad$. Evidentemente $\lambda(y) = d$, y $\lambda(z) = 0$ para todo $z \in Z$, pero además

$$\begin{array}{rcccl} |\lambda(s)| & = & |ad| & = & |a \cdot \inf_{z \in Z} \|y + z\|_E| \\ & & & = & |\inf_{z \in Z} \|ay + az\|_E| \\ & & & \leq & |\inf_{z' \in Z} \|ay + z'\|_E| \\ & & & \leq & \|ay + z_0\|_E \\ & & & = & \|s\|_E \end{array}$$

lo que nos dice que $\lambda \in S^*$. La desigualdad anterior además muestra que $\|\lambda\|_{S^*} \leq 1$, y entonces por el Corolario I.22 existe una funcional $\varphi \in E^*$ que es una extensión de λ con la misma norma (y por ende tiene las propiedades requeridas).□

Ahora podemos completar nuestra disquisición sobre el doble dual, que había quedado pendiente. Habíamos probado que, para todo elemento $x \in E$, la funcional definida como $\widetilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$ (sobre vectores de E^*) es lineal y continua. Ahora veamos la relación entre sus normas. Por un lado

$$\|\widetilde{x}\|_{E^{**}} = \|\widetilde{x}\| = \sup_{\substack{\varphi \in E^* \\ \|\varphi\|=1}} |\widetilde{x}(\varphi)| = \sup_{\substack{\varphi \in E^* \\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(x)| \leq \sup_{\substack{\varphi \in E^* \\ \|\varphi\|=1}} \|\varphi\| \cdot \|x\|_E = \|x\|_E$$

lo que prueba que $\|\widetilde{x}\|_{E^{**}} \leq \|x\|_E$. Pero el Corolario I.23 al teorema de Hahn-Banach nos dice que existe $\varphi \in E^*$ con $\|\varphi\|_{E^*} = 1$ y $\varphi(x) = \|x\|_E$, lo que prueba que el supremo se alcanza y por ende $\|\widetilde{x}\|_{E^{**}} = \|x\|_E$.

Vamos a formalizar un poco esta identificación:

Definición I.26 (inclusión canónica) *Sea E un espacio normado, y E^{**} su doble dual. Llamaremos* **inclusión canónica** *de E en E^{**} a la aplicación $J_E : E \to E^{**}$, $J_E(x) = \widetilde{x}$.*

Claramente J_E es lineal e inyectiva, puesto que todas las isometrías lo son automáticamente. Todas estas observaciones nos llevan al importante

Teorema I.27 *La inclusión $J_E : E \to J_E(E) \subset E^{**}$ es un isomorfismo isométrico.*

Esto motiva la siguiente definición:

Definición I.28 *Si la inclusión J_E es sobreyectiva se dice que el espacio normado E es* **reflexivo**.

Es importante notar que puede existir un isomorfismo isométrico de E sobre E^{**}, y que E no sea reflexivo (es decir, que J_E no sea epimorfismo).

- NOTA: En 1950, R. James fue el primero en exhibir un espacio normado con ésta propiedad, que es el siguiente (se recomienda saltear este ejemplo en una primera lectura, hasta tener una idea sobre la teoría de topologías débiles):

  Consideremos el espacio $\mathbf{c}_0 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donde un elemento típico lo notaremos de la forma

  $$x = (x(1), x(2), ..., x(n), ...) .$$

  Dentro de él consideremos la función

  $$\|x\| = sup \mid \sum_{i=1}^{n} (x(p_i) - x(p_{i+1}))^2 + (x(p_{n+1}) - x(p_1))^2 \mid^{\frac{1}{2}} \tag{I.20}$$

  donde el supremo se toma sobre todos los $n \in \mathbb{N}$, y todas las sucesiones finitas estrictamente crecientes de naturales $(p_1, p_2, ..., p_{n+1})$.

  Se toma como espacio normado el subespacio B de los elementos x de $\mathbf{c}_0$ para los cuales $\|x\| < \infty$. Se prueba que $\| \quad \|$ es en efecto una norma para B (para una demostración rigurosa ver [James1][Example,p.523]).

Pero $(B, \|\quad\|)$ no puede ser reflexivo, ya que como veremos cuando tratemos topologías débiles, una caracterización de la reflexividad está dada por la compacidad débil de la bola unitaria: la sucesión de elementos

$$y_k = (1, 1, ..., 1, 0, 0, ...)$$

que consiste en k unos y luego ceros, está en la bola unitaria de B, pero no tiene ninguna subsucesión débilmente convergente en B. Para probarlo basta observar que el elemento del espacio $\mathbf{c} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definido como

$$y = (1, 1, ..., 1, ...)$$

es el límite débil de la sucesión $\{y_k\}$ mirada como subconjunto de $\mathbf{c}_0$ (ejercicio-utilizar la caracterización del dual de $\mathbf{c}_0$), y en consecuencia es el límite débil de $\{y_k\}$ mirada como subconjunto en B. Esto asegura que toda subsucesión tiene que converger débilmente al mismo punto. Pero evidentemente $y \notin \mathbf{c}_0$, y en consecuencia $y \notin B$, lo que nos asegura que no hay ninguna subsucesión convergente en B, probando que la bola no es débilmente compacta, y por ende el espacio $(B, \|\quad\|)$ no es reflexivo.

A partir de ahora llamemos $B = (B, \|\quad\|)$, $B^* = (B, \|\quad\|)^*$ y $B^{**} = (B, \|\quad\|)^{**}$.

Sea $e_k = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...) \in B$: es sencillo probar que $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una base para B. Por otra parte podemos definir $f^j \in B^*$ como $f^j(e_k) = \delta_k^j$, y extenderla linealmente a todo el espacio B. Se prueba también que $\left\{f^j\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una base para B^* (ver [James2][Theorem,p.174]).

Para cada $F \in B^{**}$ pongamos $F(i) = F\left(f^i\right)$; es inmediato notar que como para toda $f \in B^*$ hay una escritura de la forma

$$f = \sum_i a_i f^i, \tag{I.21}$$

entonces debe valer

$$F(f) = F(\sum_i a_i f^i) = \sum_i a_i F(i), \tag{I.22}$$

es decir que $\{F(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ describe completamente F. De la última ecuación, tomando módulos, y observando que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} a_i F(i) = f(\sum_{i=1}^{n} e_i F(i))$$

se deduce que

$$|F(f)| \leq \|f\|_{B^*} \cdot \left(\lim_n \| \sum_{i=1}^{n} F_i e_i \|\right)$$

es decir, $\|F\|_{B^{**}} \leq \lim_n \left\|\sum_{i=1}^{n} F(i)\, e_i\right\|$. Algo un poco más complicado de probar (ver [James2][Theorem,p.174]) es que toda sucesión

$$F = (F(1), F(2), ..., F(n), ...)$$

tal que $\lim_n \left\|\sum_{i=1}^{n} F(i)\, e_i\right\| < \infty$ define un elemento $F \in B^{**}$ que actúa sobre funcionales del dual en la manera obvia, es decir si $f \in B^*$ es como en (I.21), entonces $F(f)$ se define como en (I.22). Además se puede probar para toda $F = \{F(n)\} \in B^{**}$ que

$$\|F\|_{B^{**}} = \lim_k \| \sum_{i=1}^{k} F(i)\, e_i \| \ .$$

Como $\lim_k \| (F(1), F(2), ..., F(k), 0, 0, ...) \|$ es evidentemente menor o igual a $\sup_k \| (F(1), F(2), ..., F(k), 0, 0, ...) \|$, y éste último coincide con

$$\sup_k \left\{ \max_n \max_{\{(p_1, p_2, ..., p_{n+1})\} \subset \{1, ..., k\}} | \sum_{i=1}^{n} (F(p_i) - F(p_{i+1}))^2 + (F(p_{n+1}) - F(p_1))^2 |^{\frac{1}{2}} \right\},$$

esto prueba que $\|F\|_{B^{**}} \leq \|F\|$ (pensando a F como el vector $F = \{F(n)\}$, y usando $\| \quad \|$ para denotar la función (I.20) o bien

$$\|F\|_{B^{**}} \leq \sup \mid \sum_{i=1}^{n} (F(p_i) - F(p_{i+1}))^2 + (F(p_{n+1}) - F(p_1))^2 \mid^{\frac{1}{2}} .$$

Como B es completo, el operador ($F \mapsto \{F(n)\}$) de B en su espacio asociado de sucesiones con la norma $\sup_k \| \sum_{i=1}^{k} F(i) e_i \|$ es acotado inferiormente (ver el Lema II.27 en la sección II.7), y entonces existe una constante D tal que

$$\sup_k \| \sum_{i=1}^{k} F(i) e_i \| \leq D. \lim_k \| \sum_{i=1}^{k} F(i) e_i \|$$

Esta expresión nos dice que necesariamente debe existir el límite $\lim_n F(n)$, tomando las subsucesiones $p_1 = 1$, $p_i = 0$ ($i = 2....n$), y finalmente $p_{n+1} = n+1$.

En otras palabras: puede pensarse al espacio B^{**} como en el subespacio de los vectores de l_∞ para los cuales $\|x\| < \infty$, el cual está incluido por la observación anterior en el subespacio $c \subset l_\infty$. Similarmente, el espacio B es la intersección del mismo subespacio anterior (aquel para el cual $\|x\| < \infty$) con el subespacio $\mathbf{c}_0 \subset \mathbf{c} \subset l_\infty$. Es decir que B es un hiperplano cerrado dentro de B^{**} (ver la sección I.3.1), y se puede descomponer a B^{**} como la suma de B y un subespacio de dimensión uno que no esté en él, para el cual valga $\|x\| < \infty$. Un candidato obvio es el subespacio generado por $v = (1, 1, 1, 1, ...)$.

Para construir la isometría, consideremos la correspondencia

$$x = (x(1), ..., x(n), ...) \overset{\Phi}{\longleftrightarrow} (x(2) - x(1), x(3) - x(1), ..., x(n) - x(1), ...) ,$$

y llamemos $\Phi(x) = F_x$ (es decir $\Phi(x(n)) = F_x(n)$). Se prueba que $\left\| \sum_{i=1}^{n} F_x(i) e_i \right\| \leq \|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que nos asegura que $F_x \in B^{**}$, y además que $\|F_x\| \leq \|x\|$. También se prueba la otra desigualdad, es decir $\|F_x\| \geq \|x\|$, lo que nos asegura que estamos en presencia de una isometría (ver [James2][Example,p.177]).

El último detalle es probar que Φ es en efecto un epimorfismo. Si $F = \{F(n)\} \in B^{**}$, y $L = \lim_n F(n)$, entonces

$$x_F = (-L, F(1) - L, F(2) - L, ..., F(n) - L, ...)$$

es la preimagen de F por Φ, es claramente un elemento de $\mathbf{c}_0$, y además

$$\|x_F\| = \sup \mid \sum_{i=1}^{n} (F(p_i) - F(p_{i+1}))^2 + (F(p_{n+1}) - F(p_1))^2 \mid^{\frac{1}{2}} \leq D. \|F\| < \infty,$$

es decir que $x_F \in B$.

I.6 Operadores lineales

Un operador lineal es simplemente una transformación lineal entre espacios vectoriales $A : E \to F$ (como por ejemplo, las funcionales lineales al cuerpo base). En el caso particular de los espacios normados, el hecho de que los abiertos de cada uno de ellos estén definidos por las respectivas normas (o sea ambos espacios son métricos) nos permite utlizar sucesiones para caracterizar continuidad, como se prueba en cualquier curso de cálculo avanzado. Es decir que en vez de pedir que la preimagen de cualquier abierto (cerrado) de F sea abierta (cerrada) en E, podemos dar la

Definición I.29 (continuidad) *Diremos que un operador lineal* $A : (E, \| \quad \|_E) \to (F, \| \quad \|_F)$ *es* **continuo** *cuando para toda sucesión* $\{x_n\}$ *en* E*, convergente a un punto* x *del mismo espacio, la sucesión* $\{y_n = Ax_n\}$ *es convergente al punto* $y = Ax$ *en* F*.*

Aunque en muchos casos con esto bastará, en otros será necesario utilizar alguna de las siguientes equivalencias (en particular la quinta)

Lema I.30 *Son equivalentes:*

1. *A es continuo*
2. *A es continuo en algún $x_0 \in E$.*
3. *A es continuo en 0.*
4. *La preimagen en E de alguna bola cerrada de F tiene interior no vacío ($\exists\, r > 0$ tal que $\left(A^{-1}\left\{y \mid \|y\|_F \leq r\right\}\right)^o \neq \emptyset$).*
5. *A es acotado ($\exists\, M > 0$ tal que $\|Ax\|_F \leq M\,\|x\|_E \quad \forall\, x \in E$).*

Demostración:

(1 $\Rightarrow$ 2) Es trivial.

(2 $\Rightarrow$ 3) Supongamos que $x_n \to 0$. Tomemos $z_n = x_n + x_0$; es evidente que $z_n \to x_0$, con lo cual $Az_n \to Ax_0$ por la hipótesis. Pero entonces

$$Ax_n = A\left(z_n - x_0\right) = Az_n - Ax_0 \to_n 0.$$

(3 $\Rightarrow$ 4) Lo haremos por el absurdo: supongamos que para todo $r > 0$, el conjunto $\{x \mid \|Ax\|_F \leq r\}$ tiene interior vacío. Esto es lo mismo que decir que dado un un número $r > 0$ y un punto $x \in E$ tal que $\|Ax\|_F \leq r$, existe un z arbitrariamente cerca de x tal que $\|Az\|_F > r$. Si $r = n$, y tomamos $x = 0$, evidentemente $\|Ax\|_F = 0 \leq n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Ahora para cada n tomemos x_n en E tal que $\|x_n\|_E < \frac{1}{n}$, y $\|Ax_n\|_F > n$. La verificación de que $\{x_n\}$ es una sucesión que tiende a cero en E, pero $\{Ax_n\}$ no tiende a cero en F es inmediata, y entonces A no puede ser continuo en cero.

(4 $\Rightarrow$ 5) Supongamos que $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in E \mid \|x - x_0\|_E < \varepsilon\}$ está completamente contenido en el interior de la preimagen de la bola de radio r. En particular, x_0 está en el interior. Por otro lado, si $\|x\|_E < \varepsilon$, entonces

$$\|Tx\|_F \leq \|T(x + x_0)\|_F + \|T(x_0)\|_F \leq r + r = 2r$$

puesto que $x + x_0$ está en $B_\varepsilon(x_0)$, x_0 también, y $T\left(B_\varepsilon(x_0)\right) \subset \left\{y \mid \|y\|_F \leq r\right\}$. Entonces para todo x no nulo de E, simplemente escribiendo

$$x = \frac{2\,\|x\|_E}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2\,\|x\|_E} \cdot x\right) = \frac{2\,\|x\|_E}{\varepsilon} \cdot x'$$

(donde $\|x'\|_E = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$), se obtiene

$$\|Tx\|_F = \frac{2\,\|x\|_E}{\varepsilon}\,\|Tx'\|_F \leq \frac{2\,\|x\|_E}{\varepsilon} \cdot 2r = \frac{4r}{\varepsilon}\,\|x\|_E = M\,\|x\|_E\,.$$

$(5 \Rightarrow 1)$ Es evidente a partir de la desigualdad

$$\|Ax - Ax_n\|_F = \|A(x - x_n)\|_F \leq M \|x - x_n\|_E . \square$$

A causa del cuarto punto del lema anterior, para un operador lineal, la palabra "acotado" es sinónimo de "continuo", y el término más utilizado para hablar de ellos es el primero; el mismo punto motiva también la siguiente definición

Definición I.31 (el espacio de operadores) *Llamaremos $\mathcal{L}(E, F)$ al conjunto de operadores lineales acotados $A : E \to F$ de un espacio normado en otro, que resulta un espacio normado con la suma y el producto por escalares definidos punto a punto, y la norma*

$$\|A\| = \inf \{M > 0 \mid \|Ax\|_F \leq M \|x\|_E \quad \forall\, x \in E\} .$$

Es evidente que la función definida arriba saca escalares, y que si $\|A\| = 0$ entonces $\|Ax\|_F = 0$ para todo x en E, lo que prueba que $A \equiv 0$. La demostración de la subaditividad (propiedad (I) de la norma) es más sencilla de probar luego de este lema previo, que tiene importancia por sí mismo:

Lema I.32 *Son iguales:*

1. $\|A\|$
2. $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
3. $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$
4. $\sup_{\|x\| = 1} \|Ax\|$

Demostración:

La igualdad de 2, 3 y 4 es evidente por la linealidad de A y la propiedad (II) de la norma; nos limitaremos a demostrar la igualdad entre 1 y 2:

Llamando $\alpha = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, probemos primero que $\|A\| \geq \alpha$. Por la definición de α, dado $\varepsilon > 0$, existe x_ε tal que $\frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} > \alpha - \varepsilon$, despejando obtenemos $\|Ax_\varepsilon\| > (\alpha - \varepsilon) \|x_\varepsilon\|$, y por la definición de $\|A\|$ debe ser $\alpha - \varepsilon < \|A\|$. El hecho de que esta desigualdad sea válida para todo número positivo ε nos dice que $\alpha \leq \|A\|$. Ahora veremos que la desigualdad estricta (es decir $\alpha < \|A\|$) es imposible; para ello supongamos que esto es posible, y definamos $\delta = \|A\| - \alpha > 0$. Buscamos el punto medio entre $\|A\|$ y $\|A\| - \delta$, y es evidente que α debe seguir siendo menor (o sea $\alpha < \|A\| - \frac{\delta}{2}$). Pero como α es un supremo, es evidente que vale la desigualdad

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha < \|A\| - \frac{\delta}{2} \quad \forall\, x \neq 0,$$

que despejando nos lleva a que

$$\|Ax\| \leq \left(\|A\| - \frac{\delta}{2}\right)\|x\| \quad \forall\, x \in E.$$

Pero $\|A\|$ era la menor de las cotas en este sentido, y esta otra es menor: es un absurdo que nos dice que $\alpha \geq \|A\|$. Esta desigualdad junto con la anterior, nos da el resultado buscado, es decir $\|A\| = \alpha = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.□

Ahora la prueba pendiente de la subaditividad es inmediata, ya que si $C = A + B$, la misma definición dice $Cx = Ax + Bx$ para todo $x \in E$, y ahora sólo hay que pasar dividiendo $\|x\|$ y tomar supremo en la desigualdad

$$\|Cx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|\ .\square$$

Evidentemente, todas las definiciones y razonamientos previos se aplican al caso en que el espacio normado F coincide con el cuerpo $\mathbb{F}$. Así, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{F})$.

I.6.1 Producto de operadores

Otra definición importante sobre la que no profundizaremos en este momento, es la del producto de dos operadores

Definición I.33 *Sean $A : E \to F$ y $B : F \to G$ dos operadores lineales entre espacios vectoriales. Se llama* **producto** *BA al operador composición $B \circ A : E \to G$, es decir al operador definido por*

$$BAx = B(Ax), \text{ para todo } x \in E.$$

Es evidente que el producto de operadores acotados es un operador acotado, pero podemos ir más lejos y probar que, en realidad, $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$. Esto resulta simplemente de utilizar la definición del producto, cualquiera de las expresiones para la norma que utilizen el supremo y las desigualdades

$$\|BAx\| \leq \|B(Ax)\| \leq \|B\| \cdot \|Ax\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|\ .\square$$

Trataremos con más detalle el producto de operadores cuando nos ocupemos de las álgebras de Banach.

I.6.2 Ejemplos de operadores lineales acotados

Éstos son sólo algunos, pero vamos a utilizarlos bastante en los próximos capítulos, y por eso conviene ir familiarizándose con ellos

Ejemplo 14 *Sean E, F espacios normados, $f \in E^*$ y $z \in F$. Entonces se define el operador $A : E \to F$ como $Ax = f(x)z$. Es un operador con rango finito, ya que* $\dim(Ran\,(A)) = \dim(< z >) = 1$*. Se deduce trivialmente que* $\|A\| = \|f\| \cdot \|z\|$.

Ejemplo 15 *Similarmente, tomando $f_1, ..., f_n \in E^*$ y $z_1, ..., z_n \in F$ se define el operador $A : E \to F$ como $Ax = \sum_{k=1}^n f_k(x)z_k$. A es evidentemente acotado, ya que vale* $\|A\| \leq \sum_k \|f_k\| \cdot \|z_k\| \leq n \cdot \max_k \|f_k\| \cdot \max_k \|z_k\|$.

Es interesante observar que todo **operador acotado de rango finito** *tiene esta forma (rango finito significa simplemente que la dimensión como $\mathbb{F}$-espacio vectorial del rango del operador es finita). Vamos a dar una demostración rigurosa de este hecho, pero hay que utilizar los resultados de la sección sobre espacios normados de dimensión finita (sección I.7) de más abajo, ya que si* $\dim(Ran\,(A)) = n < \infty$*, entonces $Ran\,(A) \simeq \mathbb{F}^n$:*

Si $\{z_1, ..., z_n\}$ es una base de $Ran\,(A)$, podemos escribir, para cada $x \in E$, el vector $Ax \in Ran\,(A)$ como $Ax = \sum_{k=1}^n \varphi_k(Ax)z_k$, y el Lema I.38 de la mencionada sección nos dice que cada φ_k es un funcional lineal y acotada (como función de Ax). Ahora consideramos las funcionales lineales $f_k = \varphi_k \circ A : E \to \mathbb{F}$; por ser composición de funciones continuas son continuas, y por ser composición de operadores lineales resultan lineales. Por lo tanto, para cada $x \in E$,

$$Ax = \sum_{k=1}^n f_k(x)z_k$$

y todas las $f_k \in E^*$.

Ejemplo 16 *Es importante señalar la importancia de que el operador del ejemplo anterior fuera por hipótesis acotado, ya que, como veremos, si el dominio de un operador es un espacio de dimensión finita, entonces resulta automáticamente acotado (Teorema I.40), pero es posible que el rango de un operador sea finito, y éste no sea acotado (si valiera la recíproca al Teorema I.40, todas las funcionales lineales serían acotadas, puesto que* $\dim_{\mathbb{F}}(Ran\,\{funcional\ lineal\}) = \dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F} = 1$*; ésto es falso, como vimos cuando definimos el espacio dual (sección I.5, Ejemplo 13).*

Ejemplo 17 *Si X es un espacio compacto y $\varphi \in C(X)$, se define el* **operador de multiplicación** *$M_\varphi : C(X) \to C(X)$ como el operador $(\psi \longmapsto \varphi\psi)$. Es evidente la desigualdad*

$$\|M_\varphi\| = \sup_{\substack{\psi \in C(X) \\ \|\psi\|_\infty = 1}} \|\varphi\psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$$

que nos dice que M_φ es acotado; por otra parte, tomando la función 1_X que vale constantemente uno sobre X, se obtiene $M_\varphi(1_X) = \varphi$ y por ende $\|M_\varphi(1_X)\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$. Observando que $\|1_X\|_\infty = 1$, se deduce que $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

Por otra parte puede observarse que $\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in X$ implica M_φ inyectivo. Veremos más adelante que no es necesario pedir tanto para obtener inyectividad.

Ejemplo 18 *Se puede hacer exactamente lo mismo para los espacios $L^p\left(X, \sum, \mu\right)$, teniendo cuidado de elegir una función que haga caer al producto de nuevo dentro de L^p. El caso más común es elegir una $\varphi \in L^\infty$, ya que en ese caso (si F es el conjunto de medida nula sobre el que φ no está acotada)*

$$\left\|M_\varphi(\psi)\right\|_p = \left(\int_X |\varphi\psi|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{X\cap F} |\psi|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t\in X\cap F} |\varphi(t)| = \|\psi\|_p \cdot \|\varphi\|_\infty$$

de donde se deduce también que M_φ es un operador acotado, con norma **p** *menor o igual que $\|\varphi\|_\infty$. En este caso se observa que para definir correctamente el operador M_φ y probar su continuidad, hay que trabajar sobre el espacio $\left(\mathcal{L}^p, \| \quad \|_p\right)$, que es un normado (ver sección II.22).*

Ejemplo 19 *Sea $\theta : Y \to Z$ una función continua entre espacios compactos. Se define el* **operador de composición** *$c_\theta : C(Z) \to C(Y)$ como el operador $(\varphi \longmapsto \varphi \circ \theta)$. Es obviamente lineal; por otra parte su norma es exactamente uno, puesto que tomar supremo sobre* **im** *$\theta \subset Z$ es más restringido que tomar supremo sobre todo Z, y entonces*

$$\begin{aligned} \|c_\theta\| &= \sup_{\varphi\in C(Z)\,,\, \|\varphi\|_\infty=1} \|\varphi \circ \theta\|_\infty &=& \sup_{\|\varphi\|_\infty=1} \sup_{y\in Y} |\varphi(\theta(y))| \\ && \leq & \sup_{\|\varphi\|_\infty=1} \sup_{z\in Z} |\varphi(z)| \\ && = & \sup_{\|\varphi\|_\infty=1} \|\varphi\|_\infty = 1\,. \end{aligned}$$

Ahora $c_\theta(1_Z) = 1_Y$, usando la notación del Ejemplo 17 y como $\|1_Z\|_\infty = 1$ y $\|1_Y\|_\infty = 1$, resulta $\|c_\theta\| = 1$.

Ejemplo 20 *Si X es un espacio compacto y μ una medida de Borel finita sobre X, tomando una función continua cualquiera $k \in C(X \times X)$ se define el* **operador integral con núcleo** *k,*

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy \qquad (f \in C(X))$$

Es fácil probar que $Kf \in C(X)$ si $f \in C(X)$. Así, $K : C(X) \to C(X)$ es un operador claramente lineal, para el cual vale la cota

$$\|K\| = \sup_{\|f\|=1} \|Kf\|_\infty = \sup_{\|f\|=1} \left\|\int_0^1 k(x,y)f(y)dy\right\|_\infty \leq \|k\|_\infty$$

Hay ejemplos en los que k no es continuo pero K sigue siendo un operador acotado. Así, por ejemplo, si $k(x,y) = \chi_{[0,x]}(y)$ *(la función característica de* $\{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : y \leq x\}$*), se obtinene el* **operador de Volterra** $V : L^1[0,1] \longrightarrow L^1[0,1]$

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Ejemplo 21 *Consideremos el espacio vectorial de sucesiones* $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ *: sobre él se pueden definir en forma algebraica los operadores* $S : H \to H$ *y* $T : H \to H$*, el* **shift a derecha** *y el* **shift a izquierda** *respectivamente, como*

$$(x_1, x_2, x_3, ...) \xrightarrow{\quad T \quad} (x_2, x_3, ...)$$

$$(x_1, x_2, x_3, ...) \xrightarrow{\quad S \quad} (0, x_1, x_2, ...)$$

Ahora podemos pensar en la restricción de los mismos a los subespacios normados $H \subset \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ *que hemos considerado hasta el momento, a saber*

1. $l_p(\mathbb{F})$, $1 \leq p < \infty$
2. $l_\infty(\mathbb{F})$
3. $\mathbf{c}(\mathbb{F})$
4. $\mathbf{c}_0(\mathbb{F})$

Los codominios coinciden en todos los casos con los dominios.

En cualquier caso es inmediato verificar que S *es una isometría y que* $\|T\| = 1$*, (aunque no valga* $\|Tx\| = \|x\|$ *para todo* $x \in H$*).*

Ejemplo 22 *Si* E *y* F *son dos espacios con bases* $\{e_n\}$ *y* $\{f_k\}$ *respectivamente; entonces para todo operador acotado* $A : E \to F$*, basta conocer el valor de* A *sobre la base* e_n *para saber cuanto vale sobre todo el espacio (observar la semejanza con los resultados de la sección II.2).*

Por otra parte, si $\{f_k\}$ *es una base de Schauder se deduce que basta con conocer los coeficientes de cada* Ae_n *en la base* $\{f_k\}$ *para dar una descripción completa del operador* A*, ya que, si* $x \in E$ *y* $x = \sum_n e_n(x)e_n$

$$Ax = \sum_k f_k(Ax)f_k = \sum_k f_k(A\sum_n e_n(x)e_n)f_k\,,$$

como cada f_k *es continua,*

$$Ax = \sum_k \left(\sum_n f_k(Ae_n(x)e_n)\right) f_k = \sum_k \sum_n e_n(x)f_k(Ae_n)f_k\,;$$

por otra parte

$$Ax = A\left(\sum_n e_n(x)e_n\right) = \sum_n e_n(x)Ae_n = \sum_n e_n(x)\left(\sum_k f_k(Ae_n)f_k\right),$$

es decir

$$Ax = \sum_k\sum_n e_n(x)f_k(Ae_n)f_k = \sum_n\sum_k e_n(x)f_k(Ae_n)f_k. \tag{I.23}$$

Si $\alpha_{nk} = f_k(Ae_n)$, $\{\alpha_{nk}\}$ *caracteriza completamente al operador* A : *si* $x = \sum_n e_n(x)e_n$ *entonces*

$$Ax = \sum_{k,n} e_n(x)\alpha_{nk}f_k\,,$$

donde la suma doble no presenta ninguna ambigüedad, debido a la ecuación (I.23).

Esta escritura tiene una interpretación evidente: puede pensarse al operador A *como una matriz infinita donde en la columna enésima se pone la expresión de* Ae_n *en las "coordenadas" de la base* $\{f_n\}$, *con lo cual los coeficientes de la matriz son los* α_{nk}, *y para aplicarle* A *a un vector* x *de* E *basta escribir a éste en las "coordenadas" de la base* $\{e_n\}$ *y luego hacer el producto (como matrices) de* $\{\alpha_{nk}\}$ *con este vector columna. El resultado son las coordenadas en la base* $\{f_n\}$ *del vector* Ax.

I.6.3 El operador adjunto

Este operador se puede pensar como el operador "dual" (en el sentido algebraico) de un operador acotado $A : E \to F$, pero restringido a los espacios duales F^* y E^*.

Definición I.34 *Sean* E, F *espacios normados, y* A *un operador acotado entre ellos. Entonces se define el operador* $A^* : F^* \to E^*$ *como*

$$\left(A^*\varphi\right)(x) = \varphi\left(Ax\right) \tag{I.24}$$

para $\varphi \in F^*$ *y* $x \in E$. *Este operador es lineal y acotado, y se denomina* **adjunto de** A.

Es evidente que se trata de un operador lineal; pero por otra parte A^* es un operador acotado, ya que

$$\begin{aligned}
\|A^*\| = \sup_{\|\varphi\|=1}\|A^*\varphi\| &= \sup_{\|\varphi\|=1}\sup_{\|x\|=1}\left|\left(A^*\varphi\right)(x)\right| \\
&= \sup_{\|\varphi\|=1}\sup_{\|x\|=1}\left|\varphi\left(Ax\right)\right| \\
&= \sup_{\|\varphi\|=1}\sup_{\|x\|=1}\left|\varphi\left(Ax\right)\right| \\
&= \sup_{\|x\|=1}\sup_{\|\varphi\|=1}\left|\varphi\left(Ax\right)\right| \\
&\le \sup_{\|x\|=1}\sup_{\|\varphi\|=1}\|\varphi\|\cdot\|Ax\| \\
&\le \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| \\
&= \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = \|A\| < \infty
\end{aligned}$$

(los supremos son intercambiables por ser todos los términos positivos).

En realidad, la desigualdad es una igualdad: en efecto, por el Corolario I.23 al teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi \in F^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi(Ax) = \|Ax\|$, lo que nos dice que el supremo se alcanza. Esto prueba que vale $\|A^*\| = \|A\|$, lo que nos dice que el operador $\Phi : \mathcal{L}(E,F) \to \Phi(\mathcal{L}(E,F)) \subset \mathcal{L}(F^*,E^*)$ definido por $\Phi(A) = A^*$ es un isomorfismo isométrico, es decir, $\mathcal{L}(E,F)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(F^*,E^*)$. En muchos casos se trata de un subespacio propio.

Obsérvese que Φ es $\mathbb{F}$-lineal, es decir que vale sacar escaleres **sin conjugar**:

$$(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^* .$$

Obviamente el dual de la identidad es la identidad del dual, es decir $I_d^*(E) = I_d(E^*)$; ahora supongamos que $A : F \to G$ y $B : E \to F$ son dos operadores entre espacio normados. Entonces podemos tomar el producto $AB : E \to G$, y también su dual $(AB)^* : G^* \to E^*$. En ese caso es fácil ver que vale la identidad

$$(AB)^* = B^* A^* . \tag{I.25}$$

y a partir de ésta, si A es inversible, tomando $B = A^{-1}$ se deduce también la identidad

$$(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^* .$$

Se define, como en el caso de espacios duales, el operador "doble adjunto", como el operador adjunto del adjunto: $A^{**} = (A^*)^*$.

Proposición I.35 *Consideremos la inclusión $J_E : E \to E^{**}$. Entonces el operador doble adjunto coincide exactamente con el operador A sobre la imagen de J_E: más precisamente, $A^{**} J_E(x) = J_F(Ax)$ para todo $x \in E$.*

Demostración:

De la definición se deduce que para $A^{**} : E^{**} = E \to F^{**}$ vale

$$(A^{**}\varphi)\,\chi = \varphi\,(A^*\chi)$$

donde $\chi \in F^*$ y $\varphi \in E^{**}$. Si $\varphi \in Ran\,(J_E)$, podemos tomar un $x \in E$ tal que $J_E(x) = \varphi$, y entonces

$$(A^{**} J_E(x))\,\chi = J_E(x)\,(A^*\chi) = (A^*\chi)(x) = \chi(Ax) = J_F(Ax)(\chi)$$

para toda $\chi \in F^*$.□

En el caso particular de que E sea reflexivo, está claro que los dos operadores (A y A^{**}) son exactamente el mismo.

Un caso sencillo de operador adjunto es el del Ejemplo 21 de la sección I.6.2, donde puede verse que el operador T (el shift a izquierda) es el operador adjunto de S (el shift a derecha); aparecerán muchos más ejemplos en forma natural a medida que avancemos en el desarrollo de estas notas.

I.7 Espacios normados de dimensión finita (1º parte)

La simplificación de la teoría en el caso de dimensión finita no debe ser motivo de menosprecio: por el contrario, es terminando de comprender el orden en que se pueden enunciar y demostrar los resultados válidos sobre estos espacios que uno puede avanzar en otras direcciones. Por otra parte, algunos resultados laterales dan una caracterización de los espacios de dimensión finita (y por ende de los de dimensión infinita) en términos de las herramientas que hemos estado usando hasta ahora. Vamos a comenzar con un lema del cual se podría decir que se deducen todos los demás resultados sobre dimensión finita; para su demostración vamos a aceptar un hecho fundamental sobre $\mathbb{F}$ (donde como siempre $\mathbb{F}$=$\mathbb{R}$ o bien $\mathbb{F}$=$\mathbb{C}$) que se demuestra en cualquier curso de cálculo avanzado , y es el

Teorema I.36 (Heine-Borel) *Un subconjunto $S \subset \mathbb{F}= (\mathbb{F}, |\ \ |)$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

En esencia la demostración de este teorema se basa en probar la completitud del cuerpo $\mathbb{F}$, para obtener que todo subconjunto cerrado de él es completo, y la posibilidad de construir ε-redes para cualquier ε sobre un conjunto acotado, lo que prueba que acotación implica acotación total. Una consecuencia directa del teorema anterior es la

Proposición I.37 *Sea $\mathbb{F}^n = (\mathbb{F}^n, \|\ \ \|_1)$ el espacio producto $\mathbb{F}\times.....\times\mathbb{F}$ con la norma*

$$\|(\alpha_1, ..., \alpha_n)\|_1 = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n|$$

para $\alpha_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq n$. Entonces $S \subset \mathbb{F}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Demostración:

Si tomamos un conjunto compacto en un espacio métrico, resulta completo y totalmente acotado, y como consecuencia directa cerrado y acotado.

Para la recíproca, la misma observación (el hecho de que $\mathbb{F}^n$ sea un espacio métrico), nos dice que basta probar que toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Tomemos entonces una sucesión $\{(\alpha_{1k}, ..., \alpha_{nk})\}_{k\in\mathbb{N}} \subset S$. El hecho de que S sea acotado nos dice que existe una constante C tal que $\|(\alpha_1, ..., \alpha_n)\|_1 \leq S$ para todo $s \in S$, en particular

$$\|(\alpha_{1k}, ..., \alpha_{nk})\|_1 = (|\alpha_{1k}| + ... + |\alpha_{nk}|) \leq C \qquad \forall\ k \in \mathbb{N} \tag{I.26}$$

de lo cual se deduce que, para la primera coordenada, $|\alpha_{1k}| \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomemos $B_c = \{s \in \mathbb{F} : |s| \leq C\}$ (la bola cerrada de radio C en $\mathbb{F}$). Este es evidentemente un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{F}$, y como tal (por el teorema anterior) un conjunto compacto. También está claro que la sucesión $\{\alpha_{1k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ yace enteramente en B_c, y por ende existe una subsucesión $\{\alpha_{1k'}\}_{k'\in\mathbb{N}}$ y un punto $\alpha_{10} \in B_c \subset \mathbb{F}$ tal que $\alpha_{1k'} \to_{k'} \alpha_{10}$. Ahora consideremos la subsucesión del vector original

$$\{(\alpha_{1k'}, ..., \alpha_{nk'})\}_{k'\in\mathbb{N}}$$

y observemos que todo el razonamiento anterior se aplica para la sucesión de la segunda coordenada $\{\alpha_{2k'}\}_{k'\in\mathbb{N}}$; esto nos lleva a una subsucesión $\{\alpha_{2k''}\}_{k''\in\mathbb{N}}$ y un elemento α_{20} tal que $\alpha_{2k''}\to_{k''}\alpha_{20}$; si miramos la subsucesión de la primera coordenada $\{\alpha_{1k''}\}_{k''\in\mathbb{N}}$ está claro que sigue siendo convergente y al mismo punto α_{10}, por ser una subsucesión de una sucesión convergente. Ahora miramos la sub-subsucesión del vector original

$$\{(\alpha_{1k''},....,\alpha_{nk''})\}_{k''\in\mathbb{N}}$$

y repetimos el proceso anterior para la sucesión de la tercer coordenada $\left\{\alpha_{3k''}\right\}_{k''\in\mathbb{N}}$. Como son finitas coordenadas, en algún momento llegamos a la última, y en el camino hemos hallado n elementos del cuerpo $\alpha_{10},......,\alpha_{n0}$ tales que las subsucesiones $\alpha_{1k^{(n)}},....,\alpha_{nk^{(n)}}$ convergen a ellos. Tomemos la subsucesión del vector inicial

$$\{(\alpha_{1k^{(n)}},....,\alpha_{nk^{(n)}})\}_{k^{(n)}\in\mathbb{N}} \tag{I.27}$$

y el elemento $(\alpha_{10},......,\alpha_{n0})\in\mathbb{F}^n$. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|(\alpha_{1k^{(n)}},....,\alpha_{nk^{(n)}})-(\alpha_{10},......,\alpha_{n0})\right\|_1 &= \left\|(\alpha_{1k^{(n)}}-\alpha_{10},....,\alpha_{nk^{(n)}}-\alpha_{n0})\right\|_1\\ &= |\alpha_{1k^{(n)}}-\alpha_{10}|+....+|\alpha_{nk^{(n)}}-\alpha_{n0}|\end{aligned}$$

y como cada uno de los términos tiende a cero cuando $k^{(n)}\to\infty$, está claro que $(\alpha_{10},......,\alpha_{n0})$ es el límite en $\mathbb{F}^n$ de la subsucesión (I.27). Pero por otro lado, como S era cerrado, este vector debe estar dentro de él.□

Ahora podemos enunciar apropiadamente el lema

Lema I.38 *Sea E es un espacio normado de dimensión finita (con $\dim E=n$). Supongamos que $B=\{x_1,...,x_n\}$ es una base de E como $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Entonces cada uno de los coeficientes α_k en la expansión*

$$x=\alpha_1x_1+......+\alpha_nx_n$$

es una funcional lineal acotada (como función de x). En particular, existe una constante M tal que

$$|\alpha_k(x)|\le M\,\|x\|$$

para todo $k\in\{1,...,n\}$ y todo $x\in E$

DEMOSTRACIÓN:

La demostración de que cada α_k es lineal es sencillla, y utiliza la independencia lineal de los elementos de la base B. Para la suma, hagamos

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(y+z)x_k=y+z=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(y)x_k+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(z)x_k\,,$$

restando el primer y último término se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k(y+z) - \alpha_k(y) - \alpha_k(z))\, x_k$$

que por la independencia lineal de los x_k nos da $(\alpha_k(y+z) - \alpha_k(y) - \alpha_k(z)) = 0$ para todo k, o lo que es lo mismo, $\alpha_k(y+z) = \alpha_k(y) + \alpha_k(z)$ para todo k. Para el producto, de la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda\alpha_k(y)x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(y)x_k = \lambda y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\lambda y)x_k$$

se deduce $\alpha_k(\lambda y) = \lambda\alpha_k(y)$ para todo k. Ahora pasemos a la continuidad: vamos a probar que, en realidad, existe una constante $m > 0$ tal que

$$m\,(|\alpha_1(x)| + ...\, |\alpha_n(x)|) \leq \|x\| = \|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\| \tag{I.28}$$

con lo cual (tomando $M = m^{-1}$) habremos terminado, puesto que $|\alpha_k(x)| \leq |\alpha_1(x)| + ... + |\alpha_n(x)|$ para todo k.

Vamos a hacerlo sobre la bola unitaria en norma uno de los coeficientes, es decir sobre el conjunto

$$B_1 = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{F}^n : \|\alpha\|_1 = 1\} \tag{I.29}$$

donde $\|\alpha\|_1 = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n|$. Se observa que $\|\ \ \|_1$ es una norma, y como tal, una función continua. De aquí se deduce que B_1 es un conjunto cerrado sobre $\mathbb{F}^n$ (puesto que $B_1 = \|\ \ \|_1^{-1}(1)$); como por otra parte está claro que es un conjunto acotado, la proposición previa nos dice que B_1 es compacta con la norma uno.

Consideremos ahora la función $f : B_1 \to \mathbb{R}^+$ definida como

$$f(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\| \tag{I.30}$$

donde los x_i son los de la base B. La desigualdad

$$\begin{aligned}
|f(\alpha_1, ..., \alpha_n) - f(\beta_1, ..., \beta_n)| &= |\ \|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\| - \\
&\qquad - \|\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n\|\ | \\
&\leq \|\ (\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n) - \\
&\qquad - (\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n)\ \| \\
&= \|(\alpha_1 - \beta_1)\, x_1 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\, x_n\| \\
&\leq |\alpha_1 - \beta_1|\, \|x_1\| + ... + |\alpha_n - \beta_n|\, \|x_n\| \\
&\leq (|\alpha_1 - \beta_1| + ... + |\alpha_n - \beta_n|) \cdot \max_k \|x_k\| \\
&= \|\alpha - \beta\|_1 \cdot C
\end{aligned}$$

nos dice que f es continua con respecto a la norma uno, y como B_1 era compacto, debe alcanzar un mínimo sobre él. Éste mínimo no puede ser cero, ya que entonces existiría $\alpha_0 = (\alpha_{10}, ..., \alpha_{n0})$ tal que $f(\alpha_0) = 0$, y entonces $\alpha_{10}x_1 + ... + \alpha_{n0}x_n = 0$; la independencia lineal de los x_i implicaría que todos los coeficientes son cero, pero esto no puede ser porque la condición $\alpha \in B_1$ dice que al menos uno es no nulo. Existe entonces $m = \min_{\alpha \in B_1} f(\alpha) > 0$, lo que nos dice que $f(\alpha) \geq m > 0$ para todo α en B_1. Esta condición es sencillamente la condición (I.28) para los α tales que $|\alpha_1| + ... + |\alpha_n| = 1$.

En el caso general, si $\|\alpha\|_1 = 0$, el resultado es trivial. Si no es cero, dividimos por él para obtener

$$\begin{aligned} \|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\| &= \|\alpha\|_1 \cdot \left\| \tfrac{\alpha_1}{\|\alpha\|_1} x_1 + ... + \tfrac{\alpha_n}{\|\alpha\|_1} x_n \right\| \\ &= \|\alpha\|_1 \cdot f\left(\tfrac{\alpha_1}{\|\alpha\|_1} x_1 + ... + \tfrac{\alpha_n}{\|\alpha\|_1} x_n \right) \\ &\geq \|\alpha\|_1 \cdot m = m\left(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|\right) \ \square \end{aligned}$$

Un corolario bastante sencillo del lema anterior es la siguiente

Proposición I.39 ($\mathbb{F}^n$) *Si E es un espacio normado de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$, con* $\dim E = n$, *entonces existe una norma $\| \ \|_*$ en $\mathbb{F}^n$ y un isomorfismo $\Phi : E \to (\mathbb{F}^n, \| \ \|_*)$, de manera que Φ es un isomorfismo isométrico.*

Demostración:

Si $\alpha \in \mathbb{F}^n$, y $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, tomemos $m = \min_{\alpha \in B_1} f(\alpha)$ (donde B_1 y f son los definidos en (I.29) y (I.30) respectivamente, en el lema anterior). Sea $B = \{z_1, ..., z_n\}$ una base de E, donde los vectores están normalizados de manera que $\|z_k\|_E = m$ para todo k. Se define $\|\alpha\|_* = m\left(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|\right)$. Ahora definimos el isomorfismo con $\mathbb{F}^n$ en la forma obvia

$$\Phi : E \to \mathbb{F}^n$$

$$\textstyle\sum_j \alpha_j z_j \longmapsto (\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

Está bastante claro que está bien definido y es lineal; también es evidente que es un epimorfimo. Por otro lado, si $x = \sum_j \alpha_j z_j$, entonces

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)\|_* &= \|(\alpha_1, ..., \alpha_n)\|_* = m\left(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|\right) \\ &\leq m \cdot \tfrac{1}{m} \|\alpha_1 z_1 + ... + \alpha_n z_n\|_E \qquad \text{(I.31)} \\ &= \|x\|_E \end{aligned}$$

(la desigualdad se obtiene del lema anterior) lo que prueba que Φ es acotado. Por otro lado la desigualdad triangular nos da

$$\begin{aligned}
\|x\|_E = \|\Phi^{-1}(\alpha)\|_E &= \|\alpha_1 z_1 + ... + \alpha_n z_n\|_E \\
&\leq |\alpha_1| \cdot \|z_1\|_E + ... + |\alpha_n| \cdot \|z_n\|_E \\
&= (|\alpha_1| \, m + ... + |\alpha_n| \, m) = m \, (|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|) \\
&= \|(\alpha_1, ..., \alpha_n)\|_*
\end{aligned} \tag{I.32}$$

lo que nos dice que Φ^{-1} es acotado. Pero juntando (I.31) con (I.32) se obtiene

$$\|\Phi(x)\|_* \leq \|x\|_E \leq \|(\alpha_1, ..., \alpha_n)\|_* = \|\Phi(x)\|_* \quad \forall \, x \in E \,,$$

lo que prueba la igualdad $\|\Phi(x)\|_* = \|x\|_E$, demostrando que Φ es una isometría (y en particular un monomorfismo, y por ende un isomorfismo).$\square$

Cabe notar que el isomorfismo que definimos **no** es canónico (es decir, depende de la base B), y por ende no tiene mayor utilidad. En lo que va hasta ahora, hemos trabajado con un tipo particular de operadores lineales, que son aquellos que dan las coordenadas de un vector en una base, y hemos probado que son acotados; una de las características más salientes de los espacios de dimensión finita es que **todos** los operadores lineales son acotados.

Teorema I.40 *Sea $A : E \to F$ un operador lineal entre espacios normados. Si E tiene dimensión finita (independientemente de la dimensión de F) entonces A es acotado.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $B = \{z_1, ..., z_n\}$ una base de E. Entonces cualquier punto $x \in E$ tiene una expresión única como combinación lineal de ellos $x = \alpha_1 z_1 + ... + \alpha_n z_n$. Llamando $D = \max_k \|Az_k\|$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \|A\,(\alpha_1 z_1 + ... + \alpha_n z_n)\| = \|(\alpha_1 A z_1 + ... + \alpha_n A z_n)\| \\
&\leq |\alpha_1| \cdot \|Az_1\| + ... + |\alpha_n| \cdot \|Az_n\| \leq D\,(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|)
\end{aligned}$$

pero por el Lema I.38 existe una constante M tal que $|\alpha_1| + ... + |\alpha_n| \leq M \|x\|$, y entonces

$$\|Ax\| \leq DM \, \|x\| \, .\square$$

Es interesante notar que en el caso $F = \mathbb{F}$, este teorema nos dice que el dual "algebraico" coincide exactamente con el dual como espacio normado de E, puesto que todas las funcionales lineales resultan automáticamente acotadas. Pasemos a la equivalencia entre espacios normados, que se deduce del mismo teorema:

Corolario I.41 *Todos los espacios de dimensión finita con la misma dimensión están en una equivalencia dada por isomorfismos bicontinuos, es decir que si* $\dim E = \dim F < \infty$, *entonces existe* $\Lambda : E \to F$ *tal que* Λ *es un isomorfismo, es acotado, y* Λ^{-1} *es acotado.*

Demostración:

Si $B = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de E, y $B' = \{w_1, ..., w_n\}$ es una base de B', basta tomar

$$\sum \alpha_k v_k \quad \overset{\Lambda}{\longrightarrow} \quad \sum \alpha_k w_w$$

que es evidentemente un isomorfismo entre espacios de dimensión finita, y por ende acotado y con inversa acotada.□

En particular, son todos isomorfos (y homeomorfos) al espacio $\mathbb{F}^n$ dotado de la norma Euclídea. Éste corolario también nos dice que sobre un espacio normado de dimensión finita, cualquier norma define los mismos cerrados (y abiertos), es decir que vale el

Corolario I.42 *Si* E *es de dimensión finita, y* $\| \;\; \|_1$ *y* $\| \;\; \|_2$ *son dos normas para* E, *entonces son equivalentes. En otras palabras, existen dos constantes* c_1 *y* c_2 *tales que*

$$\| \;\; \|_1 \leq c_1 \| \;\; \|_2 \leq c_2 \| \;\; \|_1$$

Demostración:

Basta notar que la función

$$(E, \| \;\; \|_1) \xrightarrow{\;id_E\;} (E, \| \;\; \|_2)$$

es un isomorfismo entre espacios normados de igual dimensión, finita.□

Con respecto a los duales, podemos observar lo siguiente:

Corolario I.43 (E y E^*) *Si* E *es un espacio normado de dimensión finita, entonces* E *es isomorfo a* E^* *en forma bicontinua. (Es decir, existe un isomorfismo bicontinuo entre* E *y* E^**).*

Demostración:

Por el corolario anterior, basta probar que $\dim E = \dim E^*$. Observemos en primer lugar que, si $B = \{z_1, ..., z_n\}$ es una base de E, entonces uno puede definir n funcionales lineales independientes poniendo

$$\varphi_k(z_j) = \delta_{ij}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, extendiéndolas linealmente a todo el espacio. Está claro que son linealmente independientes, y además son acotadas puesto que parten de un espacio de dimensión finita. Cabe remarcar que estas funcionales son exactamente las del

Lema I.38, es decir que representan a los coeficientes en el desarrollo sobre la base B, ya que

$$\varphi_k(x) = \varphi_k\left(\sum_j \alpha_j z_j\right) = \sum_j \alpha_j \varphi_k(z_j) = \alpha_k\,.$$

Por otro lado, si $\varphi \in E^*$, entonces

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_j \alpha_j(x) z_j\right) = \sum_j \alpha_j(x)\varphi(z_j) = \sum_j \varphi(z_j)\alpha_j(x) = \sum_j \varphi(z_j)\varphi_j(x)$$

y φ resulta combinación lineal de las φ_k. Esto prueba que $B' = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ forman una base de E^* conocida como **base dual de la base** B; hemos probado que $\dim E^* = \dim E = n$.□

Teorema I.44 ($E \simeq E^{**}$) *Si E es un espacio normado de dimensión finita, entonces E es reflexivo.*

Demostración:

Basta notar que el doble dual como espacio normado está inclluido en el doble dual algebraico, que es algebraicamente isomorfo al espacio inicial E : se deduce que E^{**} tiene dimensión finita y por ende $J_E : E \to E^{**}$ es un monomorfismo entre espacios de igual dimensión (finita), que lo convierte automáticamente en un isomorfismo.

El último resultado sobre dimensión finita (por ahora) nos da una caracterización de la bola cerrada unitaria $D = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$ en un espacio normado:

Teorema I.45 (F. Riesz) *Sea E un espacio normado. Entonces E tiene dimensión finita si y sólo si D es compacto.*

Demostración:

Supongamos primero que $\dim E = n < \infty$. Tomando $\{z_k\}$ una sucesión en D, queremos hallar una subsucesión convergente en D, para probar su compacidad. Para ello escribimos z_k en una base $\{x_1, ..., x_n\}$ de E

$$z_k = \alpha_{1k}x_1 + ... + \alpha_{nk}x_n$$

Se deduce del Lema I.38 que existe una constante M tal que

$$|\alpha_{1k}| + ... + |\alpha_{nk}| \leq M \|z_k\| \leq M\,.$$

Como los coeficientes $(\alpha_{1k}, ..., \alpha_{nk})$ caen dentro de un conjunto cerado y acotado de $\mathbb{F}^n$, caen en un compacto y por ende existe una subsucesión convergente en $\mathbb{F}^n$

$$\left(\alpha_{1k_j}, ..., \alpha_{nk_j}\right) \to_j (\alpha_{10}, ..., \alpha_{n0})$$

con lo que $z_{k_j} = \alpha_{1k_j}x_1 + ... + \alpha_{nk_j}x_n \to_j \alpha_{10}x_1 + ... + \alpha_{n0}x_n = z_0$. Pero además $\|z_0\| = \|\lim_j z_{k_k}\| = \lim_j \|z_{k_k}\| \leq 1$, así que $z_0 \in D$.

Para la recíproca, supongamos que D es compacto, y probemos que suponer $\dim E = \infty$ lleva a un absurdo. Tomemos $x_1 \in E$ con $\|x_1\| = 1$. Sea $M_1 =< x_1 >$. Como M_1 no es todo E, el lema de Riesz (Lema I.12) nos dice que existe $x_2 \in E$ tal que $\|x_2\| = 1$ y $\|x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Consideremos $M_2 =< x_1, x_2 >$. Una nueva aplicación del lema nos dice que existe un $x_3 \in E$ tal que $\|x_3\| = 1$ y $d(x_3, M_2) \geq \frac{1}{2}$. Esto en particualr implica que $\|x_1 - x_3\| \geq \frac{1}{2}$ y $\|x_2 - x_3\| \geq \frac{1}{2}$. Por inducción, construimos una sucesión $\{x_k\}$ en E tal que $\|x_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y además $\|x_j - x_k\| \geq \frac{1}{2}$ si $j \neq k$. Pero esta sucesión es entonces de puntos aislados, y no puede contener ninguna subsucesión convergente.$\Box$

Corolario I.46 *Todo conjunto K cerrado y acotado en un espacio normado de dimensión finita es compacto.*

Demostración:

Basta observar que por ser acotado está dentro de alguna bola cerrada, y como las traslaciones y homotecias son homeomorfismos, esta bola será compacta. Ahora K es un conjunto cerrado dentro de un compacto, y por ende compacto.

Corolario I.47 *Sea S un subespacio de dimensión finita de un espacio normado E cualquiera. Entonces, dado $x \in E$ siempre existe un $s_0 \in S$ tal que $\|x - s_0\| = d = dist(x, S)$. (Es decir que la distancia se alcanza siempre).*

Demostración:

La definición

$$d = dist\,(x, S) = \inf\{\|x - s\| : s \in S\}$$

nos dice que existe una sucesión $\{s_n\} \subset S$ tal que $\|x - s_n\| \to_n d$. Resulta que esta sucesión a partir de un cierto N_0 está dentro de un conjunto acotado alrededor de s_{N_0}, puesto que

$$\|s_{N_0} - s_{N_0+p}\| \leq \|s_{N_0} - x\| + \|x - s_{N_0+p}\| \leq 2d - \varepsilon \quad \forall\, p \in \mathbb{N},$$

Es decir que $\{s_n\}_{n \geq N_0}$ yace en un subconjunto acotado de S; tomando la clausura dentro de S de este conjunto estamos en presencia de un conjunto $K \subset S$, cerrado y acotado, que contiene a $\{s_n\}_{n \geq N_0}$. Por el corolario previo, K es compacto y por ende existe una subsucesión $\{s_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la antes mencionada, que es convergente, con límite $s_0 \in K \subset S$. La desigualdad

$$|\|x - s_0\| - d| \leq |\|x - s_{n_k}\| + \|s_{n_k} - s_0\| - d| \leq |\|x - s_{n_k}\| - d| + \|s_{n_k} - s_0\|$$

completa la demostración.$\Box$

El tema de la distancia y su "realización" por algún elemento del espacio es de vital importancia en la teoría de optimización, y volveremos sobre él al tratar espacios de Hilbert, y al tocar el tema de conjuntos convexos con el teorema de Krein-Milman.

I.8 Teorema de Stone-Weierstrass

Definición I.48 *Se llama* **núcleo singular** *a una familia de funciones* $K_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $(\lambda \in \Gamma \subset \mathbb{R}^+)$ *tales que*

1. $\int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(s)ds = 1 \quad \forall\, \lambda.$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |K_\lambda(s)|\, ds \leq M \quad \forall\, \lambda.$
3. $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_\alpha^\beta |K_\lambda(s)|\, ds = 0$ *si* $0 \notin (\alpha, \beta)$. *(aquí* $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$*)*

En realidad, esta no es la definición más general posible de núcleo singular, pero bajo esta hipótesis es sencillo probar el siguiente

Lema I.49 *Sean* K_λ *un núcleo singular y* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*, una función continua y acotada. Entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(s) \cdot \psi(s)ds = \psi\,(0)\,.$$

Demostración:

Como

$$\left| \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(s) \cdot \psi(s)ds \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |K_\lambda(s)| \cdot |\psi(s)|\, ds \leq M \, \|\psi\|_\infty \ ,$$

se deduce que todas las integrales existen, y como

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(s) \cdot \psi(0)ds = \psi(0),$$

entonces basta ver que

$$\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(s) \left[\psi(s) - \psi\,(0)\right] ds \to 0 \quad \text{cuando } \lambda \to +\infty. \tag{I.33}$$

Si δ es cualquier número positivo, dividamos la integral de (I.33) en tres términos, a saber

$$\int_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{+\infty};$$

claramente,

$$\left| \int_{-\infty}^{\delta} K_\lambda(s) \left[\psi(s) - \psi\,(0)\right] ds \right| \leq 2 \, \|\psi\|_\infty \cdot \int_{\mathbb{R}} |K_\lambda(s)|\, ds \to_{\lambda\to\infty} 0$$

por la condición 3 de la Definición I.48, y lo mismo ocurre con el término $\int_\delta^{+\infty}$. Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ para el cual $|\psi(s) - \psi(0)| < \varepsilon$ si $|s| < \delta$, y por lo tanto

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} \right| \leq \varepsilon \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_\lambda(s)|\, ds \leq \varepsilon M \quad \text{para todo } \lambda\,.\square$$

Definición I.50 *Dadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f \in L^p$, $g \in L^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p < \infty$) su* **convolución** *o* **producto de composición** *se define como*

$$(f * g)(x) = h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s) \cdot g(s) ds.$$

Lema I.51 *En las condiciones de la definición anterior, h está definida en todo $x \in \mathbb{R}$, y además es continua y acotada.*

Demostración:

Observemos en primer lugar que la aplicación $(f(s) \mapsto f(s+x))$ es claramente una aplicación de L^p en L^p, y recordemos que para $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p$, la aplicación $\tau_x : \mathbb{R} \to L^p(\mathbb{R})$ definida por $(x \mapsto f(s+x) = f_x(s))$ es una aplicación continua, y por ende medible (ver [Whe-Zygmund][Theorem8.19]). De aquí se deduce que la aplicación $(s \mapsto f(x-s) \cdot g(s))$ es una función medible, y por medio de la desigualdad de Hölder se obtiene

$$|h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-s) \cdot g(s)| \, ds \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \,,$$

(la integral de f se calcula mediante el cambio de variable $(s \mapsto x-s)$, que no afecta el dominio) lo que prueba la existencia (y acotación) de h sobre $\mathbb{R}$.. La misma observación aplicada a $f(-s)$ y la desigualdad de Hölder nos llevan a

$$\begin{aligned}
|h(x_1) - h(x_2)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} [f(x_1 - s) - f(x_2 - s)] \cdot g(s)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} (f_{x_1} - f_{x_2})(-s) \cdot g(s)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} (f_{x_1} - f_{x_2})(s) \cdot g(s)\right| \\
&\leq \|f_{x_1} - f_{x_2}\|_p \cdot \|g\|_q \to 0 \text{ cuando } x_2 \to x_1 \,.\square
\end{aligned}$$

Cabe observar que la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ no es necesaria para la definición del producto, pero será más que suficiente para nuestros propósitos (ver [Whe-Zygmund][Chapter9]).

Con esto podemos enunciar la siguiente

Proposición I.52 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua y acotada, e $I = [a, b]$ un intervalo finito cualquiera. Supongamos que K_λ es un núcleo singular positivo (es decir, $K_\lambda \geq 0$ para todo λ). Entonces*

$$\|K_\lambda * f - f\|_I \to 0 \quad \textit{cuando } \lambda \to +\infty \tag{I.34}$$

(donde $\| \quad \|_I$ denota la norma supremo en $[a, b]$).

Demostración:

Claramente, cada K_λ está en $L^1(\mathbb{R})$. Por otra parte, $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ por hipótesis: el Lema I.51 aplicado a $g = K_\lambda$ nos asegura que cada $K_\lambda * f$ es una función continua y acotada. Tiene entonces sentido ver si existe el límite (I.34) en $C(I)$.

Definamos $\widetilde{F} : \mathbb{R} \to C(I) = \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ como $\widetilde{F}(s)(x) = f(x-s) - f(x)$: entonces $\left\|\widetilde{F}(s)\right\|_I \leq 2\|f\|_\infty < \infty$ pues $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, lo que prueba que $\psi(s) = \left\|\widetilde{F}(s)\right\|_I$ es una función acotada de s. Si probamos que $\left\|\widetilde{F}(s)\right\|_I$ es una función continua de s, el Lema I.49 nos dice que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in I} |(K_\lambda * f)(x) - f(x)| &= \sup_{x\in I} \left|\int_{\mathbb{R}} K_\lambda(s) \left[f(x-s) - f(x)\right] ds\right| \\
&\leq \sup_{x\in I} \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(s) \left|f(x-s) - f(x)\right| ds \\
&\leq \sup_{x\in I} \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(s) \cdot \left\|\widetilde{F}(s)\right\|_I ds \to_{\lambda\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

ya que $\widetilde{F}(0) = 0$, y entonces $\left\|\widetilde{F}(0)\right\|_I = 0$.

La función $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como

$$F(x,s) = f(x-s) - f(x)$$

es claramente continua pues es composición y suma de funciones continuas. Entonces $\widetilde{F}$ es simplemente la evaluación $\left(\widetilde{F}(s)\right)(x) = F(x,s)$. Como I es localmente compacto Hausdorff, si le damos la topología compacto-abierta a $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$, $\widetilde{F}$ será una función continua de s (ver [Munkres][Chapter7,Corollary5.4]).

Como la topología compacto-abierta de $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ coincide con la topología de convergencia uniforme, por ser $\mathbb{C}$ métrico e I compacto (ver [Munkres][Chapter7,Theorem5.1]), la función $(g \mapsto \|g\|_I)$ de $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ en $\mathbb{R}$ es una función continua, y por ende la composición

$$s \mapsto \widetilde{F}(s) \mapsto \left\|\widetilde{F}(s)\right\|_I$$

de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es una función continua.□

Lema I.53 *El núcleo de Stieltjes (o de Landau) definido por*

$$S_n(t) = \begin{cases} 0 & |t| \geq 1 \\ \alpha_n \cdot (1-t^2)^n & \alpha_n > 0, \quad \frac{\sqrt{n}}{\alpha_n} \to \sqrt{\pi} \end{cases}$$

(notar que aquí $\lambda \in \mathbb{N}$) es un núcleo singular positivo.

Demostración:

Claramente $S_n \geq 0$; si $0 < \beta \leq 1$, como para $|t| \geq \beta$ vale $(1-t^2)^n < (1-\beta^2)^n < 1$ se deduce que $S_n \to 0$ uniformemente para $|t| \geq \beta$, lo que prueba la condición 3 de la Definición I.48. Como

$$\int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^n dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

(ver [Rey Pastor][53.2,Ejemplo3]) basta elegir $\alpha_n = \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$ para que se cumpla la condición 1 de la definición, y además por la fórmula de Wallis (ver [Rey Pastor][53.3]) $\frac{\sqrt{n}}{\alpha_n} \to \sqrt{\pi}$.

Por otra parte, al ser $S_n \geq 0$, está claro que se cumple automáticamente la condición 2 (con $M = 1$).□

Notemos con $C_{\mathbb{R}}[a,b]$ al espacio de las funciones continuas a valores reales, con la norma supremo: estamos en condiciones de demostrar el resultado central de esta sección:

Teorema I.54 (Weierstrass) *Si $[a,b]$ es cualquier intervalo finito, entonces los polinomios son densos en $C_{\mathbb{R}}[a,b]$.*

Demostración:

Por cambio de variable, supongamos que $[a,b] = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Sea $f \in C\left(\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]\right)$ y consideremos la siguiente extensión de f a todo $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq \frac{1}{4} \\ \\ 0 & |x| \geq \frac{1}{4} \\ \\ \text{lineal} & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{-1}{4} \text{ o bien } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Evidentemente, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es continua y acotada, y entonces $S_n * g \to g$ uniformemente en cualquier intervalo finito (por la Proposición I.52), en particular en $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

Pero además

$$S_n * g(x) = \alpha_n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[1 - (x-t)^2\right]^n \cdot g(t)dt$$

es un polinomio de grado $\leq 2n$ en x, y el cambio de variable inicial (claramente lineal) no afecta este hecho.□

Pasemos ahora al caso general, donde primero consideraremos álgebras con unidad, y luego veremos que ocurre en el caso general de un ideal cualquiera (álgebra sin unidad). Para ello necesitamos en primer lugar la siguiente

Definición I.55 *Sea X un espacio compacto Hausdorff, y $C(X)$ el álgebra de todas las funciones continuas $f : X \to \mathbb{C}$, dotada con la norma supremo. Una* **subálgebra compleja** *$\mathcal{B} \subset C(X)$ es un subespacio de $C(X)$ cerrado con respecto al producto*

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \tag{I.35}$$

es decir que si $f, g \in \mathcal{B}$ entonces $fg \in \mathcal{B}$.

Llamaremos $C_{\mathbb{R}}(X)$ al $\mathbb{R}$-subespacio de las funciones a valores reales. Una **subálgebra real** *$\mathcal{B} \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ es un $\mathbb{R}$-subespacio cerrado con respecto al producto (I.35).*

En cualquier caso, una **subálgebra cerrada** *es una subálgebra (real ó compleja) cerrada con respecto a la norma supremo (resp. de $C(X)$ ó $C_{\mathbb{R}}(X)$).*

Notar que todo ideal de la $\mathbb{C}$-álgebra $C(X)$ es una subálgebra compleja, pero la recíproca no es necesariamente cierta, y lo mismo vale para subálgebras reales, con respecto a la $\mathbb{R}$-álgebra $C_{\mathbb{R}}(X)$.

Es sencillo verificar que $C_{\mathbb{R}}(X)$ es un $\mathbb{R}$-subespacio cerrado de $C(X)$; como $C(X)$ es un espacio normado (complejo) completo (ver el Ejemplo 30 del Capítulo II), se deduce que también tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado completo, y entonces $C_{\mathbb{R}}(X)$, como así cualquier subálgebra cerrada de $C_{\mathbb{R}}(X)$, son espacios normados (reales) completos.

Definición I.56 *Un subconjunto $S \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ es un* **reticulado** *si para toda $f, g \in S$, $f \wedge g = \min\{f, g\}$ y $f \vee g = \max\{f, g\}$ están en S.*

Llamando 1 a la función de X en $\mathbb{C}$ que vale idénticamente uno, claramente $1 \in C_{\mathbb{R}}(X)$.

Lema I.57 *Cualquier subálgebra cerrada $\mathcal{B} \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ con $1 \in \mathcal{B}$ es un reticulado.*

Demostración:

Como $f \vee g = \frac{1}{2}|f-g| + \frac{1}{2}(f+g)$, $f \wedge g = -[(-f) \vee (-g)]$, basta probar que si $f \in \mathcal{B}$, entonces $|f| \in \mathcal{B}$. Podemos suponer que $\|f\|_{\infty} \leq 1$ sin pérdida de generalidad, y por el Teorema I.54 existe una sucesión $P_n \in C[-1,1]$ de polinomios de manera que $P_n(t) \to |t|$ uniformemente en $[-1,1]$. Consideremos la composición $P_n(f)$: como $\mathcal{B}$ es un álgebra con $1 \in \mathcal{B}$, $P_n(f) \in \mathcal{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero entonces, como X es compacto e $im(f) \subset [-1,1]$

$$\begin{aligned}
\|P_n(f) - |f|\|_{\infty} &= \sup_{x \in X} |P_n(f)(x) - |f|(x)| \\
&= \max_{x \in X} |P_n(f)(x) - |f|(x)| \\
&= \max_{x \in X} |(P_n \circ f)(x) - (|t| \circ f)(x)| \\
&\leq \max_{t \in [-1,1]} |P_n(t) - |t|| \\
&= \|P_n(t) - |t|\|_{[-1,1]} \to_{n \to \infty} 0.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{B}$ es cerrado, se deduce que $|f| \in \mathcal{B}$.$\square$

Definición I.58 *Diremos que un álgebra $\mathcal{B} \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ (ó $\mathcal{B} \subset C(X)$)* **separa puntos** *si, dados $x \neq y$ en X, existe $f \in \mathcal{B}$ con $f(x) \neq f(y)$.*

El siguiente es el último paso en la demostración de Stone Weierstrass para álgebras con unidad:

Teorema I.59 (Kakutani-Krein) *Sea X un espacio compacto Hausdorff. El único reticulado $S \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ que es un subespacio cerrado, contiene al elemento 1 y separa puntos de X es todo $C_{\mathbb{R}}(X)$.*

Demostración:

Como S es cerrado, basta probar que es denso en $C_{\mathbb{R}}(X)$. Para ello, dada $h \in C_{\mathbb{R}}(X)$ y $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $f \in S$ tal que $\|h - f\|_{\infty} < \varepsilon$. Supongamos que podemos mostrar, para cada $x \in X$, una función $f_x \in S$ tal que $f_x(x) = h(x)$ y $h \leq f_x + \varepsilon$. Entonces para cada $x \in X$, existe por la continuidad de $h - f_x$ un entorno U_x de x tal que

$$h(y) \geq f_x(y) - \varepsilon \quad \forall\, y \in U_x.$$

Como $\{U_x\}_{x\in X}$ es un cubrimiento abierto de X, y X es compacto, existe un subcubrimiento finito $\{U_{x_i}\}_{i=1\ldots n}$. Entonces $f = f_{x_1} \wedge f_{x_2} \wedge \ldots \wedge f_{x_n}$ cumple automáticamente

$$f(y) + \varepsilon = \min_i \{f_{x_i} + \varepsilon\} \leq h(y) \quad \forall\, y \in X,$$

y además, como cada $y \in U_{x_i}$ para algún i, entonces vale

$$f(y) - \varepsilon \leq f_{x_i}(y) - \varepsilon \leq h(y),$$

lo que termina de probar que $\|h - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

Falta entonces encontrar una f_x con las propiedades mencionadas. Dados $x \neq y$ en X, como S separa puntos, existe $f'_{xy} \in S$ tal que $f'_{xy}(x) \neq f'_{xy}(y)$ (o sea $f'_{xy}(x) - f'_{xy}(y) \neq 0$). Consideremos la función

$$f_{xy} = \frac{(h(x) + h(y))\, f'_{xy} - h(x) f'_{xy}(y) + h(y) f'_{xy}(x)}{f'_{xy}(x) - f'_{xy}(y)}.$$

Como $1 \in S$, $f_{xy} \in \mathcal{B}$. Además, $f_{xy}(x) = h(x)$, y $f_{xy}(y) = h(y)$. De ésta última condición se deduce que para cada $y \in X$ existe un entorno V_y de y tal que $|h(z) - f_{xy}(z)| \leq \varepsilon$ si $z \in V_y$. En particular, $f_{xy}(z) + \varepsilon \geq h(z)$ para z en V_y. Un argumento similar al del párrafo anterior nos permite hallar un cubrimiento $\{V_{yj}\}_{j=1,\ldots,m}$ de X de manera que $f_{xy_j}(z) + \varepsilon \geq h(z)$ para todo $j = 1, \ldots, m$ si $z \in V_{y_j}$. Si tomamos $f_x = f_{xy_1} \vee f_{xy_2} \vee \ldots \vee f_{xy_m}$, entonces claramente $f_x(x) = h(x)$, y además, para todo $z \in X$, $z \in V_{y_j}$ para algún j y entonces

$$f_x(z) + \varepsilon = \max_j \left\{ f_{xy_j}(z) + \varepsilon \right\} \geq h(z)\,.\square$$

Teorema I.60 (Stone-Weierstrass versión real) *Sea X un espacio compacto Hausdorff, y $\mathcal{B}$ una subálgebra cerrada de $C_{\mathbb{R}}(X)$, que separa puntos y contiene a la función 1. Entonces $\mathcal{B} = C_{\mathbb{R}}(X)$.*

Demostración:

Por el Lema I.57, $\mathcal{B}$ es un reticulado. Por el Teorema I.59, $\mathcal{B}$ es todo $C_{\mathbb{R}}(X)$.$\square$

Ejemplo 23 *Si $I = [0,1]$, entonces podemos considerar el subespacio de $C_{\mathbb{R}}(I \times I)$ formado por funciones de la forma*

$$h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(y) \qquad f,g \in C(I).$$

Es sencillo verificar que en realidad estas funciones forman una subálgebra de $C_{\mathbb{R}}(I \times I)$, y su clausura está entonces en las condiciones del teorema anterior, con lo cual forman un subconjunto denso de $C_{\mathbb{R}}(I \times I)$. Podemos entonces calcular la integral doble sobre este denso, en la forma obvia, es decir

$$\int_{I\times I} h(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_I f_i(x)dx\right)\left(\int_I g_i(y)dy\right),$$

y extendiéndola a todas la funciones continuas del cuadrado mediante los métodos de la sección II.2 (Teorema II.5). Se obtiene "gratis" el teorema de Fubini para funciones continuas.

El hecho de haber trabajado con funciones reales es fundamental. Esto puede verse claramente en la demostración del teorema de Kakutani-Krein. Sin embargo, puede extenderse el concepto de álgebra, con una hipótesis adicional, al caso complejo, de la siguiente manera

Teorema I.61 (S-W versión compleja) *Sea X un espacio compacto Hausdorff, y $\mathcal{B} \subset C(X)$ una subálgebra (compleja) cerrada con 1, que separa puntos, y con la propiedad de que si $f \in \mathcal{B}$, entonces $\overline{f} \in \mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{B} = C(X)$.*

Demostración:

Toda función $g \in C(X)$ puede escribirse en forma única como

$$g = \Re e\,(g) + i\Im m\,(g)\,, \tag{I.36}$$

donde $\Re e\,(g) = \frac{g+\overline{g}}{2}$ e $\Im m\,(g) = \frac{g-\overline{g}}{2}$ son dos funciones a valores reales. La desigualdad

$$\begin{aligned} |\Re e\,(g)\,(x) - \Re e\,(g)\,(y)|^2 \quad &\leq \quad |\Re e\,(g)\,(x) - \Re e\,(g)\,(y)|^2 + \\ &\quad + |\Im m\,(g)\,(x) - \Im m\,(g)\,(y)|^2 \\ &\leq \quad |g(x) - g(y)| \end{aligned}$$

prueba que $\Re e\,(g) \in C_{\mathbb{R}}(X)$. Lo mismo vale para $\Im m\,(g)$. Como B es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, basta probar la inclusión $C_{\mathbb{R}}(X) \subset B$ para deducir que $g \in B$.

Para ello, tomemos $f \in B$, y escribámosla como en la ecuación (I.36). La condición $\left(f \in \mathcal{B} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{B}\right)$ nos dice que necesariamente $\Re e\,(f)\,, \Im m\,(f) \in \mathcal{B}$. Consideremos el subconjunto de $\mathcal{B}$ definido por

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{g : g = \Re e\,(f) \text{ ó } g = \Im m\,(f) \text{ para alguna } f \in \mathcal{B}\}\,,$$

y tomemos $\mathcal{A} = \mathbb{R}\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$ la subálgebra (real) generada por $\widetilde{\mathcal{B}}$; como $\mathcal{B}$ es una subálgebra compleja (en particular real), se deduce que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$: probaremos que $\mathcal{A} = C_{\mathbb{R}}\,(X)\,.$

Evidentemente, $\mathcal{A}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y de su definición se deduce trivialmente que $\mathcal{A}$ es en realidad una subálgebra de $C_{\mathbb{R}}\,(X)\,.$ Obviamente, $1 \in \mathcal{A}$, y además, dados $x \neq y$ en X, como B separa puntos, existe $f \in B$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Entonces necesariamente $\Re e\,(f)\,(x) \neq \Re e\,(f)\,(y)$ o bien $\Im m\,(f)\,(x) \neq \Im m\,(f)\,(y)$, es decir que $\mathcal{A}$ separa puntos. Si probamos que $\mathcal{A}$ es un subespacio cerrado de $C_{\mathbb{R}}\,(X)\,,$ por el Teorema I.60 podremos concluir que $\mathcal{A} = C_{\mathbb{R}}\,(X)\,.$

Para ello tomemos un punto límite $f_0 \in \overline{\mathcal{A}}$, y veamos que está en $\mathcal{A}$. Como existe una sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ tal que $\|f_n - f_0\|_\infty \to_n 0$,si $\Im m\,(f_0) \neq 0$, entonces el límite en

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_0\|_\infty^2 &= \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_0(x)|^2 \\
&= \sup_{x\in X}\{|\Re e\,(f_n)\,(x) - \Re e\,(f_0)\,(x)|^2 + \\
&\qquad + |\Im m\,(f_0)\,(x)|^2\} \\
&= \sup_{x\in X}\left\{|\Re e\,(f_n)\,(x) - \Re e\,(f_0)\,(x)|^2\right\} + \\
&\qquad + \sup_{x\in X}\left\{|\Im m\,(f_0)\,(x)|^2\right\} \\
&\geq \|\Im m\,(f_0)\|_\infty^2 > 0
\end{aligned}$$

no puede ser nunca nulo (notar que hemos utilizado que el supremo de la suma es la suma de los supremos, ya que todos los términos son positivos). Entonces $\Im m\,(f_0) \equiv 0$, y por ende $f_0 \in \mathcal{A}$.□

Veamos ahora que ocurre en el caso general de una subálgebra sin unidad, y para ello necesitamos una caracterización cómoda de los ideales maximales de $C(X)$ (para nosotros, un ideal será siempre un ideal propio). Para ello cabe notar que la clausura de un ideal cualquiera es un ideal (la demostración es similar a la de la Proposición I.13, utilizando además que la función $p : C(X) \times C(X) \to C(X)$ definida por $((f,g) \mapsto fg)$ es continua). De aquí se deduce que **los ideales maximales son cerrados**, ya que si $\mathcal{M}$ es un ideal maximal, entonces $\overline{\mathcal{M}}$ también es un ideal, y como los elementos inversibles de $C(X)$ son un abierto del mismo (esto se deduce trivialmente de la serie de Neumann) debe ser $\overline{\mathcal{M}} \neq C(X)$, y por ende $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$.

Lema I.62 *Sea X un espacio compacto Hausdorff. Entonces, dado $x_0 \in X$, el conjunto*

$$\mathcal{B}_{x_0} = \{f \in C(X) : f(x_0) = 0\}$$

es un ideal maximal de $C(X)$, y en consecuencia un hiperplano cerrado de $C(X)$.

Recíprocamente, dado un ideal maximal $\mathcal{B} \subset C(X)$, entonces existe un único $x_0 \in X$ tal que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{x_0}$.

Las mismas afirmaciones valen para los ideales maximales de $C_{\mathbb{R}}(X)$.

DEMOSTRACIÓN:

($\Rightarrow$) Obviamente es un subespacio propio pues $1 \notin \mathcal{B}_{x_0}$. Consideremos la funcional $\varphi(f) = f(x_0)$. Evidentemente, $\mathcal{B}_{x_0} = \ker \varphi$, y como la desigualdad

$$\begin{aligned} |\varphi(f) - \varphi(g)| &= |f(x_0) - g(x_0)| \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \|f - g\|_\infty \end{aligned}$$

muestra que $\varphi \in C(X)^*$, se trata de un hiperplano cerrado. La condición de ser un ideal es evidente, y la condición de maximalidad es también evidente por tratarse de un subespacio maximal.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe x_0 tal que $f(x_0) = 0$ para toda $f \in \mathcal{B}$. Entonces claramente $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{x_0}$, y como el primero es maximal y el segundo es propio, debe ser $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{x_0}$. La unicidad es una aplicación trivial del lema de Urysohn (ver, por ejemplo [Munkres][Chapter4,Theorem3.1]). Resta ver entonces que existe algún x_0 en las condiciones mencionadas.

Supongamos que para todo $x \in X$, existe $f_x \in \mathcal{B}$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Como $\mathcal{B}$ es un ideal, $|f_x|^2 = \overline{f_x} \cdot f_x \in \mathcal{B}$. Por la continuidad de f_x, existe un entorno U_x de x tal que $f_x(y) > 0$ para $y \in U_x$. La familia $\{U_x\}_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto de X, y por la compacidad de X existe un subcubrimiento finito $\{U_{x_i}\}_{i=1,\ldots,n}$. Para cada uno de ellos, tomemos la función $f_{x_i} \in \mathcal{B}$, y consideremos

$$g = |f_{x_1}|^2 + \ldots + |f_{x_n}|^2$$

Entonces $g \in \mathcal{B}$, puesto que $|f_{x_i}|^2 \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es un subespacio. Evidentemente, $g > 0$ sobre todo x, y entonces $\frac{1}{g} \in C(X)$. Como $\mathcal{B}$ es un ideal, $\frac{1}{g} \cdot g = 1 \in \mathcal{B}$, lo cual es absurdo ya que $\mathcal{B}$ es un ideal propio.

La demostración para $C_{\mathbb{R}}(X)$ es análoga.□

Teorema I.63 *Sea X un espacio compacto Hausdorff, y $\mathcal{B} \subset C(X)$ una subálgebra (compleja) cerrada, que separa puntos, con la propiedad de que si $f \in \mathcal{B}$, entonces $\overline{f} \in \mathcal{B}$. Entonces: o bien existe $x_0 \in X$ tal que*

$$\mathcal{B} = \{f \in C(X) : f(x_0) = 0\}$$

(es decir que $\mathcal{B}$ es hiperplano cerrado de $C(X)$, que además es un ideal maximal de $C(X)$), o bien $\mathcal{B} = C(X)$. Si $1 \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B} = C(X)$.

Demostración:

Si $1 \in \mathcal{B}$, la conclusión es obvia por el Teorema I.61.

Si llamamos $\mathbb{C}$ al subespacio de $C(X)$ formado por las funciones constantes, y $1 \notin \mathcal{B}$, entonces es claro (por ser $\mathbb{C} = \{\lambda.1 : \lambda \in \mathbb{C}\}$), que los subespacios $\mathbb{C}$ y $\mathcal{B}$ de $C(X)$ se intersecan únicamente en el origen, que es la función idénticamente nula. Entonces la suma $\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{B} \subset C(X)$ es directa, y además, como $\mathcal{B}$ es cerrado y $\mathbb{C} = < 1 >$ es de dimensión finita, por la Proposición II.26 de la sección II.6, que demostaremos en el capítulo siguiente, se obtiene que $\mathcal{A}$ es un subespacio cerrado de $C(X)$. Si observamos la expresión para el producto

$$(b_1 + \lambda_1)(b_2 + \lambda_2) = b_1 b_2 + \lambda_2 b_1 + \lambda_1 b_2 + \lambda_1 \lambda_2,$$

(donde $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, también es claro que $\mathcal{A}$ es una subálgebra, y entonces resulta sencillo verficar que $\mathcal{A}$ cumple las hipótesis del Teorema I.61. Por ende, $\mathcal{A} = C(X)$.

Pero entonces $\mathcal{B}$ es un ideal de $C(X)$, ya que si $b \in \mathcal{B}$ y $f = b_1 + \lambda \in C(X)$ (con $b_1 \in \mathcal{B}$), entonces

$$f.b = (b_1 + \lambda)\, b = b_1 b + \lambda b$$

también está en $\mathcal{B}$ (el primer término por ser $\mathcal{B}$ una subálgebra, y el segundo por ser $\mathcal{B}$ un subespacio). Como $\mathcal{B}$ es un hiperplano, se deduce su condición de maximalidad (como ideal), y entonces por el Lema I.62 existe $x_0 \in X$ tal que $\mathcal{B} = \{f \in C(X) : f(x_0) = 0\}$.□

Veamos una aplicación inmediata:

Ejemplo 24 *Si $C[a, b]$ son las funciones continuas a valores complejos con la norma supremo, entonces los polinomios en z y $\overline{z}$ son densos en $C[a, b]$.*

Por otra parte, la hipótesis de que para toda $f \in \mathcal{B}$, $\overline{f} \in \mathcal{B}$, es esencial, como muestra el siguiente

Ejemplo 25 *Si Δ es el disco unitario cerrado de $\mathbb{C}$, se define $\mathcal{H}(\Delta) = \{\varphi : \Delta \to \mathbb{C} : \varphi$ es holomorfa en el disco abierto y continua en el disco cerrado$\}$. Entonces $\mathcal{H}(\Delta)$ es una subálgebra cerrada propia del álgebra $C(\Delta)$ de las funciones continuas en Δ, que separa puntos ($z \in \mathcal{H}(\Delta)$), y tiene unidad: en efecto, $f(z) = \overline{z}$ es una función continua sobre el disco, pero no es holomorfa en el interior del mismo, y por ende $f \notin \mathcal{H}(\Delta)$.*

Pasando nuevamente al caso real, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario I.64 *Sea X un espacio compacto Hausdorff, y $\mathcal{B} \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ una subálgebra real cerrada, que separa puntos. Entonces existe $x_0 \in X$ tal que*

$$\mathcal{B} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(X) : f(x_0) = 0\},$$

o bien $\mathcal{B} = C_{\mathbb{R}}(X)$.

Demostración:

Análoga a la del Teorema I.63.□

Notar que tomando $X = [a, b]$, el Teorema I.54 es un caso particular de éste corolario, pero sin embargo lo hemos utilizado para demostrarlo!!

En el caso de un espacio X no compacto, la norma supremo no está definida para todas las funciones continuas, y esto complica la forma que deben tomar los teoremas: sin embargo, es posible obtener resultados si se trabaja con la generalidad correcta, y para ello necesitamos la siguiente definición (recordar que un espacio localmente compacto Hausdorff es un espacio Hausdorff, tal que para todo punto $x \in X$, y todo entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\overline{V} \subset U$ y además $\overline{V}$ es compacto):

Definición I.65 *Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff, y llamemos $C(X)$ al espacio de las funciones acotadas, continuas de X en $\mathbb{C}$, con la norma supremo. Entonces $C_0(X)$ es el subespacio de $C(X)$ de las* **funciones que tienden a cero en infinito***, que se define como (si V_ε es un entorno compacto de x)*

$$C_0(X) = \left\{ f \in C(X) : \forall\, \varepsilon\ \exists\, V_\varepsilon \subset X \ \textit{tal que} \sup_{x \in X - V_\varepsilon} |f(x)| < \varepsilon \right\}. \tag{I.37}$$

La razón de este nombre particular se deduce de la demostración del próximo resultado, y del Ejemplo 26:

Teorema I.66 *Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff, y $\mathcal{B} \subset C_0(X)$ una subálgebra (compleja) cerrada, que separa puntos, tal que para todo $x \in X$, existe $f_x \in \mathcal{B}$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Si para toda $f \in \mathcal{B}$, se tiene $\overline{f} \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B} = C_0(X)$.*

Demostración:

Consideremos el espacio $X' = X \dot{\cup} \{\infty\}$, donde ∞ denota un elemento que no está en X, y una base de entornos de ∞ es la siguiente:

$$\{A \subset X' : \infty \in A \text{ y } X - A \text{ es compacto en } X\}. \tag{I.38}$$

Como X es Hausdorff, todo compacto es cerrado, y la verificación de que los abiertos de$X$ junto con los definidos en (I.38) son una base para una topología de X', que coincide con la topología de X sobre X, es trivial (ver, por ejemplo, [Munkres][Chapter3,Theorem8.1]). Además, con esta topología, X' es compacto Hausdorff. Este espacio suele llamarse compactificación de Alexandroff de X..

Definamos $C_0(X') = \{f \in C(X') : f(\infty) = 0\}$, que resulta ser una ideal maximal cerrado de $C(X')$ por el Lema I.62, y en particular es una subálgebra cerrada de $C(X')$. Entonces es evidente (teniendo en cuenta la condición (I.37)), que $C_0(X') \simeq C_0(X)$ vía la identificación $(f \mapsto f|_X)$, en forma isométrica pues $f(\infty) = 0$ y entonces no afecta el valor de la norma.

Llamando $\mathcal{B}_0 = \{f \in C_0(X') : f|_X \in \mathcal{B}\}$, se tiene también $\mathcal{B} \simeq \mathcal{B}_0$, y entonces $\mathcal{B}_0$ es una subálgebra cerrada de $C_0(X')$, y por ende $\mathcal{B}_0$ es una subálgebra cerrada de $C(X')$.

Es también claro que $\mathcal{B}_0$ separa puntos de X', pues separa puntos de X (dados $x \neq y \in X$, existe $g \in \mathcal{B}$ tal que $g(x) \neq g(y)$, y entonces la extensión a X' tal que $g(\infty) = 0$ también separa a x de y; y dados $x \in X$ e ∞, la condición de existencia de una $f_x \in \mathcal{B}$ tal que $f_x(x) \neq 0$ nos dice que la extensión $\widetilde{f_x}$ de f_x a $\mathcal{B}_0$ separa x de ∞, ya que $\widetilde{f_x}(\infty) = 0$).

Como para toda $f \in \mathcal{B}_0$, evidentemente se tiene $\overline{f} \in \mathcal{B}_0$, y X' es compacto Hausdorff, entonces por el Teorema I.63, debe ser $\mathcal{B}_0 = C(X')$, o bien existe $x_0 \in X'$ tal que

$$\mathcal{B}_0 = \{f \in C(X') : f(x_0) = 0\}.$$

La primera posibilidad es imposible, ya que $\mathcal{B}_0 \subseteq C_0(X')$, y este es un subespacio propio de $C(X')$. Entonces debe ser la segunda posibillidad, y suponer $x_0 \neq \infty$ se contradice con la hipótesis de existencia de una $f_{x_0} \in \mathcal{B}$ tal que $f_{x_0} \neq 0$, ya que su extensión $\widetilde{f_{x_0}} \in \mathcal{B}_0$ debe cumplir la misma hipótesis. Se obtiene entonces $\mathcal{B}_0 = C_0(X')$, y mediante el isomorfismo isométrico, $\mathcal{B} = C_0(X)$.□

Podemos considerar el caso de subálgebras reales con el siguiente corolario (previa definición)

Definición I.67 *Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff, y llamemos $C_{\mathbb{R}}(X)$ al $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones acotadas, continuas, a valores reales, con la norma supremo, el cual es un subespacio cerrado de $C_{\mathbb{R}}(X)$. Entonces $C_0^{\mathbb{R}}(X)$ (ó simplemente $C_0(X)$, si el contexto no produce confusión) es el subespacio de $C_{\mathbb{R}}(X)$ de las* **funciones reales que tienden a cero en infinito**, *que se define como (si V_ε es un entorno compacto de x)*

$$C_0^{\mathbb{R}}(X) = \left\{ f \in C_{\mathbb{R}}(X) : \forall\, \varepsilon\ \exists\, V_\varepsilon \subset X \ \text{tal que} \sup_{x \in X - V_\varepsilon} |f(x)| < \varepsilon \right\}.$$

Corolario I.68 *Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff, y $\mathcal{B} \subset C_0^{\mathbb{R}}(X)$ una subálgebra real cerrada, que separa puntos, y tal que para todo $x \in X$, existe $f_x \in \mathcal{B}$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Entonces $\mathcal{B} = C_0^{\mathbb{R}}(X)$.*

Demostración:

Análoga a la del Teorema I.66.□

Ejemplo 26 *Si $C_0(\mathbb{R})$ es el espacio de las funciones continuas sobre la recta, a valores reales, que tienden a cero cuando $|t| \to \infty$, entonces éste es separable: el conjunto de funciones de la forma*

$$\mathcal{B} = \left\{ f : f(t) = \frac{p(t)}{t^d} \right\}, \tag{I.39}$$

donde $p(t)$ es un polinomio y $d > gr(p)$ ($d \in \mathbb{N}$), es claramente una subálgebra de $C_0(\mathbb{R})$ que separa puntos (contiene a la función $\frac{1}{t}$, que separa cualquier par de puntos reales, y es *no nula para todo $x \in \mathbb{R}$), y por ende su clausura es $C_0(\mathbb{R})$; ahora la familia de funciones de la forma (I.39) pero con coeficientes* **racionales** *es claramente una familia numerable de funciones de $C_0(\mathbb{R})$, que es densa en $\mathcal{B}$, y como $\mathcal{B}$ es denso en $C_0(\mathbb{R})$, se obtiene que la primera también lo es.*

Ejemplo 27 *Si X es un espacio localmente compacto Hausdorff, consideremos $C(X)$ como en la Definición I.65, y definamos para cada $\psi \in C(X)$ su soporte como*

$$sop(\psi) = cl\{x \in X : \psi(x) \neq 0\}$$

donde $cl(A)$ denota la clausura de A en la topología de X. Evidentemente, el soporte de cualquier función es cerrrado, pero son de especial de interés las funciones cuyo soporte es un subconjunto compacto de X. Este es el espacio de las **funciones con soporte compacto***:*

$$C_c(X) = \{\psi \in C(X) : sop(\psi) \text{ es compacto}\}.$$

Como para cualquier par de funciones $\psi, \varphi \in C(X)$ se verifican las inclusiones $sop(\psi.\varphi) \subset sop(\psi) \cap sop(\varphi)$ y $sop(\psi + \varphi) \subset sop(\psi) \cup sop(\varphi)$, se observa que $C_c(X)$ es una subálgebra de $C(X)$, pero además es trivial la verificación de que su clausura es una subálgebra $\mathcal{B}$ que se halla en las condiciones del Teorema I.66: por ende $C_c(X)$ es una subálgebra densa de $C(X)$.

II

ESPACIOS DE BANACH

En este capítulo nos concentraremos en los espacios normados completos. Veremos que muchas propiedades agradables e "intuitivas" pueden deducirse cuando pedimos esta condición adicional de completitud a un espacio normado.

II.1 Definiciones

Definición II.1 (sucesiones de Cauchy) *Diremos que una sucesión* $\{x_n\}_{n\in I\!N}$ *en un espacio normado* $(E, \|\ \ \|)$ *es de Cauchy, si*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0 \in I\!N \mid \|x_n - x_m\| < \varepsilon \text{ si } n, m \geq N_0.$$

Como siempre, usando la propiedad (I) de la definición de norma (desigualdad triangular), se demuestra fácilmente que toda sucesión convergente es de Cauchy; todo esto nos lleva a nuestro siguiente objeto de estudio

Definición II.2 *Un* **espacio de Banach** *es un espacio normado* $(E, \|\ \ \|)$, *completo con respecto a la métrica inducida por la norma* $\|\ \ \|$, *o sea un espacio normado tal que para toda sucesión* $\{x_n\}$ *de Cauchy existe un* $x_o \in E$ *tal que* x_0 *es el límite de la sucesión en norma, en el sentido habitual:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0 \in I\!N \mid \|x_n - x_0\| < \varepsilon \text{ si } n \geq N_0.$$

Cabe notar que la Definición II.1 de arriba tiene sentido aún en el caso en que $\| \ \|$ sea nada más que una seminorma. También es claro que si una sucesión $\{x_n\}$ cumple $\|x_n\| \to_n 0$, entonces es de Cauchy en seminorma; en algunos casos se podrá (y será de utilidad) probar la recíproca, es decir que para toda sucesión $\{x_n\}$ de Cauchy en seminorma existe un elemento x del espacio tal que $\|x_n - x\| \to_n 0$ (aunque no se pueda hablar de convergencia en el sentido riguroso de la palabra, puesto que no se dispone de una estructura de cerrados (o abiertos) inducidos por una métrica).

Teorema II.3 *Sea E un espacio de Banach. Si E^* es separable, entonces E es separable.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un subconjunto denso numerable de E^*. Elijamos para cada $n \in \mathbb{N}$un vector $x_n \in E$, $\|x_n\| = 1$, tal que

$$|\lambda_n (x_n)| \geq \|\lambda_n\| \,/ 2.$$

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas del conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con coeficientes racionales (en el caso $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) o de la forma $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ (en el caso $\mathbb{F}=\mathbb{C}$). Este es evidentemente un subconjunto numerable de E. Bastará entonces probar que es denso en E.

Si $\mathcal{D}$ no es denso en E, entonces existe un $y \in E - \mathcal{D}$ y una funcional lineal $\lambda \in E$ tal que $\lambda(y) \neq 0$ pero $\lambda(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{D}$ (por el Corolario I.25 al teorema de Hahn-Banach). Sea $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a λ. Entonces

$$\begin{aligned} \|\lambda - \lambda_{n_k}\|_{E^*} &\geq |(\lambda - \lambda_{n_k})(x_{n_k})| \\ &= |\lambda_{n_k}(x_{n_k})| \\ &\geq \|\lambda_{n_k}\| \,/ 2 \end{aligned}$$

lo que implica que $\|\lambda_{n_k}\| \to_k 0$. Esto prueba que $\lambda \equiv 0$, lo cual es absurdo pues $\lambda(y) \neq 0$.□

II.1.1 Ejemplos de espacios normados completos

Volviendo sobre los ejemplos de espacios normados que mencionamos al comienzo del Capítulo I (sección I.1.1), veamos que todos ellos son espacios de Banach:

Ejemplo 28 *Resulta evidente (usando la completitud de $\mathbb{R}$) que los Ejemplos 1, 2 y 3 son espacios de Banach.*

Ejemplo 29 *Es un ejercicio clásico de un curso de cálculo avanzado el hecho de que los espacios normados del Ejemplo 7 son completos (siempre usando la completitud de $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).*

Ejemplo 30 *La demostración de que el Ejemplo 4.1 en el caso* $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ *es un espacio de Banach es como sigue (el caso* $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ *es idéntico): tomamos una sucesión de funciones continuas* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, *y si suponemos que la susodicha es de Cauchy, entonces tenemos para cada* $t\in[a,b]$

$$|f_n(t)-f_m(t)|\leq\|f_n-f_m\|_\infty<\varepsilon \quad si\; n,m\geq N_0\,;$$

esto prueba que para cada t, *la sucesión* $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *es de Cauchy; usando la completitud de* $\mathbb{R}$ *tenemos entonces para cada punto un* $x_0(t)\in\mathbb{R}$, *tal que* $f_n(t)\to x_0(t)$. *Definimos (obviamente) punto a punto la función límite* $f(t)=x_0(t)$, *que resulta continua puesto que*

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|\;,$$

y la primera y última parte son arbitrariamente pequeñas tomando n *grande, mientras que luego se acota la del medio utilizando la continuidad de* f_n. *Es una verificación trivial (mediante la desigualdad triangular, nuevamente) que la función así definida es realmente el límite de la sucesión.*

Ejemplo 31 *Con la demostración de arriba en mente la completitud del Ejemplo 5, cuando el espacio de llegada* $(E,\|\quad\|)$ *es un espacio de Banach, es evidente (se copia la demostración letra por letra); lo mismo ocurre con el Ejemplo 6.*

Ejemplo 32 *La completitud de* L^∞ *en el Ejemplo 8.2 se demuestra en forma bastante sencilla utilizando la completitud del cuerpo de llegada* $\mathbb{F}$*: si* $\{f_i\}$ *es una sucesión de Cauchy en* L^∞, *entonces para cada* $\|f_i\|_\infty$ *se toma el conjunto*

$$A_i=\{t\in X:\mid f_i(t)\mid>\|f_i\|_\infty\}\,,$$

que tiene medida cero (por la definición de la norma), y llamamos $A=\cup_{i\in\mathbb{N}}A_i$. *Entonces* A *resulta tener medida cero también, y se define en su complemento* $S=X-A$

$$f(t)=\lim_{i\to\infty}f_i(t),$$

el cual existe ya que allí

$$|f_n(t)-f_m(t)|\leq\|f_n-f_m\|_\infty$$

y por lo tanto en cada punto $t\in S$, *la sucesión* $\{f_i(t)\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy en el cuerpo* $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$, *que es completo. La convergencia en norma es simple ya que (sobre* S*) dado* $M>0$, *existe un* N_0 *tal que si* $n\geq N_0$, *podemos conseguir que* $|f_n(t)-f(t)|<M$, *con lo cual* $\{\mid f_n-f\mid>M\}\subset X-S=A$, *que tiene medida cero, así que*

$$\|f_n-f\|_\infty=\inf\{M \;tal\; que\; \mu(\{\mid f_n-f\mid>M\})=0\}=0\,.$$

Ejemplo 33 *Una forma elegante de demostrar la completitud de L^1 del Ejemplo 8.1 tal como se da en [Fava-Zo][CapítuloVII,Teorema7.1] es, dada una sucesión absolutamente sumable $\{f_i\}_{i\in I\!N}$ en L^1, probar que es sumable (ver la Proposición II.4 en la sección II.1.2).*

Para ello consideremos la serie

$$\Phi(x) = \sum_{i\geq 0} |f_i(x)|$$

que resulta finita en casi todo punto ya que $\{f_i\}$ absolutamente sumable significa $\sum_{i\geq 1} \|f_i\|_1 < \infty$, y por el teorema de Beppo Levi, Φ es integrable y por ende finita en casi todo punto. Podemos definir entonces la función

$$S(x) = \sum_{i\geq 0} f_i(x)$$

que resulta finita en casi todo punto, y además la cota $|S| \leq \Phi$ nos asegura que $S \in L^1$. Pero esto significa que $\sum_{i=1}^n f_i(x) \to_n S(x)$ c.t.p., y como además $|S - \sum_{i=1}^n f_i| \leq 2\Phi$, el teorema de la convergencia dominida nos garantiza la convergencia en L^1. Esto prueba que $\{f_i\}$ es sumable, y por ende L^1 es completo.

Ejemplo 34 *Como mencionamos, los espacios L^p no son realmente espacios normados, pero sin embargo es posible probar (ver [Whe-Zygmund][Theorem8.14]) que toda sucesión $\{\varphi_n\}$ de Cauchy en seminorma* **p** *es convergente a un elemento de L^p; es decir que existe $\varphi \in L^p$ tal que $\|\varphi_n - \varphi\|_p \to_n 0$. Este resultado será fundamental cuando tratemos de "arreglar" el problema de la funciones no nulas con integral nula, y obtengamos un espacio de Banach en el sentido riguroso de la definición.*

Ejemplo 35 *En el caso del Ejemplo 9, puede probarse (y lo haremos más adelante) que $BV[a,b]$ es el dual de $C[a,b]$, y como una consecuencia directa (sección II.3.1) del Teorema II.8, resulta automáticamente un espacio de Banach.*

Ejemplo 36 *Para demostrar que las funciones lipschitzianas del Ejemplo 10 forman un espacio de Banach, probaremos esta afirmación en el caso general de las lipschitzianas con respecto a una métrica d arbitraria (recordemos que el caso $d(x,y) = |x-y|^{1+\varepsilon}$, con $\varepsilon > 0$ es trivial). Es decir, probaremos que el espacio normado*

$$L_d = \left\{ f : [a,b] \to I\!F \text{ tales que } \|f\|_{L_d} = \sup_{t\neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{d(t,s)} + |f(a)| < \infty \right\}$$

es un espacio completo.

Como para todo $t, s \in [a,b]$, si $f \in L_d$ entonces es claro que vale

$$|f(t) - f(s)| \leq \|f\|_{L_d} d(t,s)\,, \tag{II.1}$$

es sencillo probar (tomando $s = a$) que $L_d \subset C[a,b]$ para toda d (recordemos que $C[a,b]$ denota el espacio de funciones $f : [a,b] \to$ **F** *acotadas, con la norma supremo), y que además existe una constante M_d (para cada métrica) tal que*

$$\|f\|_\infty \leq M_d \|f\|_{L_d}\,; \tag{II.2}$$

(es decir que la inclusión $L_d \subset C[a,b]$ es una función continua para cualquier métrica d). De aquí se concluye que toda sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ en L_d es una sucesión de Cauchy en $C[a,b]$.

Consideremos el siguiente subespacio de L_d :

$$\widetilde{L_d} = \{f \in L_d : f(a) = 0\}.$$

Lo primero que se observa es que es cerrado en L_d, ya que si f es un punto de acumulación de $\widetilde{L_d}$, entonces existe $\{f_n\}$ en $\widetilde{L_d}$ tal que $\|f_n - f\|_{L_d} \to_n 0$, pero este límite es sencillamente

$$\lim_n \left\{ \sup_{t \neq s} \frac{|(f_n(t) - f(t)) - (f_n(s) - f(s))|}{d(t,s)} + |f(a)| \right\}$$

(ya que $f_n(a) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$) y $f(a) \neq 0$ implica $|f(a)| > 0$, lo cual es imposible ya que el otro término de la suma es no negativo pero el límite debe ser nulo.

Supongamos por un momento que hemos probado que $\widetilde{L_d}$ es un espacio de Banach; entonces dada $\{g_n\}$ de Cauchy en L_d, tomamos la sucesión

$$f_n(x) = g_n(x) - g_n(a),$$

y observamos que la sucesión $\{g_n(a)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{F}$ (por ser $\{g_n(x)\}$ de Cauchy en $C[a,b]$): por ende $\{g_n(a)\}$ es convergente a un número que llamaremos $g(a)$. Como $f_n \in \widetilde{L_d}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $f \in \widetilde{L_d}$, tal que $f_n \xrightarrow{\|\ \|_{L_d}} f$. Tomando $g(x) = f(x) + g(a)$ (que claramente está en L_d) se prueba fácilmente que $g_n \xrightarrow{\|\ \|_{L_d}} g$.

Podemos suponer entonces que tenemos una sucesión $\{f_n\}$ de Cauchy en $\widetilde{L_d}$. Por la observación (II.2) $\{f_n\}$ es de Cauchy en $C[a,b]$, y como éste es completo, existe una función $f \in C[a,b]$ tal que $f_n \to_n f$ uniformemente. Evidentemente, como para cada f_n vale $f_n(a) = 0$, debe ser $f(a) = 0$.

La desigualdad

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

junto con (II.1) prueba que, dado $\varepsilon > 0$,

$$|f(s) - f(t)| < 2\varepsilon + \|f_n\|_{L_d} d(t,s) \tag{II.3}$$

si $n \geq N_0(\varepsilon)$. Ahora la sucesión de normas $\left\{\|f_n\|_{L_d}\right\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, puesto que

$$\left|\|f_n\|_{L_d} - \|f_m\|_{L_d}\right| \leq \|f_n - f_m\|_{L_d},$$

y entonces existe el límite $M = \lim_n \|f_n\|_{L_d}$. Sólo resta tomar límite en (II.3), para obtener $|f(t) - f(s)| \leq M.d(t,s)$. Esto asegura que $f \in \widetilde{L_d}$.

Pensemos por un momento en el mecanismo de la demostración del último paso: hemos probado que toda sucesión convergente en $C[a,b]$, que además está en el subespacio $\widetilde{L_d}$, tiene por límite un punto de $\widetilde{L_d}$. Pero esto es lo mismo que decir que el subespacio $\widetilde{L_d}$ es un subespacio **cerrado de $\mathbf{C[a,b]}$** *(con respecto a la topología métrica de $C[a,b]$). La desigualdad (II.2) nos dice que la función $\| \quad \|_{L_d} : \widetilde{L_d} \to \mathbb{R}^+$ es continua mirada como función de $C[a,b]$ en $\mathbb{R}^+$, y como $\widetilde{L_d}$ es un subespacio cerrado de $C[a,b]$, el teorema de extensión de Tietze (ver, por ejemplo, [Kelley1][Chapter7,ProblemO], o bien [Munkres][Chapter4,Theorem3.2]) nos asegura que existe una extensión continua de $\| \quad \|_{L_d}$ a todo el espacio $C[a,b]$, que llamaremos $\| \quad \|_{ext}$.*

Ahora, si consideramos a f como el límite sobre p (en $C[a,b]$) de f_{n+p}, entonces en la expresión

$$\left\| f_n - \lim_p f_{n+p} \right\|_{L_d} = \left\| f_n - \lim_p f_{n+p} \right\|_{ext}$$

se puede extraer el límite de la norma (por ser ésta una función continua sobre $C[a,b]$), y por ende

$$\begin{aligned} \lim_n \|f_n - f\|_{L_d} &= \lim_n \|f_n - \lim_p f_{n+p}\|_{L_d} = \lim_n \left\{ \lim_p \|f_n - f_{n+p}\|_{L_d} \right\} \\ &= \lim_p \left\{ \lim_n \|f_n - f_{n+p}\|_{L_d} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(donde los límites se intercambian por ser los términos positivos) lo que nos dice que $f_n \to_n f$ en la norma $\| \quad \|_{L_d}$.

II.1.2 Sucesiones absolutamente sumables

Diremos que una sucesión de vectores $\{x_n\}$ en un espacio normado es **sumable** cuando $\sum_{n=1}^N x_n$ es convergente (en norma), y **absolutamente sumable** cuando $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$. Una caracterización bastante útil de los espacios normados completos nos la da la

Proposición II.4 (a) *Un espacio normado es completo si y sólo si cada sucesión absolutamente sumable es sumable.*

DEMOSTRACIÓN:

Si el espacio es completo, y tenemos una sucesión absolutamente sumable, entonces

$$\left\| \sum_{n=1}^M x_n - \sum_{n=1}^N x_n \right\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \|x_n\| \to 0 \quad si\ N, M \to \infty\,,$$

puesto que la serie de las normas es finita y por ende la sucesión $\sum_{n=1}^N \|x_n\|$ es convergente, lo que implica que es de Cauchy; hemos probado que $\sum_{n=1}^N x_n$ es de Cauchy, y por ende convergente.

Para la recíproca, tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ de Cauchy cualquiera en E, y escribamos (definiendo $x_0 = 0$)

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i$$

La misma expresión vale para cualquier subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, poniendo $x_{i_0} = 0$, es decir

$$x_{n_k} = \sum_{j=0}^{k-1} \left(x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \right) = \sum_{j=0}^{k-1} s_{n_j} = \sum_{j=0}^{k-1} y_j \tag{II.4}$$

Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, para cada $j \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un n_j tal que $\left\| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \right\| < \frac{1}{2^j}$, con lo cual, a partir de (II.4), obtenemos

$$\sum_{j=0}^{k-1} \|y_j\| = \sum_{j=0}^{k-1} \left\| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \right\| < \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \rightarrow_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2 < \infty \,,$$

lo que nos dice que la sucesión $\{y_n\}_{n\geq 1}$ es absolutamente sumable, y por la hipótesis, sumable. Pero que sea sumable quiere decir (mirando (II.4)) que exite el límite

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k-1} y_j = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

Es trivial verificar que si una sucesión de Cauchy en un espacio métrico tiene una subsucesión convergente, entonces la sucesión en sí converge, y al mismo límite: hemos probado que el espacio E es completo.$\square$

La proposición anterior es fácilmente adapatable al caso en que $\| \quad \|$ es una seminorma (aunque se pierda unicidad), de la siguiente manera

Proposición II.4 (b) *Sea E un espacio vectorial, dotado de una seminorma $\| \quad \|_E$. Entonces para toda sucesión $\{x_n\}$ de Cauchy en seminorma existe algún $x \in E$ tal que $\|x_n - x\|_E \rightarrow_n 0$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ implica la existencia de algún $x \in E$ tal que $\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - x \right\|_E \rightarrow_N 0$.*

II.2 Completación y el teorema de extensión

Así como se puede completar en forma única cualquier espacio métrico M de manera que éste sea isométricamente isomorfo a un subconjunto denso de su completado $\widetilde{M}$, en el caso particular de un espacio normado E se obtiene que E es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de su completado $\widetilde{E}$. Los detalles pueden verse en [Kolmogorov][CapítuloII,sección3.4]. Sobre el resultado clásico del teorema de extensión de funciones uniformemente continuas definidas sobre un denso, hay poco que añadir, pero como vamos a utilizarlo bastante, daremos una demostración del mismo.

Teorema II.5 (teorema de extensión) *Supongamos que A es operador lineal acotado de un espacio normado $(E, \| \ \|_E)$ en un espacio de Banach $(F, \| \ \|_F)$. Entonces A puede ser extendido en forma única a un operador lineal acotado $\widetilde{A} : \widetilde{E} \to F$ (con la misma norma), de la completación de E en $(F, \| \ \|_F)$.*

Demostración:

Sea $\widetilde{E}$ una completación de E. Para cada x en $\widetilde{E}$, hay una sucesión de elementos $\{x_n\}$ en E tales que $x_n \to_n x$. Como $\{x_n\}$ converge, es de Cauchy, y entonces para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar N tal que si $n, m \geq N$ entonces $\|x_n - x_m\|_E < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$. Así,

$$\|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_E < \varepsilon \quad \text{para } n, m \geq N.$$

Esto prueba que $\{Ax_n\}$ es una sucesión de Cauchy en F, y por la hipotesis de completitud existe $y \in F$ tal que $Ax_n \to_n y$. Definimos $\widetilde{A}x = y$; esta definición resulta independiente de la elección de la sucesión $\{x_n\}$ puesto que $x_n \to_n 0$ implica $\left\|\widetilde{A}x\right\|_F = \|\lim_n Ax_n\|_F = \lim_n \|Ax_n\|_F \leq \|A\| \cdot \lim_n \|x_n\|_E \to_n 0$, y por ende $\widetilde{A}x = 0$. Para probar que $\widetilde{A}$ es acotado necesitamos la desiguadad

$$\left\|\widetilde{A}x\right\|_F = \lim_n \|Ax_n\|_F \leq \|A\| \cdot \lim_n \|x_n\|_E \ ,$$

junto con el hecho de que $\lim_n \|x_n\|_E$ existe puesto que $|\|x_n\|_E - \|x_m\|_E| \leq \|x_n - x_m\|_E$, lo que indica que $\{\|x_n\|_E\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ (y $\mathbb{R}$ es completo), y vale $\|x\|_{\widetilde{E}} = \lim_n \|x_n\|_E$ puesto que $x_n \to_n x$ en $\widetilde{E}$. Juntando estas dos cosas obtenemos

$$\left\|\widetilde{A}x\right\|_F \leq \|A\| \cdot \|x\|_{\widetilde{E}} \ .$$

Esta desigualdad además prueba que $\left\|\widetilde{A}\right\| \leq \|A\|$; pero por otro lado el hecho de que E sea un subespacio de $\widetilde{E}$ nos dice que tomar supremos sobre él es más restringido que tomar supremo sobre todo el completado, y entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{A}\right\| &= \sup_{\substack{x \in \widetilde{E} \\ \|x\|_{\widetilde{E}} = 1}} \left\|\widetilde{A}x\right\|_F \\
&= \sup_{\substack{x \in \widetilde{E} \\ \|x\|_{\widetilde{E}} = 1}} \lim\nolimits_{x_n \to x} \|Ax_n\|_F \geq \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \lim\nolimits_{x_n \to x} \|Ax_n\|_F \\
&= \sup\nolimits_{\|x\|_E = 1} \|A(\lim\nolimits_{x_n \to x} x_n)\|_F = \sup\nolimits_{\|x\|_E = 1} \|Ax\|_F \\
&= \|A\|
\end{aligned}$$

y ésto último termina de probar la igualdad $\left\|\widetilde{A}\right\| = \|A\|$.□

II.3 El espacio de operadores

Como mencionamos en la Definición I.31, este espacio tiene una estructura natural de espacio normado, y una de las primeras cosas en la que nos concentraremos es en hallar la relación entre subespacios y operadores:. si H es un subespacio de E, consideremos la aplicación "restricción" $\gamma : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(H,F)$ definida por $(A \longmapsto A\mid_H)$; vamos a probar la

Proposición II.6 *γ es un operador lineal acotado, y si H tiene dimensión finita, es un epimorfismo.*

DEMOSTRACIÓN:

Está claro que γ lineal. Para ver que γ es acotado, tomamos $A \in \mathcal{L}(E,F)$ y $h \in H$; como $H \subset E$, h es también un vector de E, y por ende $\gamma(A)h = A\mid_H h = Ah$. Tomando norma obtenemos

$$\|\gamma(A)\| = \sup_{\|h\|=1, h\in H} \|\gamma(A)h\| = \sup_{\|h\|=1, h\in H} \|Ah\| \leq \sup_{\|x\|=1, x\in E} \|Ax\| = \|A\| \tag{II.5}$$

lo que nos dice que $\|\gamma\| \leq 1$ (y en particular es acotado).

Para ver que en el caso de un subespacio de dimensión finita γ es sobreyectivo, tomemos $B = \{v_j\}_{j\in J}$ (con $\#(J) = P$, finito) una base de H, de manera que todos los elementos tengan norma uno, y extendámola a una base

$$B' = B \cup \{v_i\}_{i\in I} = \{v_s\}_{s\in J\cup I}$$

de todo el espacio E, con la misma condición sobre la norma. Ahora, dado $A \in \mathcal{L}(H,F)$, y $h = \sum_{j\in J} \beta_j v_j \in H$, definimos $\varphi_j \in H^*$ de la siguiente manera: $\varphi_j(h) = \beta_j$ (la prueba de que esto define realmente una funcional acotada utliliza fuertemente el hecho de que $\dim H < \infty$ (ver el Lema I.38, en la sección sobre espacios de dimensión finita) extendiéndola a una funcional $f_j \in E^*$ de manera que $\|f_j\| = \|\varphi_j\|$ mediante el teorema de Hahn-Banach (Corolario I.22); ahora, dado $x \in E$, vamos a definir un operador lineal $\Delta : E \to F$ de la siguiente manera: si $x = h + y = \sum_{j\in J} \beta_j v_j + \sum_{i\in I} \alpha_i v_i$ (donde todos salvo finitos α_i son cero) entonces

$$\Delta x = \sum_{j\in J} f_j(x) A v_j\,, \tag{II.6}$$

donde la suma tiene sentido puesto que hay finitos j. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j\in J} f_j(x)Av_j &= \textstyle\sum_{j\in J} f_j(h)Av_j + \sum_{j\in J} f_j(y)Av_j \\
&= \textstyle\sum_{j\in J} \beta_j A v_j + \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} \alpha_i f_j(v_i)\right) A v_j \\
&= \textstyle A\left(\sum_{j\in J} \beta_j v_j\right) + \sum_{i\in I} \alpha_i \left(\sum_{j\in J} f_j(v_i) A v_j\right)
\end{aligned}$$

y entonces está bastante claro que $\gamma(\Delta) = A$, puesto que, si $x \in H$, entonces todos los α_i son nulos y se obtiene $\Delta x = Ax$. Resta probar que Δ es acotado, y para esto, tomemos norma en (II.6) (teniendo en cuenta que los v_j tienen norma uno)

$$\begin{aligned} \|\Delta x\| \leq \textstyle\sum_{j\in J} \|f_j(x)Av_j\| &= \textstyle\sum_{j\in J} |f_j(x)| \, \|Av_j\| \\ &\leq \textstyle\sum_{j\in J} \|f_j\| \cdot \|x\| \cdot \|A\| \cdot \|v_j\| \qquad \text{(II.7)} \\ &= \left(\textstyle\sum_{j\in J} \|\varphi_j\|\right) \|A\| \cdot \|x\| \end{aligned}$$

y ahora, llamando $M = \max_{j\in J} \|\varphi_j\|$, y recordando que la cantidad de elementos en la base B es P, tenemos

$$\|\Delta x\| \leq (MP\,\|A\|) \cdot \|x\| \,.\square \qquad \text{(II.8)}$$

Puede pensarse a la segunda parte de la demostración anterior como una especie de extensión del teorema de Hahn-Banach, para operadores definidos sobre un espacio de dimensión finita, en vez de para una funcional definida sobre el subespacio generado por un sólo vector.

De esta manera, si $\dim H < \infty$, se obtiene una manera natural de pensar a $\mathcal{L}(H,F)$ como subconjunto de $\mathcal{L}(E,F)$, simplemente asignándole a cada operador acotado A en el primero, uno cualquiera en el segundo tal que su restricción a H coincida sobre él.. En otras palabras, podemos pensar en una inversa para γ, de la siguiente manera

$$\Gamma : \mathcal{L}(H,F) \to \mathcal{L}(E,F)$$

$$A \longmapsto \Delta_A$$

donde Δ_A es el operador definido en (II.6). De la discusión anterior se deduce el

Corolario II.7 $\Gamma : \mathcal{L}(H,F) \to \Gamma\left(\mathcal{L}(H,F)\right)$ *es un isomorfismo acotado, con inversa acotada.*

DEMOSTRACIÓN:

Γ es lineal, lo cual se deduce de la expresión

$$\left(\Delta_{A+B}\right)x = \sum_{j\in J} f_j(x)\left(A+B\right)v_j = \sum_{j\in J} f_j(x)Av_j + \sum_{j\in J} f_j(x)Bv_j = \Delta_A x + \Delta_B x,$$

y que además es un monomorfismo puesto que si $\Delta_A = \Delta_{A'}$ sobre todo E, en particular coinciden sobre H, y entonces

$$A = \Delta_A\mid_H = \Delta_{A'}\mid_H = A'\,;$$

otra manera de verlo es mediante la identidad $\gamma \circ \Gamma = id_{\mathcal{L}(H,F)}$, que se deduce trivialmente de las definiciones. Ahora la expresión (II.8) nos dice que Γ es acotado, pero más precisamente dice (por (II.7)) que

$$\|\Gamma(A)\| = \sup_{\|x\|=1} \|\Delta_A x\| \leq \left(\sum_{j\in J} \|\varphi_j\| \right) \|A\| = D\,\|A\| \ .$$

Por otra parte, la identidad $\Gamma \circ \gamma \mid_{\Gamma(\mathcal{L}(H,F))} = id_{\Gamma(\mathcal{L}(H,F))}$, junto con la anterior, nos dice que $\Gamma^{-1} : \Gamma\left(\mathcal{L}(H,F)\right) \to \mathcal{L}(H,F)$ es en realidad $\gamma \mid_{\Gamma(\mathcal{L}(H,F))}$; y como esta última era acotada y con norma menor que uno (ver Proposición II.6) se deduce que Γ^{-1} es acotada, y que $\left\|\Gamma^{-1}\right\| \leq 1.\Box$

Esto nos da una manera de mirar $\mathcal{L}(H,F)$ como un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(E,F)$, para cualquier subespacio H de M que tenga dimensión finita. Pero el isomorfismo Γ tiene una desventaja visible: no es único. Es decir que pueden existir (y en general existen) otras extensiones de operadores acotados, y por ende las propiedades de Γ no son demasiado buenas como para que resulte de gran utilidad.

Una propiedad notable de $\mathcal{L}(E,F)$ es que su completitud sólo depende del espacio F de llegada, resultando independiente de las características del espacio de salida E. Más precisamente:

Teorema II.8 (completitud de $\mathcal{L}(E,F)$) *Sean E, F espacios normados con $E \neq 0$. Entonces el espacio $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio de Banach si y sólo si F es un espacio de Banach.*

Demostración:

Supongamos que F es completo, y tomemos una sucesión de Cauchy $\{A_n\}$ de operadores en $\mathcal{L}(E,F)$. Entonces para cada $x \in E$, $\{A_n x\}$ es una sucesión de Cauchy en F, y por ende convergente a un punto $y_x = \lim_n A_n x$ en F. Definimos $A : E \to F$ de la siguiente manera

$$x \longmapsto y_x$$

Es evidente que es una defincición consistente que hace de A un operador lineal. Sólo falta ver que es acotado, y que realmente es el límite en $\mathcal{L}(E,F)$ de la sucesión $\{A_n\}$. Para lo primero, observemos que

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \leq \|A_n - A_m\|$$

lo que nos dice que la sucesión de normas $\{\|A_n\|\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por ende convergente a un número C. Entonces

$$\|Ax\| \leq \lim_n \|A_n x\| \leq \lim_n \|A_n\| \cdot \|x\| = C\,\|x\|\,.$$

lo que prueba que es acotado y además $\|A\| \leq C$. Por otro lado, para probar la convergencia en norma de operadores, de la desigualdad

$$\|(A - A_n)\,x\| = \lim_m \|A_m x - A_n x\| \leq \lim_m \|A_m - A_n\| \cdot \|x\|$$

se obtiene

$$\|A - A_n\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax - A_n x\|}{\|x\|} \leq \lim_m \|A_m - A_n\| \to 0 \quad si\ n \to \infty\,.$$

Ahora que sabemos que converge, podemos añadir algo más, que es la observación

$$C \longleftarrow_n \|A_n\| \leq \|A_n - A\| + \|A\| \longrightarrow_n \|A\|$$

que nos dice $C \leq \|A\|$; esta desigualdad junto con la anterior prueba que en realidad $C = \lim_n \|A_n\| = \|A\|$.

Para la recíproca, como $E \neq 0$, el teorema de Hahn-Banach (Corolario I.23) nos dice que $E^* \neq 0$; supongamos que existe una sucesión de Cauchy $\{y_n\}$ en F que no tenga límite (es decir, F no es completo). Vamos a probar que $\mathcal{L}(E,F)$ no es completo: para esto definimos una sucesión de operadores $\{T_n\}$ en $\mathcal{L}(E,F)$ de la siguiente manera:

$$T_n x = f(x) y_n$$

donde f es cualquier funcional acotada sobre E no nula. De la definición se deduce que los T_n son acotados, puesto que

$$\|T_n x\|_F = \|f(x) y_n\|_F = |f(x)| \cdot \|y_n\|_F \leq (\|f\| \cdot \|y_n\|_F)\, \|x\|_E$$

Por otra parte la desigualdad triangular nos dice que T_n es una sucesión de Cauhy, puesto que

$$\|T_n - T_m\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T_n - T_m)\, x\|_F}{\|x\|_E} \leq \|f\| \cdot \|y_n - y_m\|_F$$

Supongamos que existe un operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que $T_n \to_n T$, y tomemos un $x \in E$ cualquiera tal que $f(x) \neq 0$. Entonces

$$\left\| y_n - T\left(\frac{x}{f(x)}\right) \right\|_F = \frac{1}{|f(x)|} \cdot \|T_n x - Tx\|_F \leq \frac{\|x\|_E}{|f(x)|} \cdot \|T_n - T\| \to_n 0$$

lo que prueba que el vector $\frac{1}{f(x)} \cdot Tx \in F$ es un límite para la sucesión $\{y_n\}$. Esto es absurdo, ya que nuestra hipótesis era que no tenía límite: se deduce que no puede haber límite para la sucesión $\{T_n\}$, y por ende $\mathcal{L}(E,F)$ no es completo.$\square$

II.3.1 Un caso particular: el dual como espacio de Banach

La primera aplicación del Teorema II.8 es en el caso $F = \mathbb{F}$, donde $\mathbb{F}$ es el cuerpo sobre el que se define el espacio vectorial E (que en nuesto caso siempre es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Este teorema nos dice que para cualquier espacio normado E, completo o no, E^* es un espacio normado completo.

II.4 El teorema de Baire y sus aplicaciones

Recordaremos el teorema de categoría de Baire, que se prueba en un curso de cálculo avanzado (la demostración puede hallarse en [Kolmogorov][CapítuloII,sección3]). Recordemos que un conjunto nunca denso es un conjunto A tal que el interior de la clausura de A (o sea el conjunto $\left(\overline{A}\right)^o$) es **no** vacío.

Teorema II.9 (BAIRE) *Un espacio métrico completo (en particular, un espacio de Banach) no puede escribirse como una unión numerable de conjuntos nunca densos.*

A partir de él se deducen una cantidad de resultados fundamentales de los espacios de Banach, que resultan herramientas imprescindibles para su estudio. Comenzemos con uno de los más importantes:

Teorema II.10 (teorema de la función abierta) *Sea $T : E \to F$ una transformación lineal continua, tal que E es un espacio de Banach, y $S = Ran\,(T)$ (que claramente es un subespacio de F) es un espacio de Banach. Entonces T es abierta sobre su rango (es decir manda abiertos de E en abiertos de $Ran\,(T)$).*

Demostración:

Si N es un entorno de x, entonces queremos ver que $T(N)$ es un entorno de Tx; como $T(x+N) = Tx + T(N)$, podemos suponer que $x = 0$. Por otro lado todo entorno de cero contiene un entorno básico del tipo

$$B_r^E = \{x \in E \mid \|x\|_E < r\}$$

con lo cual será suficiente probar que existe r' tal que $B_{r'}^S \subset T(B_r^E)$ (donde $B_{r'}^S$ es la bola de radio r' sobre S, como arriba). Pero si observamos que

$$T(B_r^E) = T(r \cdot B_1^E) = r \cdot T(B_1^E),$$

sólo será necesario probar (con una traslación conveniente de por medio) que existe algun r tal que $T(B_r^E) = T(B_r)$ tiene interior no vacío en S.

Está claro que

$$S = \cup_{n=1}^{\infty} T(B_n),$$

y entonces, por el teorema de Baire, existe algún n tal que $\overline{T(B_n)}$ tiene interior no vacío; esto quiere decir que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^S \subset \overline{T(B_n)}$. Lo que vamos a demostrar es que en realidad, $\overline{T(B_n)} \subset T(B_{2\cdot n})$ con lo cual el último tiene interior no vacío. Para esto tomemos $y \in \overline{T(B_n)}$; por la misma definición de clausura existe un $x_1 \in B_n$ tal que

$$y - Tx_1 \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}^S \subset \overline{T(B_{\frac{n}{2}})}.$$

Ahora elijamos $x_2 \in B_{\frac{n}{2}}^S$ tal que

$$y - Tx_1 - Tx_2 \in B_{\frac{\varepsilon}{4}}^S \subset \overline{T(B_{\frac{n}{4}})}.$$

Se construye de esta manera una sucesión $\{x_k\}$, de manera que

$$x_k \in B^S_{\frac{n}{2^{k-1}}} \qquad , \qquad y - \sum_{j=1}^{k} Tx_j \in B^S_{\frac{\varepsilon}{2^k}} \subset \overline{T(B_{\frac{n}{2^k}})}.$$

Ahora, la suma $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ es finita, puesto que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{2^{k-1}} = n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \cdot n,$$

en otras palabras, la sucesión $\{x_k\}$ es absolutamente sumable. La Proposición II.4 nos dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge, y entonces define un elemento $x \in B_{2 \cdot n}$ (por la cuenta anterior). Por otro lado,

$$\left\| y - \sum_{j=1}^{k} Tx_j \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$$

lo que nos dice que $y = \sum_{j=1}^{\infty} Tx_j = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = Tx$, es decir, $y \in T(B_{2\cdot n})$.□

En el caso particular de que E y F sean espacios de Banach, el teorema anterior nos dice que todo epimorfismo acotado es abierto. Otro corolario trivial es el importante

Teorema II.11 (teorema de la función inversa) *Todo isomorfismo continuo entre dos espacios de Banach es un homeomorfismo.*

Corolario II.12 *Supongamos que E es un espacio normado, y existen dos normas $\| \quad \|_1$ y $\| \quad \|_2$ que lo hacen completo. Si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\| \quad \|_1 \leq C \| \quad \|_2$$

entonces existe otra constante D tal que

$$\| \quad \|_2 \leq D \| \quad \|_1 \ .$$

En otras palabras: si dos normas de un espacio de Banach son comparables, entonces son equivalentes. (La demostración de este hecho se obtiene aplicándole el teorema anterior a la identidad de E.)

Ahora podemos obtener un resultado concreto sobre operadores: necesitamos previamente la

Definición II.13 (gráfico de un operador) *Si T es un operador lineal entre dos espacios normados E y F, el* **gráfico** *de T, denotado $\Gamma(T)$ ó $G(T)$ es el siguiente subconjunto del producto cartesiano*

$$\Gamma(T) = \{(x, y) \mid (x, y) \in E \times F, \quad y = Tx\} \ .$$

Es evidente que el gráfico de un operador lineal es, en realidad, un subespacio del producto.

Teorema II.14 (teorema del gráfico cerrado) *Si $T : E \to F$ es un operador lineal entre espacios de Banach, entonces T es acotado si y sólo si el gráfico de T es cerrado como subconjunto del producto de espacios normados definido al comienzo (Definición I.11).*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $\Gamma(T)$ es cerrado. La verificación de que un producto finito de espacios de Banach es un espacio de Banach es una cuenta sencilla, y ésto nos dice que $\Gamma(T)$ es un subespacio cerrado de un espacio de Banach, y por ende un espacio de Banach él mismo. Consideremos las proyecciones $\Pi_1 : \Gamma(T) \to E$, $\Pi_2 : \Gamma(T) \to E$ en la primera y segunda coordenada respectivamente, es decir

$$(x, Tx) \overset{\Pi_1}{\longmapsto} x, \qquad (x, Tx) \overset{\Pi_2}{\longmapsto} Tx$$

Está bastante claro que ambas son operadores lineales acotados entre espacios de Banach, pero además Π_1 es un isomorfismo, y entonces (por el teorema de la función inversa) $\Pi_1^{-1} : E \to \Gamma(T)$ es acotada. Pero $T = \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}$ lo que prueba que T es acotado. La recíproca es trivial.□

Corolario II.15 *Para probar que un operador lineal $T : E \to F$ (entre espacios de Banach) es acotado, sólo es necesario probar que* **si** *una sucesión x_n converge a algún punto x de E, y* **por otro lado** *la sucesión Tx_n converge a algún punto y de F,* **entonces** *$Tx = y$.*

La demostración es obvia. (En el caso general de un espacio normado cualquiera, uno lo que debe hacer es probar que **si** $x_n \to x$, **entonces** existe y tal que $Tx_n \to y$, y **además** verificar que vale $Tx = y$)

Corolario II.16 *Si $A : E \to F$ es un operador lineal entre espacios de Banach, y $B : F^* \to E^*$ es un operador lineal que cumple*

$$\varphi(Ax) = (B(\varphi))\, x$$

para toda $\varphi \in F^*$, entonces A es acotado, y vale $B = A^*$ (y por ende B es acotado).

DEMOSTRACIÓN:

Vamos a probar que el gráfico de A es cerrado, y con esto (teorema del gráfico cerrado mediante) habremos demostrado que A es acotado. Tomemos (x, y) en $E \times F$, de manera que esté en la clausura del gráfico de A. Esto quiere decir que existe una sucesión $\{x_n\}$ en E tal que $x_n \to x$, y $Ax_n \to y$; veamos que vale $Ax = y$. Para toda φ en F^*,

$$\begin{array}{l} \varphi(Ax_n) = (B(\varphi))\, x_n \to_n (B(\varphi))\, x = \varphi(Ax) \\ \quad\ \downarrow_n \\ \ \ \varphi(y) \end{array}$$

puesto que φ y $B(\varphi)$ son funcionales lineales continuas. Pero entonces $\varphi(Ax-y) = 0 \;\; \forall \varphi \in F^*$, y el teorema de Hahn-Banach (Corolario I.24) nos dice que debe ser $Ax-y = 0$, o sea $Ax = y$. Como A es acotado, $A^* : F^* \to E^*$ es acotado; por su misma definición y la hipótesis,

$$(A^*(\varphi))\, x = \varphi\,(Ax) = (B(\varphi))\, x \quad \forall\, x \in E,\; \forall\, \varphi \in F^*$$

lo que nos dice que $A^*(\varphi) = B(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in F^*$, y por ende $A^* = B$.□

Moviéndonos en otra dirección, el teorema de Baire nos da también pistas sobre el comportamiento de familias de operadores:

Teorema II.17 (principio de acotación uniforme) *Sea E un espacio de Banach, y Φ una familia de operadores lineales acotados de E en un espacio normado cualquiera F. Si para cada $x \in E$, $\{\|Tx\|_F \mid T \in \Phi\}$ es acotado, entonces el conjunto $\{\|T\| \mid T \in \Phi\}$ es acotado.*

DEMOSTRACIÓN:

Tomemos $B_n = \{x \mid \|Tx\|_F \leq n \quad \forall\, T \in \Phi\}$. Por hipótesis, cada x de E está en algún B_n, o sea $X = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Además, cada B_n es cerrado, por ser todos los T acotados; el teorema de Baire nos dice que algún B_n tiene interior no vacío. Pero una manera alternativa de escribir este conjunto es $B_n = \cap_{T\in\Phi} T^{-1}\left(\{y \mid \|y\|_F \leq n\}\right)$, y si $B_\varepsilon(x_0)$ es una bola de radio ε centrada en x_0 contenida completamente en B_n, entonces

$$B_\varepsilon(x_0) \subset B_n \subset T^{-1}\left(\{y \mid \|y\|_F \leq n\}\right) \quad \forall\, T \in \Phi\,;$$

si volvemos un poco atrás, y miramos el Lema I.30, de la demostración de $(4 \Rightarrow 5)$ se obtiene que para todo $T \in \Phi$, vale

$$\|Tx\|_F \leq \frac{4n}{\varepsilon}\, \|x\|_E \;.□$$

En el caso de familias numerable de operadores, el principio de acotación uniforme nos da un poquito más de información, de la siguiente manera

Teorema II.18 (Banach-Steinhaus) *Sea $\{A_n\}$ en $\mathcal{L}(E,F)$ con E Banach y F normado, y supongamos que para cada $x \in E$ la sucesión $\{A_n x\}$ es convergente en F. Entonces*

1. $\sup_n \|A_n\| < \infty$
2. $\exists\, A \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que para todo x en E, $A_n x \to Ax$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Tomemos $\Phi = \{A_n : n \in N\}$; es evidente que si $\{A_n x\}$ es convergente entonces $\{\|A_n x\|\}$ es acotado (para cada x); por el principio de acotación uniforme existe $M \geq 0$ tal que $\|A_n\| \leq M \quad \forall\, n \in N$, y tomando supremo se obtiene el resultado buscado.

2. Definamos $A : E \to F$ de la manera obvia, es decir $Ax = \lim_n A_n x$. Está claro que, así definido, A es un operador lineal; sólo falta ver que es acotado. Para ello escribamos

$$\|Ax\| = \left\|\lim_n A_n x\right\| = \lim_n \|A_n x\| = \inf_{n\in N} \sup_{k\geq n} \|A_k x\| \leq \sup_{k\geq n} \|A_k x\| \ ,$$

pero $\|A_k x\| \leq \|A_k\| \cdot \|x\| \leq M\,\|x\| \quad \forall\, k \in N$ por lo probado en 1, y entonces

$$\|Ax\| \leq M\,\|x\| \ .\square$$

II.5 Espacio cociente

Tomemos un espacio vectorial cualquiera E, con una seminorma $\|\ \ \|_E$, y dentro de él un subespacio propio S, que sea "cerrado" en el siguiente sentido:

- Dado $x \in E$, si existe $\{s_n\}$ en S tal que

$$\|s_n - x\|_E \to_n 0\,, \tag{II.9}$$

entonces $x \in S$.

Está bastante claro que si $\|\ \ \|_E$ es realmente una norma, $(E, \|\ \ \|_E)$ es un espacio normado y lo que debemos tomar es entonces un subespacio cerrado en el sentido usual, es decir "métrico" o "topológico".

Otro caso sencillo (pero muy importante) es aquel de los elementos que tienen seminorma nula, es decir

$$S = (\|\ \ \|_E)^{-1}(0) = \{y \in E : \|y\|_E = 0\}$$

(la verificación de que se trata realmente de un subespacio es trivial). En ese caso

$$\|x\|_E \leq \|x - x_n\|_E + \|x_n\|_E = \|x - x_n\|_E \to_n 0 \tag{II.10}$$

y entonces $\|x\|_E = 0$ (o sea $x \in S$).

Ahora se toma la proyección al cociente $Q : E \to E/S$, y se define en el cociente

$$\|Q(x)\|_{E/S} = \|[x]\|_{E/S} = \|x + S\|_{E/S} = \inf\{\|x - s\|_E : s \in S\} \ ,$$

que resulta ser una seminorma: la propiedad (I) se prueba de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\|[x]+[y]\|_{E/S} &= \inf\{\|x+y-s\|_E : s\in S\} = \inf\left\{\left\|x-\tfrac{1}{2}s+y-\tfrac{1}{2}s\right\|_E : s\in S\right\} \\
&\leq \inf\left\{\left\|x-\tfrac{1}{2}s\right\|_E + \left\|y-\tfrac{1}{2}s\right\|_E : s\in S\right\} \\
&= \inf\{\|x-s'\|_E + \|y-s'\|_E : s'\in S\} \\
&= \inf\{\|x-s'\|_E : s'\in S\} + \inf\{\|y-s'\|_E : s'\in S\} \\
&= \|[x]\|_{E/S} + \|[y]\|_{E/S} .
\end{aligned}$$

En la tercera igualdad, pusimos $s=2s'$, y usamos fuertemente que S es un subespacio; en la cuarta igualdad utilizamos que todos los términos son positivos.

La propiedad (II) se prueba en forma similar.

Obsérvese que si $\| \quad \|_E$ es una norma, entonces $\|[x]\|_{E/S} = dist(x,S)$, y como S es un cerrado, $\|[x]\|_{E/S}=0$ nos dice $dist(x,S)=0$, y por ende $x\in\overline{S}=S$ (o sea $[x]=[0]$). En otras palabras, el espacio cociente $\left(E/S, \| \quad \|_{E/S}\right)$ sigue siendo un espacio normado.

Cuando S no es cerrado, $\| \quad \|_{E/S}$ no es una norma sino una seminorma.

Por otro lado, aunque $\| \quad \|_E$ sea una seminorma, y no sirva como norma para E, **si S cumple la hipótesis** II.9, el mismo argumento nos da la

Proposición II.19 $\left(E/S, \| \quad \|_{E/S}\right)$ *es un espacio normado.*

Demostración:

Sólo resta probar que $\| \quad \|_{E/S}$ cumple la propiedad (III) de una norma, es decir que si un vector tiene norma cero, entonces era el vector nulo. Para esto recordemos que decir $\|[x]\|_{E/S}=0$ es lo mismo que decir $\inf\{\|x-s\|_E : s\in S\}=0$; pero entonces existe una sucesión $\{s_n\}$ en S tal que $\|s_n-x\|_E \to_n 0$ por la misma definición de ínfimo. Por la hipótesis (II.9) sobre S, resulta que $x\in S$, y entonces $[x]=[0]$.□

Proposición II.20 (propiedades de $Q: E\to E/S$) .

1. Si toda sucesión de Cauchy es convergente para $\| \quad \|_E$ (en particular si E es un Banach, o sea si $\| \quad \|_E$ es una norma), entonces E/S es un espacio de Banach.

2. $\|Q(x)\|_{E/S} \leq \|x\|_E$ (si $\| \quad \|_E$ es una norma, esto dice que Q es continua, y en este caso vale $\|Q\|=1$); y si $S=\{y\in E : \|y\|_E=0\}$, entonces vale la igualdad.

3. E es separable si y sólo si S y E/S lo son (notar el abuso de lenguaje en el caso de $\| \quad \|_E$ seminorma).

4. Si $\| \quad \|_E$ es una norma (y en consecuencia, E métrico), vale: U abierto en E implica $Q(U)$ abierto en E/S. (o sea Q es abierta).

DEMOSTRACIÓN:

1. Usando la Proposición II.4, supongamos que $\{[x_n]\}_n$ es una sucesión absolutamene sumable en E/S, y veamos que es en realidad sumable. Como es absolutamente sumable, tenemos

$$\sum_n \|[x_n]\|_{E/S} = \sum_n \inf_{s\in S} \|x_n - s\|_E < \infty.$$

Para cada n, elijamos $s_n \in S$ tal que

$$\|x_n - s_n\|_E \leq 2 \cdot \inf_{s\in S} \|x_n - s\|_E \ .$$

Entonces se tiene que $(x_n - s_n)$ es absolutamente sumable en E, y por la hipótesis resulta sumable. Llamando y al elemento tal que

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} (x_n - s_n) - y \right\|_E = 0$$

se obtiene

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} [x_n] - [y] \right\|_{E/S} = \left\| \left[\sum_{n=1}^{N} x_n - y \right] \right\|_{E/S} \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - y - s \right\|_E \quad \forall\, s \in S,$$

en particular para $s = \sum_{n=1}^{N} s_n$, lo que nos lleva a

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} [x_n] - [y] \right\|_{E/S} \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} (x_n - s_n) - y \right\|_E \to 0 \quad \text{cuando } N \to \infty\, .$$

2. $\|Q(x)\|_{E/S} = \inf\{\|x - s\|_E : s \in S\} \leq \|x - s\|_E \quad \forall\ s \in S$; en particular (puesto que S es un subespacio), tomando $s = 0$, resulta $\|Q(x)\|_{E/S} \leq \|x\|_E$.

   Para verificar que la proyección tienen norma uno cuando estamos en un espacio normado E, observemos primero que la desigualdad anterior nos dice que la norma es menor o igual a uno, y si tomamos una sucesión de vectores de norma uno en E, de manera que $dist(x_n, S) \to_n 1$ (invocando el lema de Riesz, Lema I.12), obtenemos $\|Q(x_n)\|_{E/S} = dist(x_n, S) \to_n 1$, y entonces

$$\|Q\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Q(x)\|_{E/S} = 1\, .$$

Para ver que vale la igualdad en el caso particular $S = \{x \in E : \|x\|_E = 0\}$, simplemente hay que observar la cuenta

$$\|x\|_E \leq \|x - s\|_E + \|s\|_E = \|x - s\|_E \quad \forall\, s \in S,$$

y recordar la definición de $\|Q(x)\|_{E/S}$.

3. ($\Rightarrow$) Si E es separable, y $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un denso numerable en E, podemos constuir un denso numerable $\mathcal{S}$ de S de la siguiente manera: para cada e_k tomemos $d_k = \|Q(e_k)\|_{E/S}$. Si e_k estaba en S, (o sea la distancia es cero) lo agregamos a nuestro conjunto $\mathcal{S}$. Si $d_k > 0$, existe por la definición de ínfimo una sucesión de vectores $\{s_{kn}\}$ en S tales que

   $$\|s_{kn} - e_k\| \to_n d_k,$$

   agregemos esta sucesión a nuestro conjunto $\mathcal{S}$. Una vez finalizado este proceso tenemos que $\mathcal{S}$ es un subconjunto numerable de vectores de S, el cual es denso en S ya que dado $s \in S$ y $\varepsilon > 0$, existe e_k tal que $\|s - e_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$ (con esto d_k es forzosamente menor que $\frac{\varepsilon}{2}$), y ahora se toma s_{nk} en $\mathcal{S}$ tal que $\|s_{kn} - e_k\| < d_k - \frac{\varepsilon}{4}$, con lo cual

   $$\|s - s_{nk}\| \leq \|s - e_k\| + \|e_k - s_{nk}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + d_k - \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3}{4}\varepsilon,$$

   es decir, se tiene $\|s - s_{nk}\| < \varepsilon$.

   La demostración de que el cociente es separable es inmediata de la cota para la proyección Q, en el punto 2 de ésta misma proposición, ya que dado $[x] \in E/S$, y $\varepsilon > 0$, se toma cualquier representante $x \in E$ de la clase, y se busca un elemento e_k del denso numerable de E tal que $\|x - e_k\| < \varepsilon$. Ahora se tiene (por el punto 2)

   $$\|[x] - [e_k]\|_{E/S} = \|[x - e_k]\|_{E/S} \leq \|x - e_k\|_E < \varepsilon,$$

   es decir que $\{Q\,(e_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un denso numerable de E/S.

   ($\Leftarrow$) Si $\{s_k\}$ es un denso numerable de S, y $\{[x_n]\}$ un denso numerable de E/S, se toma un representante x_k en E para cada clase, y entonces es de sencilla verificación el hecho de que el subconjunto de E de elementos de la forma $\{e_{nk} = s_k + x_n\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ (claramente numerable) es denso en E.

4. Si E es un espacio de Banach, el resultado es un corolario trivial del Teorema II.10. Si no lo es, aún es válido el resultado, ya que si U es abierto, el conjunto $Q^{-1}\,(Q(U)) = U + S = \{u + s : u \in U, s \in S\} = \cup_{s\in S}\,\{U + s\}$ es una unión de abiertos, y por ende abierto: sólo resta probar que para cualquier $W \subset E/S$, si $Q^{-1}(W)$ es abierto en E, entonces W es abierto en el cociente. Para esto probaremos primero lo siguiente:

Proposición II.21 *La proyección de B_r (la bola de centro 0 y radio r en E) es la bola de centro $[0]$ y radio r en el espacio cociente:*

$$Q(B_r) = \left\{[x] : \|[x]\|_{E/S} < r\right\}$$

DEMOSTRACIÓN:

Si $\|x\| < r$, por lo probado en (1), $\|[x]\|_{E/S} = \|Q(x)\|_{E/S} \leq \|x\|_E < r$. Por otro lado, si $\|[x]\|_{E/S} < r$, entonces existe un $s \in S$ tal que $\|x - s\| < r$ (notar que esto **no** quiere decir que haya un punto que realiza la distancia, el cual no necesariamente existe). Pero entonces $[x] = Q(x - y)$, y $x - y \in B_r$.□

Volviendo a lo anterior, tomemos un punto $[x_0]$ de W, y busquémosle un entorno tal que $[x_0] \in U_{[x_0]} \subset W$. Con el resultado anterior a mano, es evidente que lo que hay que hacer es subirlo, buscarle un entorno arriba, y bajar este entorno al cociente: más específicamente $x_0 \in Q^{-1}(W)$ y como éste es abierto existe un entorno $x_0 + B_\varepsilon$ del punto que está contenido en él. Así que

$$[x_0] + \left\{[x] : \|[x]\|_{E/S} < \varepsilon\right\} = [x_0] + Q(B_\varepsilon) = Q(x_0 + B_\varepsilon) \subset Q\left(Q^{-1}(W)\right) = W$$

puesto que Q es un epimorfismo, así que

$$U_{[x_0]} = \left\{[x] : \|[x] - [x_0]\|_{E/S} < \varepsilon\right\} \subset W\,.\square$$

- NOTA: Los puntos 2 y 3 de la Proposición II.20 nos dicen que estamos en presencia de una función sobreyectiva, continua y abierta, con lo cual la topología que le da la norma que definimos en E/S coincide con la topología cociente (como cociente de espacios topológicos). Esta es la topología más "fina" que hace continua a la proyección (es decir, la que tiene mayor cantidad de abiertos). Puede describirse entonces diciendo que un conjunto U es abierto "abajo" sí y sólo si $Q^{-1}(U)$ es abierto "arriba". Como un espacio normado es un grupo topológico, valen las propiedades usuales de "factorización" de morfismos (es decir, operadores lineales) a través de cocientes.Para una discusión seria sobre topología cociente se recomienda fuertemente [Kelley1][Chapter3,p.94], y los problemas S, T y U sobre grupos topológicos del mismo capítulo. También es interesante la presentación de topologías cociente de [Munkres][Capítulo2,sección11].

II.5.1 Los espacios L^p

Con ésta nueva herramienta en nuestras manos (el cociente de espacios normados), volvamos al Ejemplo 8.1 en el comienzo del Capítulo I, es decir el espacio de funciones $\varphi : X \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) medibles, tales que la p-ésima potencia de su módulo es una función integrable, con la seminorma

$$\| \varphi \|_p = \left(\int_X | \varphi |^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Como mencionamos allí, está claro que se trata en realidad de una seminorma. Tomemos el subespacio de las funciones con seminorma nula

$$Z = \left\{\varphi \in L^p : \int_X | \varphi |^p \, d\mu = 0\right\}$$

y observemos que

$$Z = \left\{ \varphi \in L^p : \int_X \mid \varphi \mid^p d\mu = 0 \right\} = \{\varphi \in L^p : \varphi = 0 \quad c.t.p.(\mu)\}$$

La inclusión $\supseteq$ es evidente; para probar $\subseteq$ tomemos φ tal que la integral de $\mid \varphi \mid^p$ es nula, y recordemos que la desigualdad de Tchebyshev dice que si $f : X \rightarrow \mathrm{R}^+$ es medible y $\alpha > 0$ entonces vale

$$\mu\left(\{x \in X\} : f(x) > \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu.$$

En nuestro caso, tomando $f =\mid \varphi \mid^p$ resulta

$$\mu\left(\{x \in X :\mid \varphi(x) \mid^p > \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0.$$

Pero por otro lado está claro que

$$\{x \in X :\mid \varphi(x) \mid^p > 0\} = \cup_{n \in N} \mu \left\{ x \in X :\mid \varphi(x) \mid^p > \frac{1}{n} \right\},$$

y como cada uno de ellos tiene medida nula, $\mu\left(\{\mid \varphi \mid^p > 0\}\right) = 0$, y entonces $\mid \varphi \mid^p = 0$ $c.t.p.(\mu)$. Tomando raíz y notando que $\mid \quad \mid$ es una norma (es el módulo sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) se obtiene $\varphi = 0 \quad c.t.p.(\mu)$.

Proposición II.22 *El espacio cociente L^p/Z es un espacio normado completo con la norma $\left(\| \quad \|_p\right)_{L^p/Z}$, y vale*

$$\left(\|[\varphi]\|_p\right)_{L^p/Z} = \|\varphi\|_p$$

Este espacio de Banach se denomina espacio de **clases de funciones** L^p *y generalmente se denota simplemente* $\left(\mathcal{L}^p, \| \quad \|_p\right)$.

Demostración:

Vamos a utilizar los resultados de la sección previa (Proposiciones II.19 y II.20). Para ello, notemos primero que el subespacio que elegimos en este caso particular está en las condiciones de (II.9), ya que Z es el conjunto de vectores tales que $\|\varphi\|_p = 0$, y entonces se aplica la observación (II.10). Ahora la Proposición II.19 nos dice que el cociente se trata realmente de un espacio normado. En la sección de ejemplos de espacios de Banach del comienzo de éste Capítulo (sección II.1.1, Ejemplo 34), mencionamos que se puede demostrar que toda sucesión de Cauchy en L^p es convergente; la Proposición II.20.1 nos dice que el cociente es un Banach.

La prueba de la última igualdad es el caso particular de la segunda parte de la misma proposición.$\square$

En general es válido (y mucho menos engorroso) hacer todas las cuentas y demostraciones sobre el espacio de funciones, con la seminorma, ya que las mismas demostraciones se trasladan automáticamente al espacio normado de clases.

Cabe observar que la completación (sección II.2) de $\left(C[a,b], \|\ \ \|_p\right)$ es el espacio $\left(L^p, \|\ \ \|_p\right)$ con la medida usual de Lebesgue, ya que las funciones continuas son densas en este espacio. Una demostración sencilla de éste resultado clásico puede hallarse en [Whe-Zygmund][Theorem9.7].

- NOTA: Supongamos que identificamos dos conjuntos E_1, $E_2 \in \sum$ cuando $\mu\,(E_1 \Delta E_2) = 0$ (el símbolo Δ denota la diferencia simétrica, que es otro conjunto de $\sum$). Sobre el espacio cociente $\widetilde{\sum}$ definimos una métrica d de la siguiente manera:

$$d(E_1, E_2) = \mu\,(E_1 \Delta E_2)\,. \tag{II.11}$$

De ésta manera, $(\widetilde{\sum}, d)$ es un espacio métrico, y puede probarse que $L^p(X, \sum, \mu)$ es separable si y sólo si $(\widetilde{\sum}, d)$ lo es, de la siguiente manera: si $\sum_0$ es un denso numerable para el espacio métrico $(\widetilde{\sum}, d)$ llamemos $\mathcal{D}$ al conjunto de todas las combinaciones lineales con coeficientes racionales (en el caso $\mathbb{F}$=$\mathbb{R}$) o coeficientes en $Q + iQ$ (en el caso $\mathbb{F}$=C) de las funciones características de los conjuntos de $\sum_0$. Entonces $\mathcal{D}$ es claramente numerable, y se prueba que es denso en L^1 mediante la identidad

$$d(E_1, E_2) = \int_X \chi_{E_1 \Delta E_2} d\mu = \int_X \left|\chi_{E_1} - \chi_{E_2}\right| = \left\|\chi_{E_1} - \chi_{E_2}\right\|_1 \tag{II.12}$$

que nos asegura que hay funciones del conjunto $\mathcal{D}$ arbitrariamente cerca de cualquier simple; por otra parte, como las funciones simples son densas en cualquier L^1, se llega a la conclusión. En el caso general $1 < p < \infty$, se utiliza el resultado anterior junto con el hecho de que para cualquier función de L^p hay una función de L^1 arbitrariamente cerca de ella en norma-p, de manera que sus respectivos módulos están también a distancia arbitrariamente pequeña (ver [Taylor][Theorem7.3-D,p.379]). Para la recíproca, si $\mathcal{D}$ es un denso numerable de L^p, con respecto a la métrica (II.11), como ser separable es una propiedad heredable en espacios métricos, existe un denso numerable $\mathcal{D}'$ de funciones características: este resultado junto con la expresión (II.12) nos dice que los soportes de éstas características son un conjunto denso en $(\widetilde{\sum}, d)$.

Se prueba también fácilmente que si la medida es σ-finita, y la σ-álgebra $\sum$ tiene un conjunto numerable de generadores (como σ-anillo) entonces $(\widetilde{\sum}, d)$ es automáticamente separable (ver [Halmos1][Theorem40-B,p.168]). Éste es el caso de $L^p(E,\mathcal{B},\mu)$ donde $E \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto medible cualquiera, $\mathcal{B}$ su σ-álgebra de Borel y μ la medida usual de Lebesgue, ya que los n-intervalos abiertos con extremos racionales (intersecados con E) forman un conjunto numerable de generadores de $\mathcal{B}$.

Aplicando el punto 3 de la Proposición II.20 a ésta última observación, se concluye que los espacios normados $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{B},\mu)$, (con E, $\mathcal{B}$ y μ como arriba) son separables para $1 \leq p < \infty$.

Pueden verse más resultados sobre σ-anillos en [Royden][Chapter14].

II.6 Espacios normados de dimensión finita (2º parte)

Vamos a ver la relación entre completitud y dimensión finita, como una continuación de la primera parte de esta sección en el Capítulo I (sección I.7).

Teorema II.23 *Si E es un espacio normado de dimensión finita, entonces es un espacio de Banach.*

Demostración:

Sea $B = \{x_1, ..., x_n\}$ una base de E, y $\{z_k\}$ una sucesión de Cauchy en E. Escribamos cada término de la sucesión como combinación lineal de la base B

$$z_k = \alpha_{k1}x_1 + ... + \alpha_{kn}x_n$$

y restando dos términos cualquiera de la sucesión se obtiene

$$z_k - z_s = (\alpha_{k1} - \alpha_{s1})\, x_1 + ... + (\alpha_{kn} - \alpha_{sn})\, x_n$$

y ahora por el Lema I.38 existe una constante M tal que

$$|\alpha_{k1} - \alpha_{s1}| \leq M \, \|z_k - z_s\| \, , \qquad 1 \leq j \leq n$$

Esto prueba que $\{\alpha_{kj}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{F}$ para $1 \leq j \leq n$. La completitud del cuerpo escalar nos dice que cada una de ellas es convergente a un punto $\alpha_{0j} \in \mathbb{F}$. Llamando $z_0 = \alpha_{01}x_1 + ... + \alpha_{0n}x_n$ se tiene

$$\begin{aligned} \|z_k - z_s\| &= \|(\alpha_{k1} - \alpha_{s1})\, x_1 + ... + (\alpha_{kn} - \alpha_{sn})\, x_n\| \\ &\leq |\alpha_{k1} - \alpha_{s1}| \cdot \|x_1\| + ... + |\alpha_{kn} - \alpha_{sn}| \cdot \|x_n\| \end{aligned}$$

de donde se deduce trivialmente que $z_k \to_k z_0$ en E.□

Un corolario sencillo es el siguiente

Corolario II.24 *Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es un subespacio completo, y por ende cerrado.*

De ésto último se deduce que los espacios de Banach (salvo el caso finito) son "grandes", es decir que vale el siguiente

Teorema II.25 *Sea E un espacio de Banach. Entonces* $\dim E > \aleph_0$ *o bien E es de dimensión finita.*

Demostración:

El único caso conflictivo es aquel en que $\dim E = \aleph_0$. En ese caso, E tiene una base numerable $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Tomemos los subespacios (todos propios) de dimensión finita

$$E_n = \oplus_{i=1}^{n} < e_i >$$

Por el Corolario II.24, cada uno de ellos es un cerrado. Por otra parte cualquier subespacio propio tiene interior vacío. Como además está clara la igualdad

$$E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

el teorema de Baire (Teorema II.9) nos dice que E no es completo.□

El mismo corolario junto con los resultados de la sección precedente nos permiten demostrar un resultado que dejamos pendiente en el final del primer capítulo, de naturaleza bastante intuitiva:

Proposición II.26 *Sea E un espacio normado, A y B subespacio de E, tales que A es cerrado en E y B tiene dimensión finita. Entonces $A+B$ es un subespacio cerrado de E.*

DEMOSTRACIÓN:

Como A es cerrado, podemos considerar el espacio E/A, que es un espacio normado por la Proposición II.19, y la proyección al cociente $Q : E \to E/A$. Como Q es un epimorfismo, $\dim Q(B) \leq \dim B < \infty$, y por ende $Q(B)$ es cerrado en E/A (por el Corolario II.24). Pero $A+B$ no es otra cosa que $Q^{-1}Q(B)$, y como Q es continua (por la Proposición II.20.2) se deduce que $A+B$ es cerrado.□

II.7 Bases en espacios de Banach

Veamos brevemente que ocurre con las bases en espacio normados completos: supongamos que $(E, \| \quad \|_E)$ es un espacio normado con base $\{x_n\}$, y definamos el espacio vectorial Y de la siguiente manera

$$Y = \left\{ y = \{\alpha(i)\} \in I\!F^{I\!N} : \exists \lim_n \sum_{i=1}^{n} \alpha(i)x_i \right\}$$

si definimos para cada $y \in Y$

$$\|y\| = \|\{\alpha(i)\}\| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha(i)x_i \right\|_E ,$$

observemos que $\|y\|$ es finito ya que la serie converge (si $\|y\| = +\infty$, existiría una subsucesión $\sum_{i=1}^{n_k} \alpha(i)x_i$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_k} \alpha(i)x_i \right\|_E \to_k +\infty$$

pero toda subsucesión estrictamente creciente debe converger también a $\|x\|_E$, que es finita, y si $n_k = n_0$ a partir de un k dado, la conclusión también es evidente). Ahora podemos identificar algebraicamente los espacios E e Y mediante el operador $T : Y \to E$ (claramente lineal) definido de la manera obvia

$$T(y) = T\left(\{\alpha(i)\}\right) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \alpha(i)x_i \,.$$

Evidentemente, T es un isomorfismo algebraico. Por otra parte,

$$\|T(y)\|_E = \left\| \lim_n \sum_{i=1}^{n} \alpha(i)x_i \right\|_E = \lim_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha(i)x_i \right\|_E \leq \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha(i)x_i \right\|_E = \|y\|$$

lo que nos dice que T es acotado (y además que $\|T\| \leq 1$).

Lema II.27 *Si* $(E, \|\ \ \|_E)$ *es un espacio de Banach con base, el operador lineal* T *(definido en el párrafo anterior) es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN:

En vista de lo observado, sólo queda probar que T^{-1} es un operador acotado, pero como E es un espacio de Banach, el teorema de la función inversa (Teorema II.11) nos asegura que basta probar que Y es un espacio de Banach.

Para ello, sea $\{y_p\}$ una sucesión de Cauchy en Y. Tenemos entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_p(i)-\alpha_q(i))\,x_i\right\|_E \leq \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_p(i)-\alpha_q(i))\,x_i\right\|_E = \|y_p - y_q\| \quad \forall\, n \in I\!N$$

Esto nos dice que la sucesión $\{s_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_p(i)x_i\}$ (con n fijo) es de Cauchy sobre el espacio de dimensión finita generado por $E_n =< x_1, ..., x_n >$ en vista del Corolario II.24, existe un elemento $s \in E_n$ tal que $s_p \to_p s$. Pero s tiene una escritura única (recordemos que los x_i son linealmente independientes) como $s = \sum_{i=1}^{n} \beta(i)x_i$, y en vista de la continuidad de las coordenadas en dimensión finita (Lema I.38) debe ser

$$\lim_p |\alpha_p(i) - \beta(i)| = 0 \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\}$$

en particular, $\alpha_p(n) \to_p \beta(n)$ (y n era cualquiera). Queremos ver que el elemento $y = \{\beta(i)\}_{i\in I\!N}$ es el límite en Y de la sucesión $\{y_p\}$.

Probemos primero que $y \in Y$ (es decir que $\sum_{i=1}^{n} \beta(i)x_i$ es convergente) de la siguiente manera: dado $\varepsilon > 0$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_{r+p} - y_r\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $p \in \mathbb{N}$. De la desigualdad válida para toda terna p, n y m (con $m > n$) en $\mathbb{N}$

$$\left\|\sum_{i=n+1}^{m}(\alpha_{r+p}(i)x_i - \alpha_r(i))\,x_i\right\|_E \leq \|y_{r+p} - y_r\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

utilizando la continuidad de la norma, se deduce (tomando límite sobre p)

$$\left\|\sum_{i=n+1}^{m}(\beta(i)x_i - \alpha_r(i))\,x_i\right\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{II.13}$$

A partir de ésta última y de la convergencia de $\sum_{i=1}^{m} \alpha_r(i)(i)x_i$ (puesto que $y_r = \{\alpha_r(i)\}_{i\in I\!N} \in Y$) se prueba que la sucesión $\sum_{i=1}^{n} \beta(i)x_i$ es de Cauchy en E, y por ende convergente, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^m \beta(i)x_i - \sum_{i=1}^n \beta(i)x_i\right\|_E &= \left\|\sum_{i=n+1}^m \beta(i)x_i\right\|_E \\
&\leq \left\|\sum_{i=n+1}^m (\beta(i)x_i - \alpha_r(i))\, x_i\right\|_E + \\
&\qquad + \left\|\sum_{i=n+1}^m \alpha_r(i)x_i\right\|_E \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left\|\sum_{i=n+1}^m \alpha_r(i)x_i\right\|_E \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon \quad (\text{si } n > n_0).
\end{aligned}$$

Poniendo $n = 0$ y tomando supremos sobre $m \in \mathbb{N}$ en la ecuación II.13 obtenemos

$$\|y - y_r\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

pero como ε era arbitrariamente pequeño si r era suficientemente grande, obtenemos que $y_r \to_r y$ en Y.□

Pueden pensarse entonces a los elementos de un espacio de Banach con base como en sucesiones de un subespacio de $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$, pero podemos decir un poco más:

Proposición II.28 *En un espacio de Banach E, toda base es automáticamente una base de Schauder.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $\{x_n\}$, es una base y sin pérdida de generalidad supongamos $\|x_n\| = 1$ para todo n. Si $x = \sum_n \alpha(n)x_n$, entonces $y = \{\alpha(n)\} \in Y$, y además $x = T(y)$ (donde el operador T y el espacio Y son los del lema anterior). Las funciones coordenadas están definidas por $\alpha_n(x) = \alpha(n)$. Queremos ver que cada una de ellas es acotada. Para esto observemos que

$$\begin{aligned}
|\alpha_n(x)| = \|\alpha(n)x_n\|_E &= \left\|\sum_{j=1}^n (\alpha(j)x_j - \alpha(j-1)x_{j-1})\right\|_E \\
&\leq \left\|\sum_{j=1}^n \alpha(j)x_j\right\|_E + \left\|\sum_{j=1}^n \alpha(j-1)x_{j-1}\right\|_E \\
&= \left\|\sum_{j=1}^n \alpha(j)x_j\right\|_E + \left\|\sum_{j=1}^{n-1} \alpha(j)x_j\right\|_E .
\end{aligned}$$

Pero en vista del lema anterior,

$$\left\|\sum_{j=1}^n \alpha(j)x_j\right\|_E \leq \sup_n \left\|\sum_{j=1}^n \alpha(j)x_j\right\|_E = \|y\| = \left\|T^{-1}(x)\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \cdot \|x\|_E ,$$

es decir que vale $|\alpha_n(x)| \leq 2\left\|T^{-1}\right\| \cdot \|x\|_E$, lo que prueba que cada uno de ellos es acotado, y por ende $\{x_n\}$ es una base de Schauder para E.$\Box$

Éste es el caso de los espacios $l_p(I\!\!F)$ (con $1 \leq p < \infty$): la base canónica $\{e_k\}$ es una base de Schauder para todos ellos.

Ahora que hemos establecido la equivalencia de estos dos conceptos en un espacio normado completo, podemos extender la noción de tratar a los elementos de E como sucesiones, de la siguiente manera:

Teorema II.29 *Si E es un espacio de Banach con base, entonces E^* es un subespacio (completo) de $\mathbb{F}^{I\!\!N}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $\{x_n\}$ es una base de E, y consideremos el espacio Y, definido como al comienzo de esta sección. El conjunto

$$Y' = \left\{ \{\xi(i)\} \in I\!\!F^{I\!\!N} : \exists \quad \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi(i)\alpha(i) \quad \forall\, y = \{\alpha(i)\} \in Y \right\}.$$

evidentemente es un espacio vectorial; podemos darle estructura de espacio normado tal como hicimos con Y, definiendo (si $y = \{\alpha(i)\}$)

$$\|z\|_{'} = \|\{\xi(i)\}\|_{'} = \sup_{\|x\|=1} \left| \sum_{n \in I\!\!N} \xi(i)\alpha(i) \right|, \quad \text{donde } x = Ty$$

que resulta finito por las mismas consideraciones que al comienzo.

Cada $z \in Y'$ es identificable con una funcional $\varphi_z \in E^*$, de la siguiente manera:

$$\varphi_z(x) = \sum_{i \in I\!\!N} \xi(i)\alpha(i)$$

si $x = \sum_i \alpha(i)x_i$. Recíprocamente, toda funcional $\varphi \in E^*$ define un elemento de $z_\varphi \in Y'$:

$$z_\varphi = \{\varphi(x_i)\}_{i \in I\!\!N}.$$

Es sencillo comprobar que estas aplicaciones son una la inversa de la otra: llamemos $A : E^* \to Y'$ ($A\varphi = z_\varphi$). Tenemos (para cada $\varphi \in E^*$)

$$\begin{aligned} \|A\varphi\|_{'} = \|\{\varphi(x_i)\}\|_{'} &= \sup\nolimits_{\|x\|=1} \left|\textstyle\sum_{i \in I\!\!N} \varphi(x_i)\,\alpha(i)\right| \\ &= \sup\nolimits_{\|x\|=1} \left|\varphi\left(\textstyle\sum_{i \in I\!\!N} x_i\alpha(i)\right)\right| \\ &= \sup\nolimits_{\|x\|=1} |\varphi(x)| \\ &= \|\varphi\| \end{aligned}$$

lo que prueba que A es una isometría. En otras palabras, Y' y E^* son isométricamente isomorfos.$\square$

Es recomendable en este momento reveer el Ejemplo 22, en la sección I.6.2, e intentar dar una descripción de todos los operdadores acotados de l_p en l_q, de c_0 en c, de l_p en c_0, etc.

- NOTA: Puede extenderse el concepto de base si suponemos que existe un subconjunto $\{x_n\}$ tal que para todo $x \in E$ existe una familia $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{F}$, de manera que para toda $\varphi \in E^*$ vale $\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \to_n \varphi(x)$ (base débil). En ese caso puede probarse (en un espacio completo) que $\{x_n\}$ es una base de Schauder (teorema de la base débil de Banach, ver [Panzone][CapítuloVI,Teorema4]).

  Para profundizar en el tema de las bases, es interesante como primer lectura el capítulo VI del libro de Panzone [Panzone][CapítuloVI,p.138-174] dedicado a bases en espacios vectoriales topológicos (EVT) en general.

III
ESPACIOS DE HILBERT

Hilbert se llamaba David

III.1 Conceptos Básicos

III.1.1 Generalidades y ejemplos

Definición III.1 *Sea* $\mathcal{H}$ *un* $\mathbb{F}$*-espacio vectorial (donde* $\mathbb{F}$ *denota* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*). Decimos que* $\langle\ ;\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ *es una forma sesquilineal si* $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$*,* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *vale que:*

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y; z \rangle &= \alpha \langle x; z \rangle + \beta \langle y; z \rangle \\ \langle x; y \rangle &= \overline{\langle y; x \rangle} \end{aligned}$$

Definición III.2 *Decimos que una forma sesquilineal es semi-definida positiva (s.d.p.) si y sólo si* $\langle x; x \rangle \geq 0\ \forall x \in \mathcal{H}$*.*

Definición III.3 *Decimos que la forma sesquilineal* $\langle\ ;\ \rangle$ *es definida positiva (d.p.) si y sólo si* $\langle x; x \rangle \geq 0\ \forall x \in \mathcal{H}$*, y* $\langle x; x \rangle = 0$ *siempre y cuando* $x = 0$*.*

Proposición III.4 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz) *Sea* $\langle\ ;\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ *una forma sesquilineal semi-definida positiva, entonces* $|\langle x; y \rangle|^2 \leq \langle x; x \rangle . \langle y; y \rangle \quad \forall x,\ y \in \mathcal{H}$*.*

Demostración:

Dados $x, y \in \mathcal{H}$, y $\alpha \in \mathbb{F}$, como $\langle\ ;\ \rangle$ es s.d.p. $0 \leq \langle x - \alpha y; x - \alpha y \rangle$, y por la sesquilinealidad de la forma

$$0 \leq \langle x; x \rangle - \alpha \langle y; x \rangle - \overline{\alpha} \langle x; y \rangle + |\alpha|^2 \langle x; x \rangle \qquad .$$

Si $\langle y; x \rangle = b.e^{i\,\theta}$ con $b \geq 0$ y $\alpha := t.e^{-i\theta}$ para $t \in \mathbb{R}$, la desigualdad se transforma en $0 \leq \langle x; x \rangle - e^{-i\theta}.t.b.e^{i\theta} - e^{-i\theta}.t.b.e^{i\theta} + t^2 \langle y; y \rangle = c - 2.b.t + a.t^2$ donde $c := \langle y; y \rangle$ y $a := \langle x; x \rangle$.

De manera que el polinomio (de grado menor o igual a 2) $q(t) := a.t^2 - 2.b.t + c$ toma valores no negativos para todo t real. Por lo tanto la ecuación $q(t) = 0$ tiene a lo sumo una solución: o bien $a = b = 0$, y $c \geq 0$, es decir $\langle x; x\rangle = \langle y; x\rangle = 0$, $\langle y; y\rangle \geq 0$, y así $0 = |\langle x; y\rangle| \leq \langle x; x\rangle.\langle y; y\rangle = 0$; o bien $a \neq 0$, y el discriminante de $q(t)$ resulta no positivo (de lo contrario la ecuación nombrada tendría dos soluciones distintas), así $\Delta = 4.b^2 - 4.a.c \leq 0$, o, lo que es lo mismo

$$|\langle y; x\rangle|^2 - \langle x; x\rangle.\langle y; y\rangle \leq 0 \qquad ,$$

y como $|\langle y; x\rangle| = |\langle x; y\rangle|$, llegamos al resultado buscado. □

Corolario III.5 *Sea* $\langle\ ;\ \rangle$ *sesquilineal y semi-definida positiva sobre* $\mathcal{H}$*, y sea* $\mathcal{N} := \{x \in \mathcal{H} : \langle x; x\rangle = 0\}$ *entonces podemos definir una aplicación* $\mathbf{p}$ *de* $\mathcal{H}$ *a un nuevo* $\mathbb{F}$*-e.V. a saber* $\widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H}\,/\,\mathcal{N}$ *y una forma sesquilineal (y sólo una), de manera que esta resulta definida positiva, y la aplicación es una suryección isométrica.*

Demostración:

a) Primero veamos que $\mathcal{N}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$: dados $\alpha \in \mathbb{F}$ y $x \in \mathcal{N}$ podemos ver que $\langle \alpha.x; \alpha.x\rangle = |\alpha|^2.\langle x; x\rangle = |\alpha|^2.0 = 0$; también, dado $y \in \mathcal{N}$ $\langle x + y; x + y\rangle = \langle x; x\rangle + \langle y; x\rangle + \langle y; y\rangle + \langle x; y\rangle = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$ ya que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle x; y\rangle| = |\langle y; x\rangle| \leq |\langle x; x\rangle| . |\langle y; y\rangle| = 0$. Por lo tanto (vease por ejemplo [Gentile]) queda bien definido el cociente y la proyección $\mathbf{p} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\,/\,\mathcal{N}$ es lineal y suryectiva.

b) Denotando por $\widehat{x} = p(x)$, la clase de x, verificamos que dados $x \in \mathcal{H}$, e $y \in \mathcal{N}$ el producto $\langle x + y;\ x + y\rangle = \langle x; x\rangle + \langle x; y\rangle + \langle y; x\rangle + \langle y; y\rangle = \langle x; x\rangle + 0 + 0 + 0 = \langle x; x\rangle$, así la forma $\langle\ ;\ \rangle_{\mathcal{H}/\mathcal{N}}$ queda bien definida por $\langle \widehat{x}, \widehat{x}\rangle := \langle x; x\rangle$, y es claramente definida positiva. □

Por lo general trabajaremos con una forma lineal definida positiva sobre un espacio vectorial fijo, sin embargo, de tener una forma sesquilineal semi-definida positiva acabamos de mostrar que mediante el Corolario III.5 podemos -de alguna manera- subsanar el problema; cocentando al espacio vectorial de base por un subespacio conveniente se consigue una suryección isométrica a un espacio vectorial con una forma sesquilineal definida positiva. En el futuro dedicaremos nuestro estudio sólo a este último caso.

Definición III.6 (Norma) *Sean* $\mathcal{H}$ *un* $\mathbb{F}$*-e.V. y* $\langle\ ;\ \rangle$ *una forma sesquilineal definida positiva. Definimos como la norma de* x *al número* $\|x\| := \sqrt{\langle x; x\rangle}$*.*

Veamos que $\|x\|$ es *realmente* una norma:
a) Primero cabe notar que $\langle x; x\rangle \geq 0$ y luego la norma está bien definida, además de la definición decorre que si $\|x\| = 0$ entonces $\langle x; x\rangle = 0$, lo que es equivalente a que $x = 0$.
b) Dados x en $\mathcal{H}$, y λ en $\mathbb{F}$ se observa que

$$\|\lambda.x\| = \sqrt{\langle \lambda.x; \lambda.x\rangle} = \sqrt{\lambda.\overline{\lambda}\langle x; x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2.\langle x; x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x; x\rangle} = |\lambda| . \|x\| \tag{III.1}$$

c) (*Desigualdad de Minkowski*) Si además $y \in \mathcal{H}$ entonces

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y; x+y\rangle \\ &= \langle x;x\rangle + 2.\Re e(\langle x;y\rangle) + \langle y;y\rangle \\ &\leq \langle x;x\rangle + 2.\left|\langle x;y\rangle\right| + \langle y;y\rangle \\ &= (\|x\|+\|y\|)^2 \end{aligned} \tag{III.2}$$

Nótese que de esta manera queda imlpícita una topología para la dupla $(\mathcal{H}; \langle\ ;\ \rangle)$ que es la del espacio normado asociado. En el futuro tendrá sentido hablar de abiertos, cerrados, compactos, continuidad, etcétera.

Observación III.7 *Después de esta última definición la desigualdad de Cauchy-Schwartz-Bunyakowski (Proposición III.4) puede ser reescrita como*

$$|\langle x;y\rangle| \leq \|x\| \,.\, \|y\| \tag{III.3}$$

Corolario III.8 *Si* $\langle\ ;\ \rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{F}$ *es una forma sesquilineal semi-definida positiva, entonces es continua.*

Demostración:

NOOOOOOOOOOOOOOOOOO.*

Definición III.9 *Dados un* $\mathbb{F}$*-espacio vectorial* $\mathcal{H}$ *y una forma sesquilineal definida positiva* $\langle\ ;\ \rangle$ *llamamos a la dupla* $(\mathcal{H}, \langle\ ;\ \rangle)$ *espacio pre-Hilbert.*

Definición III.10 (Espacios de Hilbert) *Si* $(\mathcal{H}, \langle\ ;\ \rangle)$ *es un pre-Hilbert, y el espacio normado subyacente resulta completo, decimos que* $(\mathcal{H}, \langle\ ;\ \rangle)$ *es un espacio de Hilbert.*

Observación III.11 *Todo espacio pre-Hilbert* $\mathcal{H}$ *puede ser completado, de manera que su completación* $\overline{\mathcal{H}}$ *sea un espacio de Hilbert mediante clases de sucesiones fundamentales (de Cauchy). Dicha completación es exactamente la misma que se hace para cualquier espacio normado (vease la sección II.2). Dado que por el Corolario III.8 el producto* $\langle\ ;\ \rangle$ *es continuo como función de* $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ *en* $\mathbb{C}$ *, queda bien definida una forma sesquilineal semi-definida positiva, la inclusión* $i : \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{H}}$*, que manda a* x *a la (clase de la) sucesión constante* $(x, x, x, \ldots)$ *es una inclusión isométrica, y* $\mathcal{H}$ *resulta denso en* $\overline{\mathcal{H}}$*.*

*So What?

A continuación se detalla una lista de espacios de Hilbert, muchos de los cuales estudiamos en el capítulos de Espacios Normados. Serán de gran utilidad en el resto de este capítulo para ejemplificar definiciones y resultados (i.e.: teoremas) así como para entender el desarrollo de la teoría de espacios de Hilbert.

Ejemplo 37 *$(\mathbb{C}^n; \langle \; ; \; \rangle)$ resulta un espacio de Hilbert con $\langle x; y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i.\overline{y_i}$. Pues $\langle \; ; \; \rangle_{\mathbb{C}^n}$ es un producto interno (ver definición) que define una norma, a saber $\|x\|_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$, que como vimos en* **??** *hace de $(\mathbb{C}^n; \| \quad \|)$ un espacio de Banach.*

Ejemplo 38 *$(l^2(\mathbb{N}); \langle \; ; \; \rangle)$ resulta un espacio de Hilbert, con $\langle x; y\rangle := \sum_{i=1}^\infty x_i.\overline{y_i}$. Nuevamente es claro que $\langle \; ; \; \rangle_{l^2}$ es un producto interno, y la demostración de que el espacio normado subyacente es completo se encuentra en* **??***.*

Ejemplo 39 *Sea $(\mathcal{X},\Omega, \mu)$ un espacio de medida, luego $(\mathcal{L}^2(\mu); \langle \; ; \; \rangle)$ resulta un espacio de Hilbert con $\langle f; g\rangle := \int_\Omega f.\overline{g}\, dt$. Es de especial interés el caso en el que el espacio de base es un intervalo compacto de la recta, por ejemplo $[-\pi, \pi]$, y la medida utilizada es la llamada medida de Lebesgue. Notamos a esos espacios $\mathcal{L}^2([a, b])$.*

Ejemplo 40 (Espacio de Bergman) *Sea $\Delta := \{z \in\mathbb{C} :|z| < 1\}$, definimos a $\mathcal{B}(\Delta) := \{\varphi : \Delta \to\mathbb{C}$ holomorfas : $\int_\Delta |\varphi(x + iy)|^2\, dxdy < \infty \}$ con el producto usual $\langle \varphi; \phi\rangle_{\mathcal{B}(\Delta)} := \int_\Delta \varphi.\overline{\phi}\, dxdy$ veremos más adelante que esto hace de $(\mathcal{B}(\Delta), \langle \; ; \; \rangle)$ un espacio de Hilbert. Por definición se sigue que $\mathcal{B}(\Delta)$ es un subespacio de $\mathcal{L}^2(\Delta)$, entonces queda claro que $\mathcal{B}(\Delta)$ es cerrado en $\mathcal{L}^2(\Delta)$, pues es un espacio de Hilbert. En lo siguiente enunciaremos algunos resultados técnicos que nos serán útiles para probar que el espacio de Bergman es un espacio de Hilbert.*

Lema III.12 *Sea $f \in \mathcal{B}(\Delta)$, dados $x \in \Delta$ y $0 < r < 1 - \|x\|$ se verifica que*

$$\begin{aligned} - f(x) &= \tfrac{1}{\pi r^2} \int_{B(x,r)} f\, dy \\ - f(x) &\leq \tfrac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Delta)} \end{aligned}$$

donde $\int_{B(x,r)} f\, dy$ denota la integral doble de f en el círculo de radio r y centro x.

Demostración:

Por la propiedad del valor medio [Ahlfors, Theorem 22], dado $0 < t \leq r$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int f(x + t.e^{i\theta})\, d\theta$. Luego

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\pi r^2}\textstyle\int_{B(x,r)} f\, dy &= \tfrac{1}{\pi r^2}\textstyle\int_0^r t\left[\int_{-\pi}^{\pi} f\,(x + t.e^{i\theta})\, d\theta\right] dt \\
&= \tfrac{2}{r^2}\textstyle\int_0^r t.f(x)\; dt \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

que es lo que queriamos demostrar. Para probar la segunda parte del lema tomamos $0 < r < 1 - \|x\|$ y usamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz-Buniakowski de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \tfrac{1}{\pi r^2}\left|\textstyle\int_{B(x,r)} 1.f\, dy\right| \\
&\leq \tfrac{1}{\pi r^2}\left(\textstyle\int_{B(x,r)} 1\, dy\right)^{1/2}\left(\textstyle\int_{B(x,r)} f^{\,2} dy\right)^{1/2} \\
&\leq \tfrac{1}{\pi r^2}.r\sqrt{\pi}.\,(\textstyle\int_{\Delta} f^{\,2} dy)^{1/2} \\
&= \tfrac{1}{r\sqrt{\pi}}\,\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Delta)} \qquad \Box
\end{aligned}$$

Para ver que $\mathcal{B}(\Delta)$ es un espacio de Hilbert sólo restaría ver que este espacio es cerrado en $\mathcal{L}^2(\Delta)$, lo que haremos en la próxima proposición.

Proposición III.13 $\mathcal{B}(\Delta)$ *es un espacio de Hilbert.*

Demostración:

Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones en $\mathcal{B}(\Delta)$ que converge a $f \in \overline{\mathcal{B}(\Delta)} \subseteq \mathcal{L}^2(\Delta)$, luego f_n es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^2(\Delta)$ y $\|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}^2(\Delta)} \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Consideremos ahora a una bola compacta $B[x,r] \subseteq \Delta$, y sea $0 < \rho < dist\,(B[a,r]; \partial\Delta)$, entonces usando el lema anterior (Lema III.12) se sigue que existe una constante positiva tal que, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ y $|z - x| \leq \rho$ se cumple la siguiente desigualdad

$$|f_n(x) - f_m(x)| \quad \leq \quad K.\,\|f_n(x) - f_m(x)\|$$

De esta manera vemos que $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos en Δ, y luego su límite es una función holomorfa, i.e: está en $\mathcal{B}(\Delta)$. Esta última afirmación, como lo asegura Conway, se desprende del teorema de Morera [Ahlfors, p. 122] que (en este caso) dice que una función g es holomorfa en Δ si y sólo si es continua, y además $\int_\gamma g\, dz = 0$ para toda curva cerrada en Δ; pero f, el límite de f_n, es continua, y además

$$\int_\gamma f\, dz = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n\, dz = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

donde la integral conmuta con el límite porque γ (o más precisamente su imagen en el plano complejo) es compacta, y luego la convergencia es uniforma sobre γ. $\square$

Los esapacios de funciones complejas conocidos como espacios de Hardy son espacios de Banach, y uno de ellos $\mathbf{H}^2$, un espacio de Hilbert. En los dos proximos ejemplos los definiremos, luego los analizaremos con más detalle.

Ejemplo 41 (Espacio de Hardy) *En Análisis Complejo se estudian a los espacios* $\mathbf{H}(\Delta)$ *de funciones a valores complejos, definidas en el disco unitario* $\Delta \subseteq \mathbb{C}$*, que son holomorfas, es decir para las que cualquiera sea el* $z_0 \in \Delta$ *existe el límite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Se encontrará un estudio satisfactorio de este espacio y los espacios que aparezcan en este ejemplo en el libro "Real and Complex Analysis" de W. Rudin ([Rudin]). Dedicaremos nuestra atención a cierta clase de subespacios de $\mathbf{H}(\Delta)$ *denominados espacios de Hardy en honor a Godfrey Harold Hardy. Dada* $f \in \mathbf{H}(\Delta)$ *y* r *en* $[0, 1)$ *se definen las funciones de* r*:*

$$\begin{aligned} M_p(f; r) &= \left\{ \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(r.e^{i\theta}) \right|^p d\theta \right\}^{1/p} \\ M_\infty(f; r) &= \sup_\theta \left| f(r.e^{i\theta}) \right| \end{aligned} \tag{III.4}$$

Dichas funciones son monotonas crecientes (estos hechos que nos limitaremos a enunciar están correctamente enunciados y demostrados en el citado libro de Rudin) y luego queda bien definida la norma $\| f \|_{\mathbf{H}^p} := \lim_{r \to 1^-} M_p(f; r)$ *. Así definimos, para* $0 < p \leq \infty$ *a los subespacios de Hardy* $\mathbf{H}^p(\Delta) := \{ f \in \mathbf{H}(\boldsymbol{\Delta}) :. \ \| f \|_{\mathbf{H}^p} < \infty \ \}$*. Es fácil ver que si* $1 \leq p \leq \infty$ *y aplicamos la desigualdad de Minkowski a* $f + g$ *tenemos*

$$M_p(f + g; r) \leq M_p(f; r) + M_p(g; r) \qquad \text{para } r \in [0, 1)$$

luego haciendo tender r *a* 1 *por izquierda vemos que se cumple la desigualdad triangular para esta norma. Además los espacios de Hardy respectivos son completos; ya que dada una sucesión de Cauchy* $(f_n)_n \subseteq \mathbf{H}^p$ *se cumple que si* $|z| \leq r < R < 1$ *entonces aplicando la formula de Cauchy e integrando por partes (ejercicio ii)*[†] *se tiene que:*

$$\begin{aligned} (R - r).\, |f_n(z) - f_m(z)| &\leq M_1(f_n - f_m; R) \\ &\leq M_p(f_n - f_m; R) \\ &\leq \|f_n - f_m\|_{\mathbf{H}^p} \end{aligned}$$

y así $(f_n)_n$ *converge uniformemente sobre compactos a una función* f *(que resulta holomorfa) y finalmente se sigue de la desigualdad de Minkowski que como* $M_p(f - f_m; R) = \lim_{n \to \infty} M_p(f_n - f_m; R)$ *entonces* $f \in \mathbf{H}^p$*. Acabamos de mostrar que los espacios de Hardy* $\mathbf{H}^p$ *con* $1 \leq p \leq \infty$ *son espacios de Banach.*

[†] Dejo un ejercicio a cargo del lector, pasar a lista

En el ejemplo anterior consideramos a los espacios de Hardy, se puede probar que $\mathbf{H}^p$ es un espacio de Hilbert si y sólo si $p = 2$. Veamos que $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}^2(\Delta)$ es un espacio de Hilbert. para lo que transcribimos parte de un resultado que aparece en [Rudin, Theorem 17.10]:

Teorema III.14 *1. Una función $f \in \mathbf{H}(\Delta)$ de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . z^n \qquad \textit{para } z \in \Delta$$

está en $\mathbf{H}^2$ si y sólo si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. En tal caso $\| f \|_{\mathbf{H}^2} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$.

2. Si $f \in \mathbf{H}^2$, entonces f tiene límites radiales $f^*(e^{i\theta})$ para casi todo punto de $\Upsilon = \{z : |z| = 1\}$; el n-esimo coeficiente de Fourier de f^* es a_n si $n \geq 0$ y 0 si $n < 0$.

3. La aplicación $f \mapsto f^*$ es una isometría de $\mathbf{H}^2$ en el subespacio de $L^2(\Upsilon)$ que consiste de las $g \in L^2(\Upsilon)$ tales que $\widehat{g}(n) = 0$ si $n < 0$.

Ejemplo 42 (Espacio de Hardy) *Teniendo en cuenta este último teorema podemos decir que $\mathbf{H}^2 = \{\varphi : \Delta \to \mathbb{C} : \varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ donde $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \}$. Queda claro que el producto $\langle \sum a_n.z^n ; \sum b_n.z^n \rangle_{\mathcal{H}_2(\Delta)} = \sum a_n.\overline{b_n}$ está bien definido, y cumple las propiedades que definen un producto interno. Entonces $\Big(\mathcal{H}_2(\Delta), \langle\ ;\ \rangle_{\mathcal{H}_2(\Delta)}\Big)$ resulta un espacio de Hilbert. Este espacio puede ser visto como un subespacio de $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$, estudiaremos esta relación durante el estudio de bases de espacios de Hilbert.*

Ejemplo 43 *Consideramos al $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathcal{H} := AC[0, 1] = \{\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C} : \varphi$ es absolutamente continua, y su derivada $\varphi' \in \mathcal{L}^2[0, 1]$ $\}$[‡] con el producto interno $\langle \varphi; \psi \rangle := \int_0^1 \varphi.\overline{\psi}\, dt + \int_0^1 \varphi'.\overline{\psi}'\, dt$.*

Lema III.15 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces para todo par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$:*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2.\Re e\langle x; y\rangle + \|y\|^2$$

[‡]Gabi: mostraste que esto está comlpetito?????

DEMOSTRACIÓN:

Dados $x, y \in \mathcal{H}$ por la definición y propiedades del producto interno se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y; x+y\rangle \\
&= \langle x;x\rangle + \langle x;y\rangle + \langle y;x\rangle + \langle y;y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x;y\rangle + \overline{\langle x;y\rangle} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2.\Re e\langle x;y\rangle + \|y\|^2 . \qquad \Box
\end{aligned}$$

Tenga en cuenta esta igualdad que será útil en el futuro.

III.1.2 Ortogonalidad

En el afán de generalizar resultados válidos para espacios euclideos se descubrieron distintos resultados en la teoría de espacios de Hilbert, en esta sub-sección mostraremos algunos de estos resultados como por ejemlpo un teorema de Jordan, von Neumann y Wigner que apareciera en la revista *Mathematical Annalen* de 1934 ([J-VN-W]).

Proposición III.16 (Regla del Paralelogramo) *Sea* $(\mathcal{H}, \langle\ ;\ \rangle)$ *un espacio de Hilbert; entonces para todo* x*,* y *en* $\mathcal{H}$ *se cumple que:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2.\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{III.5}$$

DEMOSTRACIÓN:

Dados $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y; x+y\rangle + \langle x-y; x-y\rangle \\
&= [\langle x;x\rangle + \langle x;y\rangle + \langle y;x\rangle + \langle y;y\rangle] + \\
&\quad + [\langle x;x\rangle - \langle x;y\rangle - \langle y;x\rangle + \langle y;y\rangle] \\
&= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \qquad \Box
\end{aligned}$$

Como veremos en el siguiente teorema, esta propiedad caracteriza a los espacios de Hilbert. En "*On inner products in linear metric spaces*" P. Jordan y J. von Neumann muestran que en un espacio de Banach en el que se cumple (III.5) es posible definir una forma sesquilineal definida positiva, de manera que la norma inducida por esta aplicación sea la norma del espacio de Banach, y la recíproca, que no es más que el teorema anterior. Finalmente si se quiere ahondar en este tipo de caracterizaciones se puede recurrir al artículo, "*Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Functionaloperatoren*", de von Neumann que apareciera en *Mathematical Annalen,* vol. 102 (1929) ([**?**, I. Der abstrakte Hilbertsche Raum]), o al artículo –__–__–__ (cf. [Kakutani]) de Kakuani.

Teorema III.17 *(cf. [Jor-V Neumann, Theorem I]) Sea $(\mathcal{H}, \| \ \|)$ un espacio de Banach. Podremos definir una forma sesquilineal definida positiva sobre el espacio vectorial $\mathcal{H}$ de modo que $(\mathcal{H}, \langle \ ; \ \rangle)$ sea un espacio de Hilbert y $\| \quad \| = \langle \ ; \ \rangle^{1/2}$ sea la norma inducida) siempre y cuando se verifique la regla del paralelogramo en el espacio de Banach, i.e. si se cumple $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2.\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ para todo par de puntos x, y en $\mathcal{H}$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Esto es exactamente la proposición anterior.

($\Leftarrow$) Supongamos que en $\mathcal{H}$ vale la regla del paralelogramo. Entonces basta definir a $\langle x; y\rangle$ como una función de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ al cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ y ver que esta es una forma sesquilineal definida positiva (de esa manera $(\mathcal{H}, \langle x; y\rangle)$ será un espacio de Hilbert y se verificará en él la regla del paralelogramo) y es tal que la norma que induce es la misma que se tenía.

Sea $\langle x; y\rangle := \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\left(\|x+i.y\|^2 - \|x-i.y\|^2\right)\right]$ entonces

$$\begin{cases} \Re e\langle x; y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ \\ \Im m\langle x; y\rangle = \Re e\langle x; i.y\rangle \end{cases} \tag{III.6}$$

1) Usando la regla del paralelogramo, si reemplazamos a x y y por $x \pm z$, y en (III.6) y restamos se obtiene

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 + \|x-y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2 = 2.\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) \tag{III.7}$$

que por (III.6) se transforma en

$$\Re e\langle x+y; z\rangle + \Re e\langle x-y; z\rangle = 2.\Re e\langle x; z\rangle \quad .$$

Si hacemos $x = 0$ en (III.6) resulta $\Re e\langle 0; z\rangle = 0$. Por lo cual si $x = y$ la ecuación (III.7) muestra que $\Re e\langle 2.x; z\rangle = 2.\Re e\langle x; y\rangle$; así la ecuación se transforma en

$$\Re e\langle x+y; z\rangle + \Re e\langle x-y; z\rangle = \Re e\langle 2x; z\rangle \quad ,$$

o reemplazando x, y por $\frac{1}{2}(x+y)$ y $\frac{1}{2}(x-y)$ se obtiene

$$\Re e\langle x; z\rangle + \Re e\langle y; z\rangle = \Re e\langle x+y; z\rangle$$

y usando (III.6) obtenemos el análogo para la parte compleja del producto, con lo que queda demostrado que $\langle \ ; \ \rangle$ reparte la suma.

2) Ver que el producto "saca" escalares afuera es un poco más complicado, para hacerlo primero probaremos la continuidad de cierta función compleja. Dado que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ se sigue que $|\|\alpha.x \pm y\| - \|\alpha_0.x \pm y\|| \leq \|(\alpha - \alpha_0).x\| = |\alpha - \alpha_0| . \|x\|$ luego, fijos x e y, la función compleja a valores reales $\|\alpha x \pm y\|$ es continua (en α). Sea S el conjunto de los α tal que $\langle \alpha.x; z\rangle = \alpha\langle x; z\rangle$ para todos los x, y en $\mathcal{H}$. Sabemos (porque el producto reparte la suma) que incluye a los números naturales, así como a los enteros. Es claro que si $\alpha, \beta \in S$ y $\beta \neq 0$ entonces $\alpha / \beta \in S$, de manera que todos los números racionales están en S. La recién probada continuidad de $\|\alpha.x \pm y\|$ implica la continuidad (en α) de $\langle \alpha.x; y\rangle$; resulta evidente que S es cerrado, por lo tanto todos los α reales están en S.

La misma definición deja en manifiesto que i está en S. Finalmente, si α_1, α_2 son reales y consideramos $\alpha = \alpha_1 + i.\alpha_2$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle \alpha.x; y\rangle &= \alpha_1.\langle x; y\rangle + \alpha_2\langle i.x; y\rangle \\
&= \alpha_1.\langle x; y\rangle + i.\alpha_2\langle x; y\rangle \\
&= \alpha.\langle x; y\rangle
\end{aligned}$$

El producto "saca" escalares !

3) Si aplicamos la igualdad $\| i.x \| = \| x \|$ en la ecuación (III.6), ésta nos muestra que $\Re e\langle ix; iy\rangle = \Re e\langle x; y\rangle$, y también $\Re e\langle x; y\rangle = \Re e\langle y; x\rangle$, si combinamos estos resultados se sigue que

$$\Im m\langle x; y\rangle = \Re e\langle x; i.y\rangle = \Re e\langle ix; i.i.y\rangle = -\Re e\langle i.x; y\rangle = -\Re e\langle y; i.x\rangle = -\Im m\langle y; x\rangle$$

Luego $\langle x; y\rangle = \overline{\langle y; x\rangle}$.

4) *Last but not least*, usando las propiedades ya descubiertas se llega a que $\langle x; x\rangle = \overline{\langle x; x\rangle}$ es real, y que

$$\begin{aligned}
\langle x; x\rangle &= \tfrac{1}{4}\left[\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2 \ + i\left(\|x + i.x\|^2 - \|x - i.x\|^2\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{4}\left[\|2x\|^2 - 0 + i(0)\right] = \|x\|^2
\end{aligned}$$

con lo que no hay nada más que probar, $\langle x; y\rangle$ es una forma sesquilineal definida positiva, y $\langle x; x\rangle = \|x\|^2$. □

Cabe notar que no en todo espacio de Banach se puede definir un producto interno de modo que, el espacio junto con ese producto resulten un espacio de Hilbert y que la norma subyacente sea la que se tenía. Veremos ejemplos de esto en la Observación III.35.

Definición III.18 *Decimos que $x, y \in \mathcal{H}$ son ortogonales, y lo notamos $x \perp y$, sii $\langle x; y\rangle = 0$.*

Definición III.19 *Decimos que* $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, $x_\gamma \in \mathcal{H}$ *son ortogonales, o que forman un sistema ortogonal, sii* $\langle x_\gamma; x_{\widetilde{\gamma}}\rangle = 0$ *siempre que* $\gamma \neq \widetilde{\gamma}$.

Definición III.20 *Un conjunto* $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, $x_\gamma \in \mathcal{H}$ *se dirá sistema ortonormal (s.o.n.) sii* $\langle x_\gamma; x_{\widetilde{\gamma}}\rangle = \delta_{\gamma,\widetilde{\gamma}}$ *(*$\delta_{\gamma,\widetilde{\gamma}}$ *denota a la delta de Kronneker).*

Una de las tantas propiedades del plano $\mathbb{R}^2$ que se conserva en cualquier espacio de Hilbert en ellos puede formularse una generalización del conocido teorema de Pitágoras como veremos en el próximo teorema.

Teorema III.21 (de Pitágoras) *Sean* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ *ortogonales entonces*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \quad .$$

Demostración:

Haremos la prueba por inducción. Sea $n = 1$, claramente $\|x_1\|^2 = \sum_{i=1}^{1} \|x_i\|^2$. Sea $n > 1$, y supongamos la afirmación válida para $n-1$ luego

$$\begin{aligned}
\|\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 &= \langle \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n; \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n\rangle \\
&= \langle \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i; \sum_{i=1}^{n-1} x_i\rangle + \langle x_n; \sum_{i=1}^{n-1} x_i\rangle + \langle x_n; x_n\rangle + \langle \sum_{i=1}^{n-1} x_i; x_n\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|^2 + \sum_{n=1}^{n-1}\langle x_i; x_n\rangle + \|x_n\|^2 + \sum_{n=1}^{n-1}\langle x_n; x_i\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|^2 + \sum_{n=1}^{n-1} 0 + \|x_n\|^2 + \sum_{n=1}^{n-1} 0 \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2
\end{aligned}$$

completando la prueba. □

Proposición III.22 *Sea* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$ *convexo, cerrado y no vacío; sea* $x_0 \in \mathcal{H}$*. Entonces existe un único* $c_0 \in \mathcal{C}$ *tal que* $\|x_0 - c\| = d(x_0, \mathcal{C})$*. Es decir, minimiza la distancia del conjunto convexo al punto.*

Demostración:

Basta considerar sólo el caso $x_0 = 0$, porque si la proposición es válida para $x_0 = 0$, dado cualquier x_0 podemos aplicasela a $\mathcal{C}' := \mathcal{C} - x_0 = \{c - x_0 : c \in \mathcal{C}\}$ otro convexo, cerrado, no vacío. Y si encontramos c_0' tal que $\|c_0\| = d(0, \mathcal{C}') = \inf_{c\in\mathcal{C}'} \| c\|$ entonces evidentemente $c_0 := c_0' + x_0$ es el elemento buscado.

Supongamos que $x_0 = 0$ y $d := d(x_0, \mathcal{C}) = \underset{c \in \mathcal{C}}{inf} \|c\|$, entonces existirá una sucesión $(c_n)_n$ de elementos en $\mathcal{C}$ tal que tiende -en norma- a d. Por la regla del paralelogramo,

$$\left\| \frac{c_n - c_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}.\left(\|c_n\|^2 + \|c_m\|^2 \right) - \left\| \frac{c_n + c_m}{2} \right\|^2 \ ;$$

y como $\mathcal{C}$ es convexo $\frac{c_n + c_m}{2}$, $\frac{c_n - c_m}{2} \in \mathcal{C}$ luego $\left\|\frac{c_n + c_m}{2}\right\|^2 \geq d^2$(estamos buscando un elemento que minimice esa distancia). Dado $\varepsilon > 0$ sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ valga la desigualdad $\|c_n\| < d^2 + \frac{1}{4}.\varepsilon^2$ entonces la igualdad anterior se transforma en

$$\left\| \frac{c_n - c_m}{2} \right\|^2 < \frac{1}{2}\left(2.d^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right) - d^2 = \frac{1}{4}\varepsilon^2 \quad \forall n, m \geq N \quad .$$

Por lo tanto $(c_n)_n$ es de Cauchy, y como $\mathcal{C}$ es cerrado en $\mathcal{H}$ que es completo, existe el límite $c_0 := \lim_{n\to\infty} c_n \in \mathcal{C}$, que por hipótesis tiene norma $\lim_{n\to\infty} \|c_n\| = d$.

Para ver la unicidad, suponemos que existe un $c_0' \in \mathcal{C}$ tal que $\|c_0\| = \|c_0'\| = d$, $\frac{c_0 + c_0'}{2} \in \mathcal{C}$ entonces $d \leq \left\|\frac{c_0 + c_0'}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\|c_0\| + \frac{1}{2}\|c_0'\| = d$, y por la regla del paralelogramo $d^2 = \left\|\frac{c_0 + c_0'}{2}\right\| = d^2 - \left\|\frac{c_0 - c_0'}{2}\right\|$; es decir $\left\|\frac{c_0 - c_0'}{2}\right\| = 0$, o equivalentemente $c_0 = c_0'$. □

Proposición III.23 *Sea* S $\subseteq \mathcal{H}$ *un subespacio cerrado, no vacío, y sea* $h \in \mathcal{H}$. *Siempre existe un único* s_0 *en* S *tal que* $d(h, \mathrm{S}) = d(h, s_0) = \|h - s_0\|$, *y está caracterizado por ser el único vector tal que* $s_0 - h \perp \mathrm{S}$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Dado que S es un subespacio vectorial, es convexo, y no vacío por hipótesis. Luego podemos aplicar la proposición precedente para encontrar tal s_0. Por linealidad, dado s en $\mathcal{S}$ se verifica que $s_0 + s \in S$ y entonces

$$\|h - s_0\|^2 \leq \|h - (s_0 + s)\|^2 = \|h - s_0\|^2 - 2.\Re e\langle h - s_0; s\rangle + \|s\|^2$$

por lo tanto $2.\Re e\langle h - s_0; s\rangle \leq \|s\|^2$. Si $\langle h - s_0; s\rangle = r.e^{i\theta}$ y reemplazamos a s por $s' = t.e^{i\theta}.s$, con t a fijar en $\mathbb{R}$, vemos que 2. $\Re e\langle h - s_0; s'\rangle = 2.t.r \leq t^2. \|s\|^2$. Dado que r, un número fijo, tiende a 0, cuando t tiende a 0, resulta $r = 0$ y luego $\langle h - s_0; s\rangle = 0$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente si $s_0 \in S$ es tal que $s_0 - h \perp S$, luego $h - s_0 \perp s - s_0$ para todo s en S; usando el teorema de Pitágoras

$$\|h - s\|^2 = \|h - s_0\|^2 + \|s_0 - s\|^2 \geq \|h - s_0\|^2 \quad .$$

Por lo cual $d(h, S) = \|h - s_0\|$, es decir s_0 mimimiza la distancia de $\mathcal{S}$ a h. □

Observación III.24 *Sea* S *un subconjunto de* $\mathcal{H}$ *entonces* $\{h \in \mathcal{H} : \langle h; s\rangle = 0 \ \forall s \in \mathrm{S}\}$ *es un subespacio de* $\mathcal{H}$.

Definición III.25 *Definimos al subespacio ortogonal a* S *como* $\mathrm{S}^{\perp} := \{h \in \mathcal{H} : \langle h; s\rangle = 0$ $\forall s \in \mathrm{S}\}$

Lema III.26 *Sea* $(\mathcal{H}, \langle\ ;\ \rangle)$ *un espacio de Hilbert, entonces dado* x_0 *en* $\mathcal{H}$ *la aplicación* $\varphi_{x_0}(x) := \langle x; x_0\rangle$ *es una funcional lineal y acotada (continua).*

Demostración:

Dado x_0, φ_{x_0} resulta trivialmente lineal, pues $\langle\ ;\ \rangle$ lo es en la primera entrada. Pero también resulta acotada, como vimos en el Corolario III.8. Vale notar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que la norma de x_0, es una cota para la norma de esta funcional, i.e:

$$\|\varphi_{x_0}\|^2 = \underset{\|x\|\leq 1}{sup}\ |\langle x; x_0\rangle| \leq \underset{\|x\|\leq 1}{sup}\ \left(\|x\|^2 . \|x_0\|^2\right) \leq\ \|x_0\|^2 < +\infty \qquad \square$$

Un resultado muy importante en Análisis Funcional es el teorema de representación de Riesz (para espacios de Hilbert) que veremos más adelante. Este resultado dice que esas son todas las funcionales. A saber, que toda funcional en un espacio de Hilbert es de la forma $\langle -; x_0\rangle$ para algún x_0 en $\mathcal{H}$.

Proposición III.27 *Sea* $\mathrm{S} \subseteq \mathcal{H}$ *subespacio cerrado distinto de* $\{0\}$*, entonces podemos definir de manera unívoca una aplicación* $P_S : \mathcal{H} \to \mathrm{S}$*, que llamamos la* **proyección ortogonal** *sobre el subespacio* S *con las siguientes propiedades:*

1. *Es lineal.*
2. $P_S \circ P_S = P_S$.
3. *Es acotada, y* $\|P_S\| = 1$.
4. $R(P_S) = \mathrm{S}$ *y* $Ker(P_S) = \mathrm{S}^{\perp}$.
5. $\mathcal{H}$ *admite una descomposición del tipo* $\mathcal{H} = R(P_S) \bigoplus Ker(P_S)$.

Demostración:

Definimos a $P_S(x) = \{$el único vector s_0 tal que $x - s_0 \perp S$ $\}$, luego:
1) Sean $x, y \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ tales que $P_S(x) = x_S$, $P_S(y) = y_S$ por lo que $\langle (x+y) - (x_S + y_S)\ ;\ s\rangle = \langle x - x_S\ ;\ s\rangle + \langle y - y_S\ ;\ s\rangle = 0 + 0 = 0\ \forall s \in S$ y así $P_S(x+y) = x_S + y_S$.

Además $\langle \lambda.x - \lambda.x_S\ ;\ s\rangle = \lambda.\langle x - x_S\ ;\ s\rangle$ para todo s en S y por lo tanto $P_S(\lambda.x) = \lambda.P_S(x)$.

2) Si $s \in \mathcal{S}$ entonces -claramente- $P_S(s) = s$, pues $d(s; \mathcal{S}) = \|s - s\| = 0$. Para todo $h \in \mathcal{H}$ se tiene que si $s := P_S(h) \in S$, entonces $P_S \circ P_S(h) = P_S\,(s) = s = P_S(h)$.

3) Dado $h \in \mathcal{H}$ resulta $h = (h - P_S(h)) + P_S(h)$ donde $h - P_S(h) \in S^{\perp}$ y $P_S(h) \in S$, es decir $h - P_S(h)$ es ortogonal a $P_S(h)$. Luego aplicando el teorema III.21 -el teorema de

Pitágoras- $\|h\|^2 = \|h - P_S(h)\|^2 + \|P_S(h)\|^2$, por lo tanto $\|P_S(h)\| \leq \|h\|$ y P_S es continua. En particular se ve que $\|P_S(h)\| \leq 1$, más aún: tomando h en S de norma 1 se tiene que $1 = \|P_S(h)\| \geq \|P_S\| = 1$.

4) Observemos que por definición $R(P_S) \subseteq S$; como $P_S(s) = s$ para todo s en S, $R(P_S) \supseteq S$. Y, por definición $Ker(P_S) = S^{\perp}$.

5) Ya mostramos antes que $h = \underbrace{h - P_S(h)}_{Ker(P_S)} + \underbrace{P_S(h)}_{R(P_S)}$ y la escritura es -claramente- única. □

Lema III.28 *(propiedades de $^{\perp}$)*

1. $\{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$ *y* $\mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$.
2. *Si* S *y* $\mathcal{T}$ *son subespacios de* $\mathcal{H}$ *tales que* $\mathrm{S} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}^{\perp} \subseteq \mathrm{S}^{\perp}$.
3. *Sea* S *subespacio* $\Rightarrow \left(\mathrm{S}^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\mathrm{S}}$.

Demostración:
1) $\langle x; 0\rangle = 0$ para todo x en $\mathcal{H}$ entonces $\{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$. Analizemos las dos desigualdades: primero $\{0\} \subseteq \mathcal{H}$, y segundo, dado $x \in \mathcal{H}^{\perp}$, $\langle x; x\rangle = 0$ pues $x \in \mathcal{H}$ luego $x = 0$, y $\mathcal{H}^{\perp} \subseteq \{0\}$.

2) Sea $x \in \mathcal{T}^{\perp}$ entonces $\langle x; t\rangle = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$, en particular $\langle x; t\rangle = 0 \quad \forall t \in S \subseteq \mathcal{T}$.

3) De la proposición anterior sabemos que, dado que S es un subespacio cerrado, si P_S es su proyector ortogonal entonces $P_{S^{\perp}} = I - P_S$ de manera que $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = Ker(P_{S^{\perp}}) = R(P_S) = S$; lo que termina con el caso subespacios cerrados. Sea ahora S un subespacio cualquiera, como $S \subseteq \overline{S}$ entonces $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq \left(\overline{S}^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{S}$. Para ver la otra inclusión, notese que dado $x \in \overline{S}$ y una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de S, convergente a x se tiene que $\langle x_n; t\rangle = 0$ para todo t en $S^{\perp}$, así $x_n \in \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$ que es cerrado, y luego x es un elemento de $\left(S^{\perp}\right)^{\perp}$. O sea $\overline{S} = \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$. □

Disgresión histórica:

Se dice que von Neumann tenia la costumbre de escribir en el pizarrón las soluciones de los deberes que dejaba a sus alumnos. Por supuesto, ellos siempre le preguntaban como hacerlos y no sólo su solución. En cierta ocasión, uno de ellos intentó ser más diplomático y lo increpó preguntándole ''Profesor, este problema se podria hacer de otra forma?''; a lo que von Neumann le contestó, ''Dejeme que piense, si.... Y siguió escribiendo soluciones en el pizarrón''.

III.1.3 Teorema de Representación de Riesz

A continuación estudiaremos a las funcionales lineales en espacios de Hilbert. En un curso básico de álgebra lineal se ve que, definida una funcional en $\mathbb{R}^n$, existe un vector $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ de manera que

$$\varphi((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = \langle (a_1, \ldots, a_n); (x_1, \ldots, x_n) \rangle$$

Más aún $\varphi \longleftrightarrow (a_1, \ldots, a_n)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Veremos como el llamado *Teorema de Riesz* generaliza este hecho, junto con algunas aplicaciones útiles.

Definición III.29 *Sea $(\mathcal{H}, \langle\ ;\ \rangle)$ un espacio de Hilbert. Decimos que $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ es una funcional acotada, si lo es en el sentido de espacios normados. Es decir, si es lineal y continua (para lo cual consideramos a $\mathcal{H}$ con la topología que hereda de su norma, y a $\mathbb{F}$ con la topología usual).*

Teorema III.30 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ una funcional lineal. Entonces son equivalentes:*

1. *φ es continua.*
2. *φ es continua en 0.*
3. *Existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|\varphi(h)| \leq c. \|h\|_{\mathcal{H}}$ para todo h en $\mathcal{H}$.*

Demostración:

Trivial.

Teorema III.31 (de representación de Riesz) *Sea $\varphi \in \mathcal{H}^*$ entonces existe un único x_o en $\mathcal{H}$ tal que $\varphi(x) = \langle x; x_0 \rangle$ para todo x en $\mathcal{H}$, en este caso decimos que x representa a φ. Además $\|\varphi\|_{H^*} = \|x_0\|_H$.*

Demostración:

Primero consideramos el caso $\varphi(x) \equiv 0$, en cuyo caso $x_0 = 0$ resuelve la cuestión.

Sea -ahora- φ no nula, luego $Ker(\varphi)$ resulta un hiperplano, que es cerrado porque $\varphi(x)$ es continua y $Ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ es preimagen de un cerrado; luego podemos efectuar la descomposición $\mathcal{H} = Ker(\varphi) \bigoplus \langle x_0 \rangle$ para algún $x_0 \in \mathcal{H}$ (de hecho, puedo pedir que $\varphi(x_0) = 1$). Sea $y \in \mathcal{H}$, entonces $y = h + \lambda.x_0$ con $h \in Ker(\varphi)$ y $\varphi(y) = \varphi(h) + \lambda.\varphi(x_0) = \lambda.\frac{\langle x_0; x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} = \langle h + \lambda.x_0; \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \rangle = \langle y; \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \rangle$. Finalmente tenemos a $x := \frac{x_0}{\|x_0\|^2}$ que es el vector buscado.

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz vemos que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^*} = \sup_{\|y\|=1} |\langle y, x\rangle| \leq \sup_{\|y\|=1} \|y\| \, . \, \|x\| = \|x\|_{\mathcal{H}}$$

si además notamos que $\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \langle \frac{x}{\|x\|}; x\rangle = \|x\|$ vemos que la norma de φ es $\|\varphi\|_{H^*} = \|x_0\|_H$. $\square$

Es interesante ver como se aplica este teorema a subespacios cerrados de un espacio de Hilbert. R. Cignoli y M. Cotlar lo hacen en [Cotlar-Cignoli], transcribiremos dicho resultado.

Observación III.32 *Dada una funcional $f \in \mathcal{H}^*$, por el teorema de representación de Riesz (teorema III.31) existirá un $x_f \in \mathcal{H}$ que represente a f. Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ subespacio cerrado, entonces $\mathcal{S}$ puede ser visto como espacio de Hilbert, y podemos considerar a la funcional $\widehat{f} \in \mathcal{S}^*$, la restricción de f a $\mathcal{S}$. Luego por el teorema recién citado sabemos que existe $x_{\widehat{f}} \in \mathcal{S}$ que representa a $\widehat{f}$ en $\mathcal{S}$. Cabe preguntarse que relación guardan x_f y $x_{\widehat{f}}$ ambos elementos de $\mathcal{H}$, y la respuesta es simple.Notese que si y pertenece a $\mathcal{S}$ entonces*

$$\widehat{f}(y) = f(y) = \langle y; x_f\rangle = \langle y; P_S(x_f) + P_{S^\perp}(x_f)\rangle = \langle y; P_S(x_f)\rangle$$

y por unicidad $x_{\widehat{f}} = P_{\mathcal{S}}(x_f)$.

Consideremos a la aplicación biyectiva $\Gamma : l^2 \rightarrow \left(l^2\right)^*$ definida por la regla $\Gamma(x) = \langle -; x\rangle$. Entonces Γ es antilineal, o sea reparte la suma

$$\Gamma(x+y) = \langle -; x+y\rangle = \langle -; x\rangle + \langle -; y\rangle = \Gamma(x) + \Gamma(y)$$

pero saca escalares conjugados

$$\Gamma(\lambda.x) = \langle -; \lambda.x\rangle = \overline{\lambda}.\langle -; x\rangle = \overline{\lambda}.\Gamma(x).$$

Ejemplo 44 *Esto nos dice -por ejemplo- que toda funcional de l^2 es de la forma $\varphi((x_n)_n) = (a_n.x_n)_n$ para algún $(a_n) \in l^2$. Y, como ya habíamos visto en el capítulo de espacios normados $\left(l^2\right)^* = l^2$.*

Ejemplo 45 *Analogamente vemos que si (X, μ) es un espacio de medida, entonces toda funcional sobre $\mathcal{L}^2(\mu)$ es de la forma $\varphi(f) = \int_X f.\overline{g}\, d\mu$ para alguna función g de $\mathcal{L}^2(\mu)$. Y, analogamente, $\mathcal{L}^2(\mu)^* = \mathcal{L}^2(\mu)$.*

Notamos a estas aplicaciones φ_x y φ_g respectivamente.

Notese que en todo espacio de Hilbert puede ser definida la aplicación $\Gamma(x) = \langle -; x\rangle$ siendo esta, una aplicación biyectiva y antilineal. Podemos -así- inferir dos resultados importantes que pasamos a enunciar:

1) Si el espacio de Hilbert es real, entonces esta aplicación es un isomorfismo (se deduce del lema III.33).

2) Como lo muestra el teorema precedente se puede definir una biyección entre cualquier espacio de Hilbert y su doble dual. Más aún esta aplicación resulta ser la *evaluación* que es una isometría.

Lema III.33 *Se puede definir un producto interno $\langle\ ;\ \rangle$ en $\mathcal{H}^*$ de manera $(\mathcal{H}^*, \langle\ ;\ \rangle)$ sea un espacio de Hilbert y la norma subyacente sea igual a la norma infinito (en símbolos $\|\ \ \|_\infty = \langle\ ;\ \rangle^{1/2}$)*

DEMOSTRACIÓN:

Por el teorema de III.31, dada $f \in \mathcal{H}^*$ existe un único elemento que notaremos x_f que la representa. Por lo tanto queda bien definida la forma $\langle f; g\rangle_{H^*} = \langle x_g; x_f\rangle$. Y es sencillo comprobar que $\langle\ ;\ \rangle_{H^*}$ es una forma sesquilineal, así $(\mathcal{H}^*, \langle\ ;\ \rangle)$ resulta un espacio de Hilbert. Y además, como se vió en este último teorema, $\|f\|_\infty = \|x_f\|_{\mathcal{H}} = \|\, f\,\|_{\mathcal{H}^*}$ con lo que queda demostrado el lema. □

Teorema III.34 [§]*Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN:

Dado que $\mathcal{H}^*$ es un espacio de Hilbert podemos aplicar el teorema de Riesz en el, de esa manera consideremos Γ_1 y Γ_2 las aplicaciones que quedan definidas entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^*$, y entre $\mathcal{H}^*$ y $\mathcal{H}^{**}$ respectivamente por este último teorema. Entonces por las observaciones anteriores $\Gamma := \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{H}$ y su doble dual.

Sean $\Sigma \in \mathcal{H}^{**}$, y $g \in \mathcal{H}^*$. Si definimos a $f_\Sigma := (\Gamma_2)^{-1}(\Sigma)$, es decir tal que $f_\Sigma \in \mathcal{H}^*$ represente a Σ. Y luego definimos a x_f e y_g para que representen a f y g respectivamente. Obtenemos que:

$$\Sigma(g) = \langle g; f_\Sigma\rangle_{\mathcal{H}^*} = \langle x_f; y_g\rangle_{\mathcal{H}} = g(x_f) \tag{III.8}$$

Con lo cual resulta $\Gamma(x)\, g = g(x)$ para todo g elemento de $\mathcal{H}^*$. Es decir, $\Gamma = i$ la inclusión canónica del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en su doble dual definida por $i(x)\varphi = \varphi(x)$. Por lo tanto i es un isomorfismo como queriamos ver. □

Estamos en condiciones de mostrar el resultado anunciado en §**II.1.1.**. Veremos que en el espacio de Banach $(\mathbf{c}_0, \|\ \ \|_\infty)$no puede definirse una forma sesquilineal definida positiva $\langle\ ;\ \rangle$ de modo que $(\mathbf{c}_0, \langle\ ;\ \rangle)$ resulte un espacio de Hilbert y $\langle x; x\rangle^{1/2} = \|x\|_\infty$ para todo x en $\mathbf{c}_0$. La manera de hacerlo será mostrar que $\mathbf{c}_0$ no es reflexivo, eso bastará.

Observación III.35 *En realidad no hay nada que probar, tan sólo cabe notar que $\mathbf{c}_0{}^* = l^1$ y que $\mathbf{c}_0{}^{**} = (l^1)^* = l^\infty$ (vease* **??***) pero es claro que la inclusión $\mathbf{c}_0 \hookrightarrow l^\infty$ no es suryectiva, en efecto $x = (1, 1, 1, \ldots)$ es un elemento de l^∞ que no pertenece a $\mathbf{c}_0$.*

[§]Organizar con defs, y resultados

III.1.4 Sistemas Ortonormales y Bases

En esta sub-sección estudiaremos la noción de base de un espacio de Hilbert y algunos ejemplos, veremos que este tipo de bases nos proporcionará una gran herramienta para trabajar con elementos genéricos, y sobre todo deduciremos (más adelante) resultados asombrosos sobre al teoría de operadores.

Lema III.36 *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ ortonormales dos a dos, entonces para todo x en $\mathcal{H}$:*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i \rangle|^2$$

DEMOSTRACIÓN:

Dado $x \in \mathcal{H}$ lo podemos reescribir como $x = (x - \sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle x_i) + (\sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle x_i)$. Afirmamos que $(x - \sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle . x_i) \perp (\sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle . x_i)$, para demostrarlo bastará ver que $(x - \sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle . x_i) \perp x_j \quad \forall j = 1 \ldots n$, pero

$$\langle x - \sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle . x_i ; x_j\rangle \ = \ \langle x; x_j\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle . \langle x_i ; x_j\rangle \ = \ \langle x; x_j\rangle - \langle x; x_j\rangle \ = 0$$

Usando el teorema de Pitágoras obtenemos que,dado $x \in \mathcal{H}$,

$$\|x\|^2 = \left\| x - \sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle x_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle x_i \right\|^2$$

y

$$\left\| \sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i\rangle|^2$$

por lo tanto

$$\|x\|^2 \geq \left\| \sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i\rangle|^2 . \qquad \square$$

Una de las aplicaciones del Análisis Funcional es la *Teoría de Aproximaciones*. En esta teoría se estudian, entre otras cosas, fórmulas de cuadratura, la solución de problemas lineales con datos de entrada mal condicionados, y la construcción de "buenas" aproximaciones. En la parte II del libro *Introduction to Hilbert Spaces and Applications* de Lokenath Debnath y Piotr Mikusiñski (cf. [**?**]) podrán encontrarse algunas de ellas como el teorema de "unicidad de la mejor aproximación" (que no es más que nuestra Proposición III.23) y algunas aplicaciones prácticas usando los polinomios de Legendre, Chevyshev, y Jacobi.

Proposición III.37 *Sean $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un sistema ortonormal de $\mathcal{H}$ y $x \in \mathcal{H}$, entonces:*

1. *El conjunto $A := \{\alpha \in \Lambda : \ \langle x; x_\alpha\rangle \neq 0\}$ es a lo sumo numerable.*

2. *Desigualdad de Bessel:* $\|x\|^2 \geq \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x, x_\alpha\rangle|^2$ *donde la suma tiene sentido ya que todos los términos son no negativos, y a lo sumo numerables de ellos son no nulos.*

DEMOSTRACIÓN:

Dado $x \in \mathcal{H}$ sea $A_n := \{\alpha \in \Lambda :\ \langle x; x_\alpha\rangle \geq 1/n\ \}$ para $n \in\mathbb{N}$. Afirmamos que A_n es finito para todo n; pues de lo contrario existiría un tal $n_0 \in\mathbb{N}$ tal que A_{n_0} es infinito, luego podemos tomar $x_1, x_2, \ldots, x_m \in A_{n_0}$ con m tal que $\frac{m}{(n_0)^2} > \|x\|^2$, y aplicando el lema anterior $\frac{m}{(n_0)^2} > \|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^m |\langle x, x_i\rangle|^2 \geq \frac{m}{(n_0)^2}$ lo que es absurdo. Por lo cual A_n era finito como se afirmó. Cabe notar que, dado que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, A es a lo sumo numerable.

Numeramos -ahora- a los x_α con $\alpha \in A$ como $x_1, x_2, x_3, \ldots$, y por el lema anterior $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i\rangle|^2 \quad \forall n \in\mathbb{N}$. Basta aclarar que por el axioma de supremo, el límite -para n tendiendo a infinito- de las sumas parciales existe, ya que todos los términos son positivos y las sumas están acotadas por la norma de x al cuadrado. Así

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x_i\rangle|^2 = \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x, x_\alpha\rangle|^2$$

como se quería mostrar. □

Después de este último resultado tienen sentidos las definiciones III.38 y III.39 que pasamos a dar. En el siguiente capítulo trabajaremos con conjuntos totales y sistemas ortonormales que de hecho ya estudiamos en la sección **??**.

Definición III.38 *El conjunto* S:=$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ $x_\alpha \in \mathcal{H} \quad \forall\alpha \in \Lambda$ *se dirá total si y sólo si* $\mathrm{S}^\perp = \{0\}$.

Definición III.39 *El conjunto* S:=$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ $x_\alpha \in \mathcal{H} \quad \forall\alpha \in \Lambda$ *se dirá base ortonormal (b.o.n.) si él es un sistema ortonormal total.*

El próximo lema, que no es más que un lema técnico, será utilizado en varias demostraciones, vale la pena recordarlo.

Lema III.40 *Un subespacio* $\mathcal{M}$ *es denso si y sólo si* $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN:
($\Rightarrow$) Sea $x \in \mathcal{M}^\perp$; dado $h \in \mathcal{H}$, como $\mathcal{M}$ denso, existirá $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathcal{M}$ convergente a h. Por lo tanto $\langle x; h\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x; y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. En particular $\|x\|^2 = \langle x; x\rangle = 0$

($\Leftarrow$) Observando las propiedades de la ortogonalización nos apercivimos de que, si $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$, entonces $\overline{M} = \left(M^\perp\right)^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$ y por lo tanto M es denso. □

Teorema III.41 *Sea* S:=$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *un sistema ortonormal; entonces son equivalentes:*

i) S *es una base ortonormal.*

ii) S *es un elemento maximal en el reticulado de sistemas ortonormales con* " $<= \subseteq$ ".
iii) $\langle \mathrm{S} \rangle$ *es denso en* $\mathcal{H}$.
iv) $x = \sum_{\alpha\in\Lambda} \langle x; x_\alpha \rangle . x_\alpha \quad \forall x \in \mathcal{H}$.
v)<u>*Identidad de Parseval:*</u> $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x; x_\alpha \rangle|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

DEMOSTRACIÓN:

$(i \Rightarrow ii)$ Sea S b.o.n. y supongamos que $\exists S'$ b.o.n. tal que $S \subseteq S'$ y $S \setminus S' \neq \emptyset$, es decir $\exists x \in S \setminus S'$ $(x \neq 0)$ luego $x \perp S$ lo que contradice la totalidad de S; luego S es maximal.

$(ii \Rightarrow iii)$ Sea $\mathcal{M} := \overline{\langle S \rangle}$ y supongamos que $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{H}$ entonces $\mathcal{M}^\perp \neq \{0\}$ (porque $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{M} \neq \{0\}^\perp$). Lo que es absurdo: tomando un $y \in \mathcal{M}^\perp$ $(y \neq 0)$ nos conseguimos un $y \perp \mathcal{M}$ luego $y \perp S$; así tenemos a $S \cup \{y\}$ b.o.n. tal que $S \subsetneq S \cup \{y\}$ contradiciendo la hipótesis.

$(iii \Rightarrow iv)$ Dado $x \in \mathcal{H}$ vimos que $N = \{\alpha \in \Lambda : \langle x; x_\alpha \rangle \neq 0\}$ es un conjunto a lo sumo numerable, entonces podemos numerar a los x_α con $\alpha \in N$ como $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Por la proposición anterior

$$\left\| \sum_{\alpha\in\Lambda} \langle x, x_\alpha \rangle . x_\alpha \right\|^2 = \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x; x_\alpha \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x; x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

entonces podemos definir $S_n := \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle . x_i$ y afirmar que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, o lo que es lo mismo, de Cauchy. Para verlo, dado $\varepsilon > 0$, usamos el hecho de que $\|S_n\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x; x_i \rangle|^2$ es convergente y luego debe existir un $n_0 \in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=n_0}^{\infty} |\langle x; x_i \rangle|^2 < \varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned} \|S_{m+k} - S_m\|^2 &= \left\| \sum_{i=m+1}^{m+l} \langle x; x_i \rangle . x_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i=m+1}^{m+l} |\langle x; x_i \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |\langle x; x_i \rangle|^2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sean $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ y $w := x - x_o$. Veamos que $w = 0$, bastaría ver que $w \in S^\perp$, ya que por el Lema III.40 sabemos que $S^\perp = \{0\}$ y luego necesariamente $w = 0$. Para eso consideramos dos casos: si <u>$\alpha \in N$</u> entonces $x_\alpha = x_k$ para algún k, luego $\langle x; x_k \rangle \neq 0$ y

$$\begin{aligned} \langle w; x_k \rangle &= \langle x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x; x_i \rangle . x_i ; x_k \rangle \\ &= \langle x; x_k \rangle - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x; x_n \rangle . \underbrace{\langle x_n; x_k \rangle}_{\delta_{n,k}} \\ &= \langle x; x_k \rangle - \langle x; x_k \rangle = 0 \end{aligned}$$

Si por el contrario $\underline{\alpha \notin N}$ entonces $\langle x; x_\alpha \rangle = 0$ y luego

$$\begin{aligned} \langle w; x_\alpha \rangle &= \langle x - \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \langle x; x_i \rangle . x_i ; x_k \rangle \\ &= \langle x; x_k \rangle - \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \langle x; x_i \rangle . \langle x_i; x_k \rangle \\ &= 0 - \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

$(iv \Rightarrow v)$ Dado $x \in \mathcal{H}$, como lo hicimos antes, numeramos a los x_α con $\alpha \in \mathbb{N}$ como $x_1, x_2, x_3, \ldots$ y definimos a las sumas parciales $S_n := \sum_{i=1}^{n} \langle x; x_i \rangle . x_i$ luego para todo n natural $x = (x - S_n) + S_n$. Si aplicamos el teorema de Pitágoras a $x - S_n \perp S_n$ (son ortogonales como consecuencia de la escritura de x, que es la hipótesis) resulta $\|x\|^2 = \|x - S_n\|^2 + \|S_n\|^2$. Además podemos -dado $\varepsilon > 0$- elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $\|x\|^2 - \|S_n\|^2 = \|x - S_n\|^2 < \varepsilon$ entonces

$$\|x\|^2 = \lim_{n \to \infty} \|S_n\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x; x_i \rangle|^2 = \sum_{\alpha \in \Lambda} |\langle x; x_\alpha \rangle|^2 .$$

$(v \Rightarrow i)$ Sea $x \in S^\perp$ luego

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x; x_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0,$$

entonces $x = 0$, y $S^\perp = \{0\}$,como queríamos ver. □

Una vez demostradas, usaremos indiscriminadamente estas equivalencias para facilitar las próximas demostraciones. Veremos por ejemplo que todo espacio de Hilbert admite una base de este tipo y definiremos su dimensión.

Proposición III.42 *Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal.*

Demostración:

La prueba la haremos con uso del lema de Zorn. Dado que $\mathcal{H} \neq \{0\}$ debe existir $x \in \mathcal{H}$ tal que $\|x\| = 1$, entonces $\{x\}$ es un sistema ortonormal. Consideremos ahora al conjunto $\mathbf{C} := \{S \subset \mathcal{H} : S$ es un sistema ortonormal $\}$ y al reticulado $(\mathcal{C}, \subset)$. Dada una cadena $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots$ de elementos de $\mathbf{C}$, definimos a $S := \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ de manera que $S \in \mathbf{C}$ y $S_n \subset S \quad \forall n$ (es cota superior de la cadena). Luego estamos en condiciones de invocar el *peligroso* lema de Zorn para obtener que existe $\widetilde{S}$ sistema ortonormal, elemento maximal del reticulado, o en otras palabras base oortonormal. □

Lema III.43 *En un espacio de Hilbert toda base ortonormal tiene el mismo cardinal.*

Demostración:

Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ dos b.o.n. de $\mathcal{H}$, y sean $\varepsilon := card(\mathcal{E})$ y $\eta := card(\mathcal{F})$; consideraremos dos casos:

a) Si $\mathcal{E}$ o $\mathcal{F}$ son finitos, sin perdida de generalidad podemos asumir que $\mathcal{E}$ es finito y que $\varepsilon \leq \eta$. Supongamos que la desigualdad es estricta, en símbolos $\varepsilon < \eta$, entonces vemos que $\dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{H}) = \dim_{\mathbb{F}}(\langle\mathcal{E}\rangle) < \dim_{\mathbb{F}}(\langle\mathcal{F}\rangle) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{H})$ lo que es absurdo pues $\dim_{\mathbb{F}}(\ )$ denota dimensión algebraica (en este caso dimensión como espacio vectorial), el resultado es bien conocido en dicho caso (cfr. [Larotonda][I.3.16,pág63]). Por lo cual $\varepsilon = \eta$.

b) Si tanto $\mathcal{E}$ como $\mathcal{F}$ son infinitos, para cada $e \in \mathcal{E}$ ($e \neq 0$) consideramos a $\mathcal{F}_e := \{f \in \mathcal{F} : \langle f; e\rangle \neq 0\}$ - conjuntos a lo sumo numerables. Por hipótesis $\mathcal{F}^{\perp} = \{0\}$ entonces cada $f \in \mathcal{F}$ debe pertenecer a algún $\mathcal{F}_e$, lo que se puede abreviar por $\mathcal{F} = \cup_{e\in\mathcal{E}}\mathcal{F}_e$ y luego $\varepsilon \leq \eta$. $\aleph_0 = \eta$. □

Definición III.44 *La dimensión de un espacio de Hilbert es la cardinalidad de una de sus bases ortonormales.* $\dim(\mathcal{H}) := card(\mathcal{E})$ *con* $\mathcal{E}$ *base ortonormal.*

Ejemplo 46 *Es claro que puede haber infinitas bases ortonormales distintas, si* $\mathcal{H} = l^2 = l^2(\mathbb{N})$ *entonces*

$$\mathcal{B} = \left\{ e_n := (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es una base ortonormal. Esto se debe al hecho de que $\langle e_n; e_m\rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & si\ n = m \\ 0, & si\ n \neq m \end{cases}$ *. Y que claramente* $\mathcal{B}^{\perp} = \{(x_n)_n \in l^2 : \langle x; e_n\rangle = x_n = 0 \ para\ todo\ n\} = \{0\}$.

Ejemplo 47 *Si* $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Upsilon) := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\text{: } f(0) = f(2\pi) \quad y \quad \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt < \infty\}$ *y* $\langle f; g\rangle_{\mathcal{L}^2(\Upsilon)} := \int_0^{2\pi} f(t).\overline{g(t)}\, dt$ *veremos que*

$$\mathcal{B} := \left\{ f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i.n.t} \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

es una base ortonormal. Es fácil ver que $\langle f_n; f_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i.(n-m).t}\, dt = \delta_{n,m}$ *, sin embargo el hecho de que* $\mathcal{B}$ *es un cojunto de generadores debe ser estudiado con mayor detenimiento.*

- *Como* $\langle\mathcal{B}\rangle$ *el espacio lineal generado por* B *es una subálgebra del álgebra* $C(\Upsilon,\mathbb{C})$*, el elemento* $e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ *es una unidad del álgebra,* $\mathcal{B}$ *es cerrada por conjugación ya que* $\overline{e_n} = e_{-n}$*, el teorema I.61 (Espacios Normados - Teoremas de Stone-Wierstrass) demuestra que* $\langle\mathcal{B}\rangle$ *es densa en* $C(\Upsilon,\mathbb{C})$ *(con la norma infinito). Pero como* $\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Upsilon)} = \int_0^{2\pi} |f|^2\, dt \leq \int_0^{2\pi} \|f\|_{C(X,\mathbb{C})}\, dt = 2\pi \|f\|_{C(X,\mathbb{C})}$ *para toda* f *en* $C(X,\mathbb{C})$ *y en particular para los elementos de* $\langle\mathcal{B}\rangle$*, se sigue que la clausura de esta subálgebra* $\overline{\langle\mathcal{B}\rangle}^{\mathcal{L}^2(\Upsilon)}$ *incluye a* $C(X,\mathbb{C})$*; por lo cual no hay más que decir ya que la igualdad*

$$\mathcal{L}^2(\Upsilon) = \overline{C(X,\mathbb{C})}^{\mathcal{L}^2(\Upsilon)} \subseteq \overline{\langle\mathcal{B}\rangle}^{\mathcal{L}^2(\Upsilon)} \subseteq \mathcal{L}^2(\Upsilon)$$

muestra exactamente que $\langle\mathcal{B}\rangle$ *es denso, y por el teorema III.41 genera.* □

Ejemplo 48 *Consideremos el espacio de Hardy (ejemplo* **??***)* $\mathbf{H}^2(\Delta) = \{\varphi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n : |z| < 1$ *y* $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty\}$ *.* $\mathcal{B} := \{z^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *es una base ortonormal de* $\mathbf{H}^2(\Delta)$ *porque, claramente lo genera, y* $\langle z^n ; z^m \rangle = \delta_{n,m}$*.*

Ejemplo 49 *En el espacio de Bergman (ejemplo 40), dada* φ *en* $\mathcal{H}_2(\Delta)$*, para casi todo* $t \in [0, 2\pi]$*, existe el límite*

$$\widetilde{\varphi}(t) := \lim_{r\to 1^-} \varphi(r.e^{2\pi.i.t}) \tag{III.9}$$

y es fácil ver que $\widetilde{\varphi}(t) \in \mathcal{L}^2(\Upsilon)$*. Además resulta que* $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ *es una incusión isométrica (o sea que* $\|\widetilde{\varphi}\|_{\mathcal{L}^2(\Upsilon)} = \|\varphi\|_{\mathcal{H}_2(\Delta)}$ *). Luego si definimos por* $\mathcal{H}^2(\Upsilon)$ *al subespacio cerrado* $\{\widetilde{\varphi}(t)\} \subseteq \mathcal{L}^2(\Upsilon)$ *entonces la inclusión es suryectiva, y es flecha se transforma en un isomorfismo iométrico* $\mathcal{B} := \{e^{2\pi i.n.t} : n \in \mathbb{N}_0\}$ *es una base ortonormal de* $\mathcal{H}^2(\Upsilon)$*.*

Observación III.45 *Si* $\dim(\mathcal{H}) < \infty$ *una base ortonormal es exactamente lo mismo que una base en el sentido del álgebra lineal. De lo contrario, si* $\dim(\mathcal{H}) = \infty$*, pueden diferir como lo muestra el ejemplo de* $l^2(\mathbb{N})$*. A saber*

$$\mathcal{S} = \{e_n := (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

que es una base en el sentido de espacios de Hilbert, no es una base en el sentido del álgebra lineal porque $x := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots) \in l^2(\mathbb{N})$ *no es combinación lineal de elementos de* $\mathcal{S}$*, i.e: x no puede ser escrito como* $x = \sum_{i=1}^m \lambda_n.e_n$ *con* $m \in \mathbb{N}$ *y* $\lambda_i \in \mathbb{R}$*.*

III.2 Operadores Acotados

Una clase importante de operadores lineales es la de operadores acotados. En esta sección estudiaremos solamente los operadores acotados, sin embargo no debe creerse que todos los operadores lineales son acotados, aunque el pobre de Conway desvaria cuando escribe "It is unfortunate for the world we live in that all of the operators that arise naturally are not bounded" es cierto que la grán mayoría de los operadores que aparecen en la práctica son no acotados. Nos limitaremos en esta sección a los operadores acotados, los operadores no acotados serán estudiados en detalle en la sección **??**.

III.2.1 Generalidades y ejemplos

Definición III.46 *Diremos que $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ (donde $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son espacios de Hilbert) es un operador lineal si y sólo si es una aplicación lineal entre los espacios dados. Dicho operador se dirá acotado si lo es en el sentido de espacios normados. De hecho usaremos la misma notación, a saber $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, para representar este conjunto.*

> **Nota**: En el futuro sólo consideraremos el caso $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, es decir operadores en $\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Ejemplo 50 *Por definición, si A es un operador lineal y acotado en $(\mathcal{H}, \langle\ ;\ \rangle)$ en el sentido de espacios normados, entonces es un operador lineal y acotado en el sentido de espacios de Hilbert. Este es el caso de los operadores de los Ejemplos 18, 21 para los espacios $\mathcal{L}^2$ y l_2 respectivamente.*

Ejemplo 51 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert; dado $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado vimos que $P_{\mathcal{S}}$ la proyección ortogonal sobre $\mathcal{S}$ es un operador lineal de norma 1, luego es acotado.*

Ejemplo 52 *Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert. Dados $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{K}$, y $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ se puede definir a un operador lineal y acotado $Ax := \sum_{i=1}^{n} \langle x; x_i \rangle . y_i$, como se hizo en el Ejemplo 15. Los estudiaremos en más detalle en* § **I I.2.3.**

> Cabe notar que si alguno de los espacios involucrados (el de llegada o el de salida) fueran de dimensión finita (vea por ejemplo I.40, en la sección I.7) entonces todo operador acotado es de ese tipo, pero no en espacios de Hilbert generales como puede verse en el ejemplo **??**. Sin embargo revease el Lema I.30 de la sección

III.2.2 El adjunto de un operador

Proposición III.47 *Sea $\alpha : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ una funcional sesquilineal acotada, i.e.: $\exists c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|\alpha(x,y)| \leq c.\|x\|.\|y\|$. Entonces existeun operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que para todo par de puntos x, y en $\mathcal{H}$ se verifica que $\alpha(x,y) = \langle Ax; y\rangle$.*

DEMOSTRACIÓN:

Si fijamos $x \in \mathcal{H}$ la aplicación $\alpha_x : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dada por la siguiente regla $\overline{\alpha_x(y) = \alpha(x,y)}$ es lineal y acotada, luego $\alpha_x \in \mathcal{H}^*$; y, por el teorema de Riesz, existe un único $z_x \in \mathcal{H}$ tal que $\alpha_x(y) = \langle y; z_x\rangle \quad \forall y \in \mathcal{H}$. Conseguimos así una nueva aplicación $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dada por la regla $Ax := z_x$ que es: **a**) lineal, pues si $\alpha_{x_1}(y) = \langle y; z_{x_1}\rangle$ y $\alpha_{x_2}(y) = \langle y; z_{x_2}\rangle$ usando las propiedades resulta

$$\begin{aligned}
\alpha_{\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2}(y) &= \overline{\alpha(\lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2, y)} \\
&= \overline{\lambda_1}.\overline{\alpha(x_1,y)} + \overline{\lambda_2}.\overline{\alpha(x_2,y)} \\
&= \overline{\lambda_1}.\langle z_{x_1}; y\rangle + \overline{\lambda_2}.\langle z_{x_2}; y\rangle \\
&= \langle\overline{\lambda_1}.z_{x_1}; y\rangle + .\langle\overline{\lambda_2}.z_{x_2}; y\rangle \\
&= \langle y; \overline{\lambda_1}.z_{x_1}\rangle + .\langle y; \overline{\lambda_2}.z_{x_2}\rangle \\
&= \lambda_1.\langle y; z_{x_1}\rangle + \lambda_2.\langle y; z_{x_2}\rangle \\
&= \lambda_1.\alpha_{x_1}(y) + \lambda_2.\alpha_{x_2}(y)
\end{aligned}$$

y **b**) continua, pues $\alpha_x(Ax) = \overline{\alpha\langle x, Ax\rangle} = \langle Ax; Ax\rangle = \|Ax\|^2 \leq c.\|Ax\|.\|x\|$ luego $\|Ax\| \leq c.\|x\|$.

Además si B es otra tal aplicación tal que $\langle y; Ax\rangle = \langle y; Bx\rangle$ para todo x, y en $\mathcal{H}$, y si definimos $y = Ax - Bx$ luego $0 = \langle Ax - Bx; Ax - Bx\rangle = \|(A-B)x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{H}$ entonces $A = B$ y A queda definido univocamente. □

Dado un operador acotado $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\alpha(x,y) := \langle x; Ay\rangle$ es una funcional sesquilineal, luego -por la proposición anterior- existe un operador B en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $\langle Bx; y\rangle = \langle x; Ay\rangle$ $\forall x, y \in \mathcal{H}$. Este nuevo operador es muy importante en el estudio de espacios de

Hilbert, a continuacíon analizaremos sus propiedades, y como se relaciona con el operador que lo "engendró".

Definición III.48 (Adjunto de un Operador) *Sean $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tales que $\langle Bx; y\rangle = \langle x; Ay\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$ decimos entonces que B es el operador adjunto de A y lo notamos $A^* := B$.*

Ejemplo 53 *En el espacio $\mathbb{C}^n$ del Ejemplo 1.1 dada $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ podemos pensar a A como una matriz de $\mathbb{C}^{n\times n}$ via el isomorfismo que hay entre $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ y $\mathbb{C}^{n\times n}$, luego*

$$\langle x; Ay\rangle = \overline{x}^t.A.y = (A.\overline{x})^t.y = \langle A^*x; y\rangle$$

por lo tanto $A^* = \overline{A}^t$.

Ejemplo 54 *Sean $S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ el operador shift-right (a derecha) y $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ el operador shift-left, ambos en $\mathcal{L}(l^2)$. Se afirma que $S^* = T$, para verlo tomamos un par de vectores genéricos $x, y \in l^2$ y calculamos*

$$\begin{aligned}
\langle Sx, y\rangle &= \langle (0, x_1, x_2, \ldots); (y_1, y_2, \ldots)\rangle \\
&= \textstyle\sum_{n\geq 2} x_{n-1}.\overline{y_n} \\
&= \langle (x_1, x_2, \ldots); (y_2, y_3, \ldots)\rangle \\
&= \langle x; Ty\rangle
\end{aligned}$$

y luego $T^* = S^{**} = S$.

Ejemplo 55 *Sea (X, Ω, μ) en espacio de medida; en $\mathcal{L}^2(\mu)$ dada $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, si consideramos al operador $M_\varphi(f) := \varphi.f$ de esta manera*

$$\langle g; M_\varphi(f)\rangle = \int_X g.\overline{(\varphi.f)}\, d\mu = \int_X (g.\overline{\varphi}).f\, d\mu = \langle g.\overline{\varphi}; f\rangle = \langle M_{\overline{\varphi}}(g).; f\rangle$$

entonces $M_\varphi{}^* = M_{\overline{\varphi}}$.

Ejemplo 56 *Sea* (X,Ω,μ) *en espacio de medida; en* $\mathcal{L}^2(\mu)$ *dado el nucleo* $k(x,y)\in\mathcal{L}^2(\mu\times\mu)$ *que define al operador integral* $K(f):=\int_X k(x,y).f(y)\,d\mu(y)$ *se observa que*

$$\begin{aligned}
\langle g;K(f)\rangle &= \int_X g(x).\overline{\left(\int_X k(x,y).f(y)\,d\mu(y)\right)}\,d\mu(x)\\
&= \iint_{X\times X}\left(g(x).\overline{k(x,y)}\right).\overline{f(y)}\,d\mu(x)d\mu(y)\\
&= \int_X\left(\int_X g(x).\overline{k(x,y)}\,d\mu(x)\right).\overline{f(y)}\,d\mu(y)\\
&= \langle K^*(g);f\rangle
\end{aligned}$$

donde $K^*(g):=\int_X g(x).\overline{k(x,y)}\,d\mu(x)$ *que es otro operador integral, pero esta vez con nucleo* $k^*(x,y)=\overline{k(y,x)}$.

Proposición III.49 *Sea* $\mathcal{H}$ *espacio de Hilbert y* $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *entonces* $A^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

DEMOSTRACIÓN:

Esto es un caso especial del Corolario II.16 de **Espacios Normados** y el lema de Riesz. □

En el caso de los espacios de Hilbert, el adjunto de un operador tiene propiedades "duales" al operador, y las leyes que veremos nos seran de ayuda en la resolución de problemas, y la formalización de resultados.

Proposición III.50 (Propiedades del adjunto) *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert. Sean* $A,B\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *y* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ *entonces:*

1. $(\alpha.A+\beta.B)^*=\overline{\alpha}.A^*+\overline{\beta}.B^*$.
2. $(AB)^*=B^*A^*$.
3. $(A^*)^*=A$.
4. $I^*=I$ *, y si* A *es inversible entonces* $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.
5. $Ker(A^*)=R(A)^\perp$ *y su dual* $Ker(A)=R(A^*)^\perp$.

DEMOSTRACIÓN:

Dados $A,B\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, sean $x,y\in\mathcal{H}$ entonces

1)

$$\begin{aligned}\langle(\alpha.A+\beta.B)x;y\rangle &= \alpha.\langle Ax;y\rangle+\beta.\langle Bx;y\rangle\\ &= \alpha.\langle x;A^*y\rangle+\beta.\langle x;B^*y\rangle\\ &= \langle x;\overline{\alpha}.A^*y\rangle+\langle x;\overline{\beta}.B^*y\rangle\\ &= \langle x;\overline{\alpha}.A^*+\overline{\beta}.B^*y\rangle\end{aligned}$$

2) $\langle A(Bx);y\rangle=\langle Bx;A^*y\rangle=\langle x;B^*A^*y\rangle$. Por lo tanto $(AB)^*=B^*A^*$.

3)

$$\langle x;y\rangle=\langle x;A^*y\rangle=\overline{\langle A^*y;x\rangle}=\overline{\langle y;(A^*)^*x\rangle}=\langle (A^*)^*x;y\rangle$$

Y entonces $A^{**}=A$.

4)a. $\langle x;y\rangle=\langle Ix;y\rangle=\langle x;I^*y\rangle$ luego $I=I^*$.

b. $\langle A^{-1}Ax;y\rangle=\langle x;A^*(A^{-1})^*y\rangle$ entonces usando a) resulta $A^*(A^{-1})^*=I^*=I$, así $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.

5)a. Dado x en $\mathcal{H}$, $x\in Ker(A^*)$ si y sólo si $\langle A^*x;y\rangle=0$ para todo y en $\mathcal{H}$, como $\langle A^*x;y\rangle=\langle x;Ay\rangle$ se tiene que $\langle x;Ay\rangle=0\quad\forall y\in\mathcal{H}$, o, lo que es lo mismo $x\in R(A)^{\perp}$.

b. Usando que $(A^*)^*=A$, se puede ver que esta es la proposición dual de a), más explicitamente $Ker(A)=Ker((A^*)^*)=R(A^*)^{\perp}$. □

Dentro de los operadores acotados existen ciertas sub-clases que son de particular interés en la teoría de operadores, sobre todo los ya estudiados operadores compactos (sección **??**) y los operadores autoadjuntos que definiremos a continuación.

Definición III.51 *$A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dirá operador autoadjunto o hermitiano si y sólo si $A=A^*$.*

Definición III.52 *$A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dirá operador normal si y sólo si $AA^*-A^*A=0$.*

Definición III.53 *$A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dirá operador unitario si y sólo si $AA^*=A^*A=I$.*

Veamos algunos ejemplos de estos operadores dentro de los espacios en los que venimos trabajando.

Ejemplo 57 *Sea $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ entonces AA^* y A^*A son autoadjuntos como se puede comprobar usando las propiedades 2 y 3 de la Proposición III.50.*

Ejemplo 58 *En $\mathbb{C}^n$ vimos que dada $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \equiv \mathbb{C}^{n\times n}$ $A^* = \overline{A}^t$, luego A es autoadjunta siempre y cuando A sea igual a $\overline{A}^t$.*

Ejemplo 59 *Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida, en $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mu)$ dada $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ definimos a $M_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^2(\mu))$.* **a**) *Como vimos $(M_\varphi)^* = M_{\overline{\varphi}}$, luego M_φ es autoadjunto siempre y cuando $f.\varphi = f.\overline{\varphi}$ para toda función $\not f$ en $\mathcal{L}^2(\mu)$, lo que es equivalente a $\varphi = \overline{\varphi}$ en $\mathcal{L}^2(\mu)$, es decir simpre y cuando $\varphi(z) \in \mathbb{R}$ para casi todo punto; esto se debe a que en realidad estamos tomando clases de funciones.* **b**) *M_φ será normal siempre y cuando $M_\varphi(M_\varphi)^* = (M_\varphi)^* M_\varphi$ en $\mathrm{B}(\mathcal{L}^2(\mu))$, y esto se dará si y sólo si $\varphi.\overline{\varphi}.f = |\varphi|^2 .f = \overline{\varphi}.\varphi.f$, es decir M_φ* siempre *es normal.* **c**) *Por la misma cuenta que hicimos en* **b** *una condición necesaria y suficiente para que M_φ sea unitario es que $|\varphi|^2 .f = f$ en $\mathcal{L}^2(\mu)$ $\forall f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, equivalentemente sii $|\varphi| = 1$ para casi todo punto.*

Ejemplo 60 *Sean (X, Ω, μ) un espacio de medida, $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mu)$, y sea $k(x, y) \in \mathcal{L}^2(\mu\times\mu)$ el nucleo del operador integral $K \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^2(\mu))$. Entonces K es autoadjunto si y sólo si $K(f) = \int_X k(x, y).f(y)\, d\mu(y) = K^*(f) = \int_X \overline{k(y, x)}.f(y)\, d\mu(y)$ si y sólo si $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$ p.p..*

Por más que el adjunto de un operador puede tener poco que ver con el operador mismo (en el sentido de alpicaciones) sus normas están bien relacionadas, de hecho como lo muestra la siguiente proposición: son iguales.

Proposición III.54 *Sean $\mathcal{H}$ un $\mathbb{F}$-espacio de Hilbert, y $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ entonces $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2$.*

Demostración:

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1}\langle Ax; Ax\rangle = \sup_{\|x\|=1} \langle A^*Ax; x\rangle \leq$$
$$\leq \sup_{\|x\|=1} \|A^*Ax\| . \|x\| \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| . \|A\|$$

entonces $\|A\| \leq \|A^*\|$; y por dualidad $\|A^*\| \leq \|A^{**}\| = \|A\|$, luego $\|A\| = \|A^*\|$. Por último
$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| . \|A\| = \|A\|^2$$
entonces $\|A^*A\| = \|A\|^2$. Y, por un razonamiento análogo, $\|AA^*\| = \|A\|^2$ lo que concluye la prueba. □

Proposición III.55 *Sean $\mathcal{H}$ un $\mathbb{C}$ -espacio de Hilbert, y $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Una condición necesaria y suficiente para que el operador A sea autoadjunto es que $\langle Ax, x\rangle$ esté en $\mathbb{R}$ para todo x en $\mathcal{H}$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Dado $x \in \mathcal{H}$, podemos, usando las propiedades ya enunciadas, ver que para todo x punto de $\mathcal{H}$ $\langle Ax; x\rangle = \langle x; A^*x\rangle = \langle x; Ax\rangle = \overline{\langle Ax; x\rangle}$ luego $\langle Ax; x\rangle \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\langle Ax; x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo x en $\mathcal{H}$, entonces

$$\langle A(x+y); (x+y)\rangle \quad = \quad \langle Ax; x\rangle + \langle Ay; y\rangle + \langle Ay; x\rangle + \langle Ax; y\rangle$$

como -por hipótesis- los dos primeros sumandos son reales se sigue que $\mathbb{1} = (\langle Ay; x\rangle + \langle Ax; y\rangle) \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} \langle Ay; x\rangle + \langle Ax; y\rangle &= \langle x; Ay\rangle + \langle y; Ax\rangle \\ &= \langle A^*x; y\rangle + \langle A^*y; x\rangle \end{aligned}$$

Usando la hipótesis una vez más la cantidad

$$\langle A(x+i.y); (x+i.y)\rangle = \langle Ax; x\rangle + \langle Ai.y; i.y\rangle + i.\langle Ay; x\rangle - i.\langle Ax; y\rangle$$

resulta real, y por el mismo razonamiento efectuado anteriormente $\mathbb{2} := i.\left(\langle Ay; x\rangle - \langle Ax; y\rangle\right) \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} \langle Ay; x\rangle - \langle Ax; y\rangle &= -\left(\langle x; Ay\rangle - \langle y; Ax\rangle\right) \\ &= -\langle A^*x; y\rangle + \langle A^*y; x\rangle \end{aligned}$$

Sumando $2.\langle Ay; x\rangle = \mathbb{1} + \mathbb{2} = 2.\langle A^*y; x\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$ y luego $A = A^*$ como se afirmó. $\square$

Observación III.56 *Nótese que en las hipótesis de la proposición anterior se insiste en que el espacio de Hilbert sea un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, o sea $\mathbb{F}$=$\mathbb{C}$, de lo contrario la tesis puede no verificarse como lo muestra el contraejemlpo siguiente: En el caso de $\mathcal{H}$ =$\mathbb{R}^2$, considerado como $\mathbb{R}$-espacio de Hilbert con el producto usual $\langle x; y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i.y_i$; en $\mathbb{R}^2$ se puede definir al operador lineal y acotado $A(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ que no es autoadjunto, pues $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq A$, sin embargo $\langle Ax; x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$* $= x_1.x_2 - x_2.x_1 = 0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$.

En un espacio de Hilbert, podemos definir una relación de orden sobre los operadores autoadjuntos de manera que esta resulte lineal, además podremos caracterizar a estos operadores con el uso de la teoria espectral (sección **??**) y así analizar mejor (con más elementos) sus propiedades.

Definición III.57 (Operadores positivos) [¶]*Decimos que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es positivo si y sólo si*

$$\langle Ax; x\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{H}$$

Luego $A \leq B \Longleftrightarrow 0 \leq B - A$.

[¶]El hecho de que la relación de orden está bien definida resulta tribial, ¡verifique!

Ejemplo 61 *En $\mathbb{C}^n$ los operadores positivos son exactamente las matrices semi-definidas positivas, como es fácil de comprobar. Por definición, A es semidefinida positiva si y sólo si* $0 \leq \langle Ax; x \rangle = \overline{x}^t.A.x$.

Ejemplo 62 *En $\mathcal{L}^2(\mu)$, para que $M_\varphi \geq 0$ es necesario y suficiente que $0 \leq \langle M_\varphi(f); f \rangle = \int_X (f.\varphi).\overline{f}\, d\mu = \int_X |f|^2 .\varphi\, d\mu$ para toda $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, y como bién se puede comprobar tomando las funciones características, esto se dará si y sólo si $\varphi \geq 0$ p.p..*

Proposición III.58 *Sea $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ idempotente ($P^2 = P$), entonces son equivalentes:*

1. *P es autoadjunto.*
2. *P es normal.*
3. *P es una proyección ($R(P) = Ker(P)^\perp$).*
4. *P es la proyección ortogonal sobre $R(P)$.*
5. *P es positivo.*

DEMOSTRACIÓN:

Se piden disculpas por el "siga las flechas"que viene a continuación. Si algún lector encontrase una demostración menos laberíntica -le rogamos- comuniquesela a los autores, gracias.

($1 \Rightarrow 2$) Es trivial.

($2 \Rightarrow 3$) P es normal, luego por definición, $P^*P = PP^*$ y, para todo $h \in \mathcal{H}$, resulta

$$\|Ph\|^2 = \langle Ph; Ph \rangle = \langle P^*Ph; h \rangle = \langle PP^*h; h \rangle = \langle P^*h; P^*h \rangle = \|P^*h\|^2$$

entonces $Ker(P) = Ker(P^*) = R(P)^\perp$ y $Ker(P) \perp R(P)$.

($3 \Rightarrow 4$) Sea $\mathcal{M} := R(P)$; dado $h \in \mathcal{H}$ lo reescribimos como $h = (h - Ph) + Ph$. Por hipótesis, $Ph \perp h - Ph$ pues $\mathcal{M} = R(P) = Ker(P)^\perp$ y $P(h - Ph) = Ph - P^2h = 0$, si definimos $P_\mathcal{M}$ la proyección ortogonal sobre $\mathcal{M}$ entonces este nuevo operador permite reescribir a h como $(h - P_\mathcal{M}h) + P_\mathcal{M}h = h = (h - Ph) + Ph$. Por la definición de la proyección ortogonal (vease la definición), resulta $Ph = P_\mathcal{M}h$.

$(4 \Rightarrow 5)$ Sea $h \in \mathcal{H}$, $h = h_1 + h_2$ donde $h_1 \in R(P)$ y $h_2 \in Ker(P)$ entonces, como h_1 es ortogonal a h_2, se observa que

$$\begin{aligned} \langle Ph; h\rangle &= \langle P(h_1+h_2); h_1+h_2\rangle \\ &= \langle h_1; h_1\rangle + \langle h_1; h_2\rangle + \langle 0; h_1+h_2\rangle \\ &= \|h_1\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$(5 \Rightarrow 3)$ Sea $h \in \mathcal{H}$, $h = h_1 + h_2$ donde $h_1 \in R(P)$ y $h_2 \in Ker(P)$, luego por hipótesis $0 \leq \langle Ph; h\rangle = \langle P(h_1+h_2); h_1+h_2\rangle = \langle h_1; h_1\rangle + \langle h_1; h_2\rangle$ y $-\|h_1\|^2 \leq \langle h_1; h_2\rangle$ de donde derivaremos una contradicción, a saber si $\langle h_1; h_2\rangle \neq 0$ entonces definiendo a $\widetilde{h_1} := h_1 \in R(P)$ y $\widetilde{h_2} := \frac{-2.\|h_1\|^2}{\langle h_1; h_2\rangle}.h_2 \in Ker(P)$, reescribiendo la desigualdad anterior, y reemplazando, tenemos que =

$$\begin{aligned} -\|h_1\|^2 &\leq \langle h_1; \tfrac{-2.\|h_1\|^2}{\langle h_1; h_2\rangle}.h_2\rangle \\ &= \tfrac{-2.\|h_1\|^2}{\langle h_1; h_2\rangle}.\langle h_1; h_2\rangle \\ &= -2.\|h_1\|^2 \end{aligned}$$

Lo que es -claramente- absurdo pues $h_1 \neq 0$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Dados $h = h_1 + h_2, g = g_1 + g_2 \in \mathcal{H}$ donde $h_1, g_1 \in R(P)$ y $h_2, g_2 \in Ker(P)$ entonces $\langle Ph; g\rangle = \langle h_1; g_1\rangle$ y

$$\langle P^*h; g\rangle = \langle h; Pg\rangle = \langle h_1; g_1\rangle = \langle Ph; g\rangle \quad \Box$$

III.2.3 Teoría Espectral en Espacios de Hilbert

La Teoría Espectral abarca un gran capítulo de la Teoría de Espacios de Hilbert, en este libro haremos un estudio más general de la teoría espectral dentro de espacios menos restrictivos que los espacios de Hilbert, a saber las Algebras de Banach; y también veremos una aplicación de la teoría espectral a el estudio de *ecuaciones diferenciales*, a saber los sistemas de Sturm-Liouville.

Definición III.59 *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, definimos a su espectro por $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}$: $A - \lambda.I$ no es inversible$\}$.*

Observación III.60 (*Vease en [Cotlar-Cignoli]*) *Si $\lambda \in \sigma(A)$, es decir si $A - \lambda.I$ no es inversible, esto puede deberse a las siguientes razones:*

1) $A - \lambda.I$ no es inyectivo, o sea λ es autovalor (existe $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$).
2) $A - \lambda.I$ es inyectivo, más aún su inversa está definida en un subespacio denso (es decir $R(A - \lambda.I)$ es denso) pero no es continua. En este caso λ pertenece al espectro continuo de A.
3) Su inversa puede ser definida sobre un subespacio que no resulta denso ($R(A-\lambda.I)$ no es denso en $\mathcal{H}$. En este caso λ pertenece al espectro residual de A.

En espacios de Hilbert de dimensión finita sólo el caso 1) es plausible, sinembargo en dimensión infinita puede darse el caso de que $A - zI$ no sea inversible y tampoco posea autovalores.

Un resultado importante que enunciaremos en la brevedad es el que afirma que el espectro de un operador es un conjunto compacto y no vacio, para verlo usaremos unos resultados técnicos que pasamos a enunciar. En ellos $\mathbf{Gl}(\mathcal{H})$ denotará el grupo lineal del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, o sea los operadores inversibles.

Lema III.61 *Son continuas las aplicaciones*

$$\begin{aligned} f_1 : \quad & \mathbf{Gl}(\mathcal{H}) && \to \mathbf{Gl}(\mathcal{H}) \\ & A && \mapsto A^{-1} \\ f_2 : \quad & \mathbf{Gl}(\mathcal{H}) \times \mathbf{Gl}(\mathcal{H}) && \to \mathbf{Gl}(\mathcal{H}) \\ & A, B && \mapsto A.B \end{aligned}$$

Demostración:

Comencemos por f_1. Dados A $\in$B$(\mathcal{H})$ y $\varepsilon > 0$, definimos a $\varepsilon' := \min(\varepsilon, 1)$ y tomamos $\delta := \frac{\varepsilon'}{2\|A^{-1}\|^2}$ luego cada vez que $\|B - A\| < \delta$ $B \in \mathbf{B}(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|})$, se tendrá que B es inversible. Debido a que $\lambda := \|A^{-1}(B-A)\| \leq \|A^{-1}\| . \|B - A\| < 1$ podemos desarrollar a la inversa de $(A^{-1}B - 1) - 1$ como $B^{-1}A = \sum_{n=0}^{\infty}(A^{-1}B-1)^n$ entonces

$$\begin{aligned}
\|B^{-1}\| &= \|\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(A^{-1}B-1)^n A^{-1}\| \\
&\leq \|A^{-1}\| . \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \|A^{-1}B - 1\|^n \\
&\leq \|A^{-1}\| \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \\
&= \frac{\|A^{-1}\|}{1-\lambda} \\
&\leq 2. \|A^{-1}\|
\end{aligned}$$

y luego se llega al resultado buscado:

$$\begin{aligned}
\|A^{-1} - B^{-1}\| &= \|A^{-1}(B-A)B^{-1}\| \\
&\leq \|A^{-1}\| . \|A - B\| . \|B^{-1}\| \\
&\leq \|A^{-1}\| . \frac{\varepsilon'}{2\|A^{-1}\|^2} .2 \|A^{-1}\| \\
&= \varepsilon'
\end{aligned}$$

Así f_1 es continua en A.

El hecho de que f_2 sea continua deviene de las propiedades básicas de la norma, pues simplemente dado $\varepsilon > 0$, y dados A_0 y B_0 operadores acotados

$$\begin{aligned}
\|A_0.B_0 - A.B\| &\leq \|A_0.B_0 - A.B_0\| + \|A.B_0 - A.B\| \\
&\leq \|A_0 - A\| . \|B_0\| + \|A\| . \|B_0 - B\| \\
&\leq \|A_0 - A\| . \|B_0\| + \|B_0 - B\| . \|A_0\| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

para $A \in \mathbf{B}(A_0, \frac{\varepsilon}{2\|B_0\|})$ y $B \in \mathbf{B}(B_0, \frac{\varepsilon}{2\|A_0\|})$. $\square$

Teorema III.62 *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, y $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces $\sigma(A)$ es un conjunto compacto no vacio y $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < \|A\|\ \}$.*

Demostración:

La demostración se hará en tres pasos: $\sigma(A)$ es cerrado (i), es acotado (ii), y es no vacio (iii).

i) Para ver que $\sigma(A)$ es cerrado definimos a $\theta : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ por $\theta(z) := A - zI$, dado $\varepsilon > 0$,

$$\|A - (z+h)I - (A - zI)\| = |h| \,.\, \|I\| < \varepsilon$$

para todo h tal que $|h| < \varepsilon$, luego θ es (uniformemente) continua y, si recordamos el resultado **??** que muestra que $\mathbf{Gl}(\mathcal{H})$ es abierto, la continuidad de θ implica que $\theta^{-1}\left(\mathbf{Gl}(\mathcal{H})\right)$ es abierto; sólo resta notar que $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \theta^{-1}\left(\mathbf{Gl}(\mathcal{H})\right)$ es cerrado.

ii) Sea $|z| > \|A\|$ luego $\frac{1}{z}A$ tiene norma menor que 1 y $\frac{1}{z}A - I$ es inversible, por lo cual $A - zI = z.(\frac{1}{z}A - I)$ es inversible, y $z \notin \sigma(A)$. Así $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < \|A\| \}$ como afirmamos.

iii) Supongamos ahora que $\sigma(A) = \emptyset$, y definamos a $f : \mathbb{C} \to \mathbf{Gl}(\mathcal{H})$ $f(z) = (A - zI)^{-1}$ una función que es continua por ser comopsición de funciones continuas. Dada $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$ definimos a $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $F(z) := \varphi \circ f(z)$ quien también resulta continua por el mismo argumento. *Alors* podemos ver, formando el cociente incremental, que F es analítica pues

$$\begin{aligned}
\tfrac{F(z-h)-F(z)}{h} &= \tfrac{1}{h}\varphi\left(\underbrace{[A-(z-h)I]}_{x^{-1}}{}^{-1} - \underbrace{[A-zI]}_{x^{-1}}{}^{-1}\right)\\
&= \tfrac{1}{h}\varphi\left(x^{-1}(y-x).y^{-1}\right)\\
&= \tfrac{1}{h}\varphi\left([A-(z-h)I]^{-1}.(hI)\,[A-zI]^{-1}\right)\\
&= \varphi\left([A-(z-h)I]^{-1}\,[A-zI]^{-1}\right) \xrightarrow{h\to 0}\\
&\xrightarrow{h\to 0} \varphi\left([A-zI]^{-2}\right)\\
&= F(z)^2
\end{aligned}$$

por la continuidad de φ y f_2 (composición de operadores), el límite es convergente, y F analítica. Más aún, probaremos que F es acotada fuera de cierto disco (los discos son compactos en $\mathbb{C}$), así F resulta acotada; para verlo tomamos $|z| > 2.\,\|A\|$ y notamos que $\left\|\frac{1}{z}A\right\| < 1$, entonces $A - zI = z\left(\frac{1}{z}A - I\right)$, su inversa admite desarrollo en serie, y su norma es igual a

$$\begin{aligned}
\left\|(A-zI)^{-1}\right\| &= \left\|\tfrac{1}{z}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{z}A\right)^{n}\right\| \\
&= \left|\tfrac{1}{z}\right|\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\tfrac{1}{z}A\right\|^{n} \\
&= \tfrac{1}{|z|}\tfrac{1}{1-\left\|\frac{A}{z}\right\|} \\
&= \tfrac{1}{|z|-\|A\|} \\
&= \tfrac{1}{\|A\|}
\end{aligned}$$

por lo tanto$|F(z)| \leq \|\varphi\| . \left\|(A-zI)^{-1}\right\| \leq \frac{\|\varphi\|}{\|A\|}$. En este momento estamos en condiciones de usar el teorema de Liouville (cf. [Ahlfors]), a saber, una función analítica y acotada es -necesariamente- consante. Pero esto es un absurdo, ya que por el Teorema de Hahn-Banach $\mathcal{L}(\mathcal{H})^*$ separa puntos (Corolario I.24), entonces llegamos a una contradicción y $\sigma(A) \neq \emptyset$. □

Definición III.63 *Un operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice acotado inferiormente si y sólo si existe $C \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\|Ax\| \geq C\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$.*

Lema III.64 *$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es acotado inferiormente $\iff$ $R(A)$ es cerrado y $Ker(A) = 0$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea $x \in Ker(A)$ entonces $0 = \|Ax\| \geq C\|x\| \geq 0$ y necesariamente $x = 0$, entonces A es un monomorfismo. Sea ahora $(x_n)_n$ una sucesión tal que $(Ax_n)_n$ es convergente, y luego de Cauchy, entonces $\exists y \in \mathcal{H}$ tal que $Ax_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Usando la definición de acotada inferiormente $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{C}\|A(x_n - x_m)\|$ vemos que x_n es de Cauchy, y luego convergente. Finalmente la continuidad de A nos asegura que $Ax = y$ como queriamos ver.

($\Leftarrow$) Veamoslo por el absurdo, negar la afirmación significa suponer que dado $C > 0$ existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $\|Ax\| < C.\|x\|$. Luego, tomando $C_n = \frac{1}{n}$, podemos suponer que existe una sucesión de vectores $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de norma 1 tal que $\|Ax_n\| < \frac{1}{n}$ y luego $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, dado que $R(A)$ es cerrado, y que A es un monomorfismo se sigue que x_n converge a 0, lo que es absurdo ya que supusimos que $\|x_n\| = 1$ para todo n. □

Proposición III.65 *Sea A un operador acotado y autoadjunto, y sean $m := \inf\limits_{\|x\|=1} \langle Ax; x\rangle$, $M := \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Ax; x\rangle$ entonces:*

1. *$\sigma(A) \subseteq [m, M]$*
2. *$m, M \in \sigma(A)$*

Demostración:

Primero vamos a ver que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, para hacerlo dado $z = a+b.i \in \mathbb{C} \|(A - zI)\, x\|^2 = \|Ax - ax\|^2 + |b|^2 \|x\| - 2\Re e\langle (A - aI)\, x; ibx\rangle$ luego, dado que $(A - aI)^* = (A - aI)$ se sigue que $\langle (A - aI)\, x; x\rangle \in \mathbb{R}$ y que $\Re e \{(-i.b)\langle (A - aI)\, x; x\rangle\} = 0$. De donde $\|(A - zI)\, x\| \geq |b| \,.\, \|x\|$, o sea $A - zI$ sale acotado inferiormente siempre que z no sea real puro. Entonces $R(A - zI) = \overline{R(A - zI)} = Ker((A - zI)^*)^{\perp} = Ker(A - zI)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$, equivalentemente $A - zI$ es un isomorfismo (inversible) y $z \notin \sigma(A)$ si $b \neq 0$.

Sea $R > M$, y sea $x \in \mathcal{H}$ entonces $\|(R.I - A)x\| \,.\, \|x\| \geq |\langle (R.I - A)x; x\rangle| = R. \|x\|^2 - \langle Ax; x\rangle \geq (R - M) \|x\|^2$ así $R.I - A$ está acotado inferiormente, y por la misma cuenta que hicimos con z, $R \notin \sigma(A)$. Dado $r < m$ y procediendo de manera análoga con $A - rI$, podemos ver que $r \notin \sigma(A)$; y $\sigma(A) \subseteq [m, M]$.

Para la segunda parte de la demostración definimos a $B := M.I - A$ y luego

$$\langle Bx; x\rangle = M \|x\|^2 - \langle Ax; x\rangle = \underbrace{\|x\|^2}_{\geq 0} \underbrace{\left(M - \langle A\frac{x}{\|x\|}; \frac{x}{\|x\|}\rangle \right)}_{\geq 0}.$$

luego B es positivo. Sea $(x_n)_n$ sucesión en $\mathcal{H}$ tal que $M := \lim_{n\to\infty} \langle Ax; x\rangle$, y sea $\beta(x, y) := \langle Bx; y\rangle$, β resulta ser una forma sesquilineal semidefinida positiva. Luego por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\beta(x, y)| \leq \beta(x, x)^{1/2}\beta(y, y)^{1/2}$ reemplazando a x por x_n y a y por Bx_n, y observando que $Bx_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$, se deduce que $\langle Bx_n; x_n\rangle^{1/2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, y entonces se obtiene

$$\begin{aligned} \|Bx_n\|^2 &= |\langle Bx_n; Bx_n\rangle| \\ &\leq \langle Bx_n; x_n\rangle^{1/2} \langle B^2 x_n; Bx_n\rangle^{1/2} \\ &\leq \langle Bx_n; x_n\rangle^{1/2} \|B\|^{3/2} \end{aligned}$$

y, como $\langle Bx_n; x_n\rangle \overset{n\to\infty}{\to} 0$ se deduce que Bx_n también lo hace, lo que muestra que B no está acotado inferiormente, y luego no es inversible: pues de serlo sería un monomorfismo con rango cerrado (i.e.: el rango de todo isomorfismo es $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}$). □

Observación III.66 *Cuando estudiabamos el adunto de un operador notamos que $A - zI$ es inversible siempre y cuando $(A - zI)^*$ lo es; cabe percatarse de que $z \notin \sigma(A)$ si y sólo si $A - zI$ no es inversible si y sólo si $(A - zI)^*$ no es inversible si y sólo si $\overline{z} \notin \sigma(A)$. De esta manera tenemos una buena herramienta para aprender cosas sobre el espectro de un operador:* investigando su adjunto. *Dicha herramienta prueba ser provechosa en el caso de los operadores shift que estudiaremos en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 63 *Si queremos encontrar el espectro del operador shift de l^2 definido por $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ podemos analizar al espectro de su adjunto (estudiado en 54) $S^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$ que tiene un espectro más fácil de descubrir. Veamos: $(x_1, x_2, \ldots) = z.(x_2, x_3, \ldots)$ si $x_1 = z.x_2$, $x_2 = z.x_3$,...,$x_n = z.x_{n+1}$,... ; y ($x \neq 0$) sin pérdida de* *la generalidad tomando* $x_1 := 1$*,* $(1, z, z^2, z^3, \ldots) \in l^2$ *es condición necesaria para que* $z \in \sigma(S^*)$*. Recapitulando* $\sigma(S^*)$ *es un conjunto cerrado tal que* $\{z : |z| < 1\} \subseteq \sigma(S^*) \subseteq \{z : |z| \leq \|S^*\| = 1\}$ *entonces* $\sigma(S^*) = \{z : |z| \leq 1\}$ *y finalmente* $\sigma(S) = \{\overline{z} : z \in \sigma(S^*)\} = \sigma(S^*) = \{z : |z| \leq 1\}$*.*

Corolario III.67 *Un operador lineal, acotado y autoadjunto* A *es positivo siempre y cuando* $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$*.*

Demostración:

El Teorema III.62 nos dice exactamente que los operadores autoadjuntos tienen espectro real, la Proposición III.65 que $m := \inf_{\|x\|=1} \langle Ax; x \rangle \in \sigma(A)$ y $m \leq r \ \forall r \in \sigma(A)$. Luego $\langle Ax; x \rangle \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{H}$ sii $m \geq 0$ sii $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. □

Definición III.68 *Dado* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *definimos a* $r(A) :=$ *radio espectral de* $A = \sup_{z \in \sigma(A)} |z|$ *y a* $\omega(A) :=$ *radio numérico de* $A = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax; x \rangle|$*.*

Observación III.69 *Teniendo en cuenta las definiciones y usando el Teorema III.62 y la Proposición III.65 se sigue que*

$$0 \leq r(A), \omega(A) \leq \|A\| \tag{III.10}$$

.

Proposición III.70 *mIREN LO QUE VALE!!!!!!!!!!* ‖

$$r(A) = \lim \ \|A^n\|^{1/n}$$

Ejemplo 64 *Este resultado se vuelve de verdad bueno en el caso de los operadores nilpotentes, por ejemplo si* $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ *y queremos averiguar el espectro del operador representado por la matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3.\pi & 0 \end{pmatrix}$*, entonces dado que* $A^2 = 0$ *se sigue que* $r(A) = 0$*, y luego* $\{0\} \subseteq \sigma(A)$*.*

El siguiente ejemplo muestra como la puede no valer la igualdad en (III.10).

Ejemplo 65 *Dado un nucleo* $k(x, y) \in \mathcal{C}([0, 1] \times [0, 1])$ *no identicamente nulo, el operador* $K_0(f) := \int_0^x k(x, y) f(y)\, dy$ *no es el operador nulo (*$\|K_0\| \neq 0$*), pero* $\sigma(A) = \{0\}$*.*

Lema III.71 *Sean* $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in \mathbb{C}[t]$ *y* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *entonces* $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$*.*

‖demo en algebras de Banach, charlar con Fredo
o
Conway p.202

DEMOSTRACIÓN:

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $z - p(t) = a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\dots(t-\alpha_n) \Rightarrow$ afirmo que $zI - p(A) = a(A-\alpha_1 I)(A-\alpha_2 I)\dots(A-\alpha_n I)$ (notese que los parentesis conmutan) es inversible sii $(A-\alpha_k I)$ lo es $\forall k$. La vuelta de esta afirmación es trivial, para ver la ida supongamos que

$$(zI - p(A))B = I = (A-\alpha_k I)(resto)B$$

$$B(zI - p(A)) = I = B(resto)(A-\alpha_k I)$$

luego $A - \alpha_k I$ tiene un inverso a izquierda y otro derecha, entonces es inversible (y el inverso a izquierda es igual al inverso a derecha. cf. [Gentile]).

$\subseteq$: Se tiene que $z \notin \sigma(p(A))$ si, y sólo si $\alpha_k \notin \sigma(A)$ para todo k (los α_k dependen de z). Po lo cual $z \in \sigma(p(A))$ si y sólo si existe k tal que $\alpha_k \in \sigma(A)$ entonces $z = p(\alpha_k)$ para algún k y $\alpha_k \in \sigma(A)$, o sea $z \in p(\sigma(A))$.

$\supseteq$: Sea $\alpha \in \sigma(A)$. Luego $p(\alpha) \in \sigma(p(A))$ si y sólo si $p(\alpha)I - A$ no es inversible, como α es raiz de $p(t) - p(\alpha)$ y por hipótesis $A - \alpha I$ no es inversible vemos que $p(A) - p(\alpha) = (A-\alpha).q(A)$ tampoco lo es, y $p(\alpha) \in \sigma(p(A))$ completando la prueba. $\square$

Proposición III.72 *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjunto entonces $r(A) = \omega(A) = \|A\|$.*

DEMOSTRACIÓN:

Dado A autoadjunto recordemos que $\sigma(A) \subseteq [m, M]$ donde $m := \inf\limits_{\|x\|=1} \langle Ax; x\rangle$ y $M := \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Ax; x\rangle$. Nótese que

$$\begin{aligned}\omega(A) &= \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax; x\rangle| \\ &= \max\left\{-m := -\inf_{\|x\|=1} \langle Ax; x\rangle\ ,\ M := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax; x\rangle\right\}\end{aligned}$$

además tanto m como M pertenecen al espectro de A luego $r(A) = \sup\limits_{z\in\sigma(A)} |z| = \max\{-m, M) = \omega(A)$ para todo operador autoadjunto.

Por otro lado $\|A\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Ax; Ax\rangle = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle A^2x; x\rangle = \omega(A^2) = r(A^2)$, por el lema anterior tomando $p(t) = t^2$ obtenemos que $\sigma(A)^2 = \sigma(A^2)$ y $r(A^2) = \sup\limits_{z\in\sigma(A^2)} |z| = \sup\limits_{w\in\sigma(A)} |w^2| = \left(\sup\limits_{w\in\sigma(A)} |w|\right)^2 = r(A)^2$. $\square$

Ejemplo 66 *En $\mathcal{L}^2([0,1])$ el operador de Voltera definido por $V(f) := \int_0^x f(y)\,dy$ es un caso especial del ejemplo anterior (tómese $k(x,y) \equiv 1$), analizaremos este caso en "Operadores Compactos".*

IV
APÉNDICE A: **SISTEMAS DE STURM-LIOUVILLE**

El objeto de esta sección es estudiar un problema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en derivadas parciales, *el problema de Sturm-Liouville*. A partir de las investigaciones de *C. Sturm* y *J. Liouville*, quienes fueron los primeros en abordar el estudio de las vibraciones y equilibrios de varillas y cuerdas, para así llegar a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de contorno, se inició esta teoría que lleva sus nombres. Dedicaremos nuestro estudio este problema de ecuaciones diferenciales que puede ser traducido al lenguaje del análisis funcional y resuelto dentro de dicho marco.

IV.1 El problema de la cuerda vibrante - Un ejemplo importante.

Un ejemplo importante de sistema de Sturm-Liouville es el de la cuerda (homogenea) vibrante, que nos lleva a la ecuación (IV.1) conocida como la ecuación de D'Alembert. Esta ecuación se deduce a partir de definiciones físicas de fenómenos como la tensión, la fuerza, etcetera; y algunas aproximaciones del tipo $sen(x) = x$ que parecen funcionar en dicha ciencia. Vease por ejemplo [Rey Pastor, §112] para una mejor elucidación de esta deducción.

Estudiaremos las vibraciones de una cuerda homogenea de longitud finita y extremos fijos. Según nos cuentan el señor Rey Pastor y companía, si consideramos al sistema de coordenadas (x, u), suponemos a la cuerda tensada sobre el segmento de extremos $(0, 0)$ y $(L, 0)$, denotamos por t al tiempo, cuya posición en el instante $t = 0$ está dada por $(x, f(x))$ con $0 \leq x \leq L$: al apartar a la cuerda de la posición de equilibrio, la ecuacion de la deformación de la cuerda está dada por la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{IV.1}$$

(IV.1) se puede resolver por el método de **separación de variables**. A saber, dado el sistema

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad \text{si } t > 0 \text{ y } 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = 0 \quad \text{si } t > 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \quad \text{si } 0 \leq x \leq L \\ u_t(0,x) = g(x) \end{cases} \tag{IV.2}$$

donde $(x, f(x))$ es la posición de la cuerda en el instante $t = 0$, y $g(x)$ es la velocidad instantanea en $t = 0$ *. Si suponemos que existe una solución del tipo $u(x,t) = X(x).T(t)$, donde $X(x)$ y $T(t)$ son dos funciones suaves a valores reales, entonces (IV.2) se transforma en las ecuación $X''(x)T(t) - \frac{1}{c^2} X(x)T''(t) = 0$, que es de variable separada, como se deduce en (IV.3):

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} \tag{IV.3}$$

por lo tanto se deduce que, dado que cada uno de los miembros de la igualdad (IV.3) depende de una variable distinta, ellos son necesariamente constantes, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ dicha constante. Luego resolver el sistema

$$X''(x) - \lambda.X(x) \quad = \quad 0 \tag{IV.4}$$

$$T''(t) - \left(c^2\lambda\right) T(t) \quad = \quad 0 \tag{IV.5}$$

de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de borde, es obtener una solución de (IV.1), la ecuación que queríamos resolver!

Analizando las condiciones de borde vemos que $u(t,0) = T(t)X(0) = 0$ para todo $t > 0$, por lo tanto $X(0) = 0$, analogamente $X(L) = 0$. Para resolver (IV.4) es necesario considerar los casos $\lambda \geq 0$, y $\lambda < 0$. Al hacerlo se nota que el primero de estos casos solo lleva a la solución trivial $X \equiv 0$ (basta encontrar la solucion general y usar la información que nos dan las ecuaciones iniciales), pretendemos encontrar otro tipo de soluciones también. Para el caso $\lambda < 0$, se obtiene, tomando $\nu = \sqrt{-\lambda}$, que $X(x) = a.\cos(\nu x) + b.\operatorname{sen}(\nu x)$ es una función suave real y es solución de (IV.4). Por las condiciones de contorno $0 = X(0) = a.\cos(0) + b.\operatorname{sen}(0) = a$, y $0 = X(L) = b.\operatorname{sen}(\nu L)$ luego necesariamente (no queremos $b = 0$ que resulta en la solución trivial) νL es un multiplo de π, de manera que $\nu = \frac{1}{L} n\pi$ es solución. Luego, para cada n natural, podemos definir una solución $X_n(x) = b_n.\operatorname{sen}(\nu x)$.

El trabajo más duro ya completo nos invita a resolver (IV.5). Definiendo a $T_n(t) = p.\cos(c\nu.t) + q.\operatorname{sen}(c\nu.t)$, vemos que efectivamente es solución clásica de esta ecuación. Por

*De hecho el problema puede ser resuelto sin estas dos últimas condiciones iniciales, aunque en tal caso no obtendriamos una solución única. En [Rey Pastor] se estudian dichas generalizaciones.

lo tanto conseguimos funciones

$$u_n(t,x) = a_n.\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x)\left[p_n.\cos\left(\frac{cn\pi}{L}.t\right) + q_n.\sin\left(\frac{cn\pi}{L}.t\right)\right] \tag{IV.6}$$

que son soluciones de le ecuación general. Cabe notar que en el contexto físico hay una relación entre los coeficientes de (IV.6) y los armónicos de los tonos producidos por la cuerda vibrando, el tono producido por cada u_n tendrá una frecuencia $\frac{L}{cn\pi}$, de ahí que los tonos serán más agudos a medida que se achique la longitud L de la cuerda. Imaginese una cuerda de guitarra, por ejemplo.

De esta manera podemos sugerir a una solución del tipo

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x)\left[p_n.\cos\left(\frac{cn\pi}{L}.t\right) + q_n.\operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{L}.t\right)\right] \tag{IV.7}$$

y ver si existen coeficientes a_n, p_n y q_n de manera que (IV.7) cumple las ecuaciones de contorno. Estas afirman que $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(0,x) = g(x)$, reemplazando en (IV.7) se observa que

$$\begin{aligned} u(0,x) = f(x) &= \sum a_n.\operatorname{sen}(\tfrac{n\pi}{L}x)\left[p_n.\cos\left(\tfrac{L}{cn\pi}.0\right) + q_n.\sin\left(\tfrac{L}{cn\pi}.0\right)\right] = \\ &= \sum a_n.p_n.\operatorname{sen}(\tfrac{n\pi}{L}x) \end{aligned} \tag{IV.8}$$

y que

$$\begin{aligned} u_t(0,x) = g(x) &= \sum a_n.\operatorname{sen}(\tfrac{n\pi}{L}x)\tfrac{L}{cn\pi}\left[-p_n.\operatorname{sen}\left(\tfrac{L}{cn\pi}.0\right) + q_n.\cos\left(\tfrac{L}{cn\pi}.0\right)\right] = \\ &= \sum a_n.q_n.\left(\tfrac{L}{cn\pi}\right).\operatorname{sen}(\tfrac{n\pi}{L}x) \end{aligned} \tag{IV.9}$$

Para terminar la resolución del problema, según los coeficientes de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$ definimos:

$$a_n.p_n := \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x).\operatorname{sen}(\tfrac{n\pi}{L}x)\,dx$$

$$a_n.q_n := \tfrac{cn\pi}{L}.\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(x).\operatorname{sen}(\tfrac{n\pi}{L}x)\,dx$$

y *voila: le problème est résolu.* Cabría también estudiar la convergencia de la serie, y su derivabilidad, dejamos esta tarea a cargo del lector.

IV.2 El problema de Sturm-Liouville en una variable

Una vez analizado el ejemplo de la cuerda homogenea vibrante, nos proponemos a concretar una generalización del mismo. Se puede incluso considerar un nuevo problema, el de la cuerda vibrante (no homogenea) y mediante el método de separación de variables llegar a una ecuación del mismo tipo que el que estudiaremos (cfr. [Rey Pastor, C.XXVIII Nota V]). Para comenzar nuestros estudios necesitaremos ciertos preliminares que pasamos a listar.

Sea $[a,b]$ un intervalo compacto de la recta real $\mathbb{R}$ y consideremos a los espacios de funciones $\mathcal{C}[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua$\}$, $\mathcal{C}^{(n)}[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que f tiene n derivadas continuas$\}$, y $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}[a,b]$ y $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{(n)}[a,b]$ los correspondientes espacios de funciones a valores complejos. Ahora estamos en condiciones de definir a la ecuación diferencial que estudiaremos.

Definición IV.1 *Llamamos* **sistema (regular) de Sturm-Liouville** *a la ecuación diferencial*

$$-h'' + q.h - \lambda.h = f$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$, $q \in \mathcal{C}[a,b]$ *y* $f \in \mathcal{L}^2[a,b]$ *sujeta a las condiciones de frontera*

$$\begin{cases} ()\ \alpha.h(a) + \alpha_1.h'(a) = 0 \\ \\ ()\ \beta.h(b) + \beta_1.h'(b) = 0 \end{cases}$$

donde $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1 \in \mathbb{R}$ *tales que* $\alpha^2 + \alpha_1^2 \neq 0$ *y* $\beta^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

Se definen ahora los siguientes conjuntos, el estudio de las funciones sobre dichos conjuntos junto con la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias nos permitiran resolver el problema de Sturm-Liouville.

$\mathcal{D}_a := \{h \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{(1)}[a,b] : h'$ es absolutamente continua, $h'' \in \mathcal{L}^2[a,b]$, y satisface (IV.1)$\}$

$\mathcal{D}_b := \{h \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{(1)}[a,b] : h'$ es absolutamente continua, $h'' \in \mathcal{L}^2[a,b]$, y satisface (IV.1)$\}$

$\mathcal{D} := \mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$.

Entonces $\mathcal{D}$ resulta -claramente- un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $L : \mathcal{D} \to \mathcal{L}^2[a,b]$ definido por $Lh := -h'' + q.h$ es un operador lineal.

Definición IV.2 *Si L es el operador definido arriba, el problema de Sturm Liouville es el de, dados $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{L}^2[a,b]$, encontrar si existe $h \in \mathcal{D}$ tal que $(L - \lambda.I)\,h = f$.*

Observación IV.3 *En el lenguaje del análisis funcional el problema se traduce a ver para que valores de λ f pertenece a $R(L - \lambda.I)$.*

En lo que sigue nos reduciremos a estudiar tán sólo los casos para los que $L : \mathcal{D} \to \mathcal{L}^2[a,b]$ resulte un operador inyectivo, y con el Lema IV.14 de esta sección veremos que siempre podemos reducirnos a tal caso. Llamaremos $(*)$ a la condición $\{ L$ inyectivo$\} =$ por definición $= \{$ Si $h \in \mathcal{D}$ y $Lh = 0$ entonces $h \equiv 0$ $\}$.

Observación IV.4 *Como se anunció mediante el Lema IV.14 veremos que siempre podemos reducirnos al caso de L inyectivo, más precisamente veremos que para el caso de L génerico podemos encontrar un $\mu \in \mathbb{R}$ tal que el operador $L - \mu I$ sea inyectivo, de manera que si definimos a $\widetilde{q} := q - \mu$ y a $\widetilde{L}$ por $\widetilde{L}h := -h'' + \widetilde{q}.h$ dicho operador cumple $(*)$ y luego podremos encontrar una solución para este operador, cabe notar que las soluciones se corresponden de manera obvia.*

Lema IV.5 *(Resultado de ecuaciones diferenciales ordinarias: vease por ejemplo [Rey Pastor])*

Sean $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1 \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha^2 + \alpha_1^2 \neq 0$ y $\beta^2 + \beta_1^2 \neq 0$; entonces existen $h_a \in \mathcal{D}_a$ y $h_b \in \mathcal{D}_b$ funciones no identicamente nulas y a valores reales tales que $Lh_a = 0 = Lh_b$

Observación IV.6 *Si $W(x)$ es el Wronskiano de dichas soluciones (h_a y h_b)*

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} h_a & h_b \\ h'_a & h'_b \end{pmatrix} = h_a.h'_b - h'_a.h_b$$

entonces $W(x)$ es una función derivable en $\mathbb{R}$, y $W'(x) = h_a.h''_b - h''_a.h_b = h_a.(qh_b) - (q.h_a).h_b = 0$. Luego $W(x)$ es una función constante. Definamos a $c := W(a)$.

Lema IV.7 *Supongamos que vale $(*)$ y que h_a y h_b vienen dadas por el lema anterior. Entonces $W \equiv c \neq 0$.*

Demostración:

Ya se vió en la observación IV.6 que $W(x)$ es un función constante. Supongamos que esa constante sea nula, (i.e.: $c = 0$) entonces h_a y h_b son linealmente dependientes. Como h_a y h_b son reales, existirá $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $h_b(a) = \lambda.\ h_a(a)$ y $h'_b(a) = \lambda.h'_a(a)$. Luego h_b está en $\mathcal{D}$, pues (por IV.1) $\alpha.h_b(a) + \alpha_1.h'_b(a) = \alpha.\lambda.h_a(a) + \alpha_1.\lambda.h'_a(a) = 0$, y $Lh_b = 0$. Por hipótesis se cumple $(*)$ y $h_b \equiv 0$ contradiciendo las hipótesis del lema anterior. Ergo $c \neq 0$ como se afirmó. $\square$

Llamamos **función de Green** para L a la función $g : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ definida por la regla

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{c} h_a(x).h_b(y) & \text{si } a \leq x \leq y \leq b \\ \\ \frac{1}{c} h_a(y).h_b(x) & \text{si } a \leq y \leq x \leq b \end{cases}$$

En el proximo teorema vermos que si definimos a un operador integral G tomando a la función de Green como su nucleo, entonces este operador compacto es el inverso a izquierda y derecha de L. Veremos a este teorema después de unos resultados técnicos.

Lema IV.8 *Si $g(x,y)$ es la función de Green para L, entonces g es una función real continua y simétrica (i.e: $g(x,y) = g(y,x)$).*

Demostración:

Por su definición $c \in \mathbb{R}$; $h_a(s)$ y $h_b(s)$ son funciones reales por IV.5, por lo que g es real. La función g es simetría por su definición, y además el hecho de que las funciones continuas $g\Big|_{\{a \leq x \leq y \leq b\}}$ y $g\Big|_{\{a \leq y \leq x \leq b\}}$, que evidentemente son continuas, coincidan es la intersección de los intervalos de definición ($\{(x,y) : a \leq x = y \leq b\}$) luego por el "pasting lemma" (cf.[Munkres, Theorem 7.3]) g resulta continua. $\square$

Teorema IV.9 *Supongamos que vale $(*)$, y sea $G : \mathcal{L}^2[a,b] \to \mathcal{L}^2[a,b]$ el operador integral definido por*

$$(Gf)(x) := \int_a^b g(x,y).f(y)\,dy$$

Entonces:

1. El operador G es compacto.
2. G es autoadjunto.
3. $R(G) = \mathcal{D}$.
4. $LGf = f \quad \forall f \in \mathcal{L}^2[a,b]$.
5. $GLh = h \quad \forall h \in \mathcal{D}$.

Demostración:

1: Esto deviene del hecho de que G es un operador integral, y ya vimos en (**??**) que todo operador integral es compacto.

2: El hecho de que G sea autoadjunto se desprende directamente del lema anterior, y el ejemplo 59 de la sección de Espacios de Hilbert pues $g(x,y) = \overline{g(y,x)}$ donde corresponde.

3: Veamos primero que $Ran(G) \subseteq \mathcal{D}$. Para hacerlo, dada $f \in \mathcal{L}^2[a,b]$, y $h := Gf \in \mathcal{L}^2[a,b]$ definimos

$$H_a(x) := \frac{1}{c}\int_a^x h_a(y).f(y)\,dy \quad \text{y} \quad H_b(x) := \frac{1}{c}\int_x^b h_b(y).f(y)\,dy \tag{IV.10}$$

luego

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_a^b g(x,y).f(y)\,dy \\ &= \int_a^x h_a(x).h_b(y).f(y)\,dy + \int_x^b h_a(y).h_b(x).f(y)\,dy \\ &= h_a(x).H_b(x) + H_a(x).h_b(x) \end{aligned}$$

Derivando en (IV.10), h' resulta absolutamente continua, y $h' = \left(\frac{1}{c}.h_a.f\right).h_b + H_a.h'_b + h'_a.H_b + h_a.\left(\frac{-1}{c}.h_b.f\right) = H_a.h'_b + h'_a.H_b$ $(p.p.)$. Ya que a priori solo puedo afirmar la igualdad p.p. aunque en este caso particular, como veremos, vale siempre.

Si, por ejemplo, deifinimos $\Phi := H_a.h'_b + h'_a.H_b$ (es absolutamente continua) y $\Psi(x) := h(a) + \int_a^x \Phi(y)\,dy$ otra función absolutamente continua (absoluta continuidad de la integral, cfr. [Whe-Zygmund]) entonces tenemos que $h(a) = \Psi(a)$ y además $h' - \Psi' = 0$ p.p.. Por un resultado del análisis real (op. cit.) $h(x) = \Psi(x)$ para todo x en $[a, b]$. De esta manera vemos que, como Ψ' es continua, h' también lo es.

Derivando una vez más en (IV.10) obtenemos

$$h'' = \underbrace{\left(\frac{1}{c}.h_a.f\right).h'_b}_{\in\mathcal{L}^2} + \underbrace{H_a.h''_b}_{\in\mathcal{L}^2} + \underbrace{h''_a.H_b}_{\in\mathcal{L}^2} + \underbrace{\left(\frac{-1}{c}.h_b.f\right).h'_a}_{\in\mathcal{L}^2} \in \mathcal{L}^2[a, b]. \tag{IV.11}$$

Y finalmente $H_a(a) = \frac{1}{c}\int_a^a h_a(y).f(y)\,dy = 0$ y $h_a \in \mathcal{D}_a$ entonces $0 = \alpha h_a(a) + \alpha_1.h'_a(a) = \alpha h_a(a).H_b(a) + \alpha_1.h'_a(a).H_b(a) = \alpha h(a) + \alpha_1.h'(a)$; por lo cual $h \in \mathcal{D}_a$. Usando que $H_a(a) = \frac{1}{c}\int_b^b h_b(y).f(y)\,dy = 0$ y $h_b \in \mathcal{D}_b$ resulta que $h \in \mathcal{D}$.

4: Sea $h = Gf$ luego

$$\begin{aligned} Lh = -h'' + qh &= \left(\tfrac{1}{c}.h_a.h'_b.f + H_a.h''_b + h''_a.H_b - \tfrac{1}{c}.h'_a.h_b.f\right) + \\ &\quad + q.\left(H_a.h_b + h_a.H_b\right) \\ &= \left(-h''_b + q.h_b\right).H_a + \left(-h''_a + q.h_a\right).H_b + \\ &\quad + \tfrac{1}{c}.\underbrace{\left(h'_a.h_b - h_a.h'_b\right)}_{W(x)=c}.f \\ &= f \end{aligned}$$

5: Dado $h \in \mathcal{D}$, $Lh \in \mathcal{L}^2$ resulta que $L(GLh) = Lh$ si y sólo si $0 = L(GLh - h)$ que por $(*)$ se verificará si y sólo si $GLh = h$. $\square$

Observación IV.10 *Notese que* $(*)$ *implica que* 0 *no es autovalor de* L*, y por el teorema anterior* 0 *tampoco es autovalor de* G*.*

Corolario IV.11 *Supongamos que vale* $(*)$*.Sean* $h \in \mathcal{D}$*, y* $\lambda \in C$ *tales que* $Lh = \lambda h$ *entonces* $Gh = \frac{1}{\lambda}h$*. Reciprocamente si* $h \in \mathcal{L}^2$ *y* $\lambda \in C$ *luego* $h \in \mathcal{D}$ *y* $Lh = \lambda h$*.*

Demostración:

"Stupid is what stupid does", como dijo el amigo Forrest Gump.

Lema IV.12 *Supongamos que vale* $(*)$ *y sea* $\lambda \in \sigma_p(G)$ *entonces* $\dim(Ker(G-\lambda I)) = 1$.[†]

Demostración:

Sabemos que $\dim(Ker(G-\lambda I)) \geq 1$, ahora supongamos que la desigualdad es estricta, es decir que existe un par devectores linealmente independientes h_1, h_2 en $Ker(G-\lambda I)$; por el corolario anterior $h_1, h_2 \in Ran(G) = \mathcal{D}$ luego ellos (y cualquier combinación lineal de ellos) satisfacen $-h_i'' + (q - \frac{1}{\lambda}).h_i = 0 \quad i = 1, 2$. La teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias nos dice que el espacio (vectorial) de soluciones de esta última ecuación tiene a lo sumo dimensión 2, por lo que toda solución deberá ser combinación lineal de h_1 y h_2. Esta es una contradicción ya que de ser así esto implicaría que toda solución de la ecuación satisface (IV.1) y (IV.1), lo que es claramente absurdo. $\square$

Teorema IV.13 *Supongamos que vale* $(*)$ *luego existe una sucesión* $(\lambda_n)_{n\in IN}$ *de números reales y una base ortonormal* $\{e_n\}_{n\in IN}$ *de* $\mathcal{L}^2[a,b]$ *tales que:*

1. $0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \ldots$ y $|\lambda_n| \overset{n\to\infty}{\to} \infty$.
2. $e_n \in \mathcal{D}$ y $Le_n = \lambda_n.e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Si $\lambda \neq \lambda_n$ $\forall n$ y $f \in \mathcal{L}^2$ entonces existe un único $h \in \mathcal{D}$ tal que $(L-\lambda I)\, h = f$.
4. Si $\lambda = \lambda_n$ para algún n y $f \in \mathcal{L}^2$ entonces existe $h \in \mathcal{D}$ tal que $(L-\lambda I)\, h = f$ sii $\langle f; e_n\rangle = 0$. En tal caso todo par de soluciones difiere en un múltiplo de e_n.

Demostración:

1 y **2**: Cabe notar que G es un operador compacto y autoadjunto, luego por el Teorema **??**, G puede ser diagonalizado como $G = \sum_{n\in IN} \lambda_n' P_n$ donde P_n es la proyección ortogonal sobre $Ker(G-\lambda_n' I)$. Sea e_n un vector normalizado en $Ker(G-\lambda_n' I)$. Por el Lema IV.12 y el teorema de diagonalización de operadores compactos autoadjuntos se sigue que $G = \sum \lambda_n' \langle \cdot\, ; e_n\rangle.e_n$ luego $Ge_m = \sum_{n\in IN} \lambda_n' \langle e_m; e_n\rangle e_n = \lambda_m'.e_m$. Así, definiendo $\lambda_n := \frac{1}{\lambda_n'}$ (recuerdese la Observación IV.10 que dice que 0 no es autovalor de G) obtenemos que $Le_n = \lambda_n.e_n$ para todo n en $\mathbb{N}$. Dado que el teorema nombrado asegura que λ_n' tiende a cero, vemos que $|\lambda_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Por el Lema IV.12 se tiene que a lo sumo dos autovalores tienen el mismo valor absoluto, luego podemos reordenarlos de manera que se cumpla la condición pedida en 1.

[†]verpg253 del rey

3: Del teorema anterior deducimos que $Lh-\lambda h=f$ si y sólo si $h-\lambda(Gh)=Gf$. Si $\lambda \neq \lambda_n$ $\forall n$ entonces $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\bar{\lambda}}\in \sigma_p(G)=\sigma_p(G^*)$ y por (cfr. [Conway, Corollary 4.15]) $G-\frac{1}{\lambda}$ es inversible. Luego dado $f\in\mathcal{L}^2[a,b]$, existe un único $h\in\mathcal{L}^2[a,b]$ tal que $Gf=(\frac{1}{\lambda}-G)h$ de manera que aplicando L a dicha igualdad obtenemos que $f=L\left(\frac{1}{\lambda}h\right)-\lambda\left(\frac{1}{\lambda}h\right)$ y así h está en $\mathcal{D}$.

4: Por último sea $n\in\mathbb{N}$ tal que $\lambda=\lambda_n$. Si $Lh-\lambda_n h=f$ entonces $h-\lambda_n Gh=Gf$. Con lo que el producto interno

$$\langle Gf;e_n\rangle=\langle h;e_n\rangle-\lambda_n\langle Gh;e_n\rangle=\langle h;e_n\rangle-\lambda_n\langle h;Ge_n\rangle=$$

$$=\langle h;e_n\rangle-\lambda_n\langle h;\tfrac{1}{\lambda_n}e_n\rangle=\langle h;e_n\rangle-\langle h;e_n\rangle=0$$

así deducimos que $0=\langle Gf;e_n\rangle=\langle f;Ge_n\rangle=\frac{1}{\lambda_n}\langle f;e_n\rangle$; y f es ortogonal a e_n como se afirmaba.

Del lema anterior $Ker(G-\frac{1}{\lambda_n})$ tiene dimensión 1, i.e. $Ker(G-\frac{1}{\lambda_n})=<e_n>$. Definiendo a $\mathcal{N}:=<e_n>^{\perp}$ obtenemos un subespacio de manera que $G(\mathcal{N})\subseteq\mathcal{N}$ y $G(\mathcal{N}^{\perp})\subseteq\mathcal{N}^{\perp}$, o sea $\mathcal{N}$ es un espacio de Hilbert sobre el cual el operador $G_1:=G\,|_{\mathcal{N}}$ es compacto y autoadjunto, aunque en este caso $\lambda_n\notin\sigma_p(G_1)$, y por el recién citado corolario $Ran(G-\lambda_n)=\mathcal{N}$. Luego las cuentas de 3) pueden ser repetidas y f resulta oretogonal a e_n. Analogamente $\exists! h\in\mathcal{N}$ tal que $Lh-\lambda_n h=f$, pero en $\mathcal{L}^2$ hay infinitas soluciones, todas las de la forma $h+\alpha.e_n$ para $\alpha\in\mathbb{C}$, y sólo esas. Es decir todo par de soluciones difiere en un múltiplo de e_n. $\square$

Lema IV.14 *Dado el operador de Sturm Liouville $L:\mathcal{D}\to\mathcal{L}^2[a,b]$ definido por $Lh=-h''+qh$ siempre existe $\mu\in\mathbb{R}$ tal que $L-\mu I$ es inyectivo.*

Demostración:

1. Si $h,g\in\mathcal{C}^{(1)}[a,b]$ tales que h',g' son absolutamnete continuas, y $h'',g''\in\mathcal{L}^2[a,b]$ entonces

$$\begin{aligned}\textstyle\int_a^b[h''.g-h.g'']\,dt &= (-h'.g-h.g')|_a^b+\textstyle\int_a^b[h'.g'-h'.g']\,dt\\ &= [h'(b).g(b)-h(b).g'(b)]- \qquad\text{(IV.12)}\\ &\quad-[h'(a).g(a)-h(a).g'(a)]\end{aligned}$$

2. Si $h, g \in \mathcal{D}$, es decir cumplen además (IV.1) y (IV.1), entonces veamos que L es autoadjunto

$$\begin{aligned}
\langle Lh; g\rangle - \langle h; Lg\rangle &= \langle -h'' + q.h; g\rangle - \langle h; -g'' + q.g\rangle \\
&= \int_a^b -h''.g + (q.h).g\,dt - \int_a^b -g''.h + (q.g).h\,dt \\
&= \int_a^b -h''.g\,dt - \int_a^b -h.g''\,dt \\
&= -\int_a^b [h''.g - h.g'']\,dt \\
&= [h'(b).g(b) - h(b).g'(b)] - [h'(a).g(a) - h(a).g'(a)]
\end{aligned}$$

sólo resta ver que este último miembro es igual a

$$\begin{aligned}
&\left[(h'(b).g(b) - h(b).g'(b)) - \tfrac{g(b)}{\beta_1}.(\beta_1.h'(b) + \beta.h(b))\right] + \\
&+ \left[(h'(a).g(a) - h(a).g'(a)) - \tfrac{g(a)}{\alpha_1}.(\alpha_1.h'(a) + \alpha.h(a))\right] \\
= \;& h'(b).\left(g(b) - \tfrac{g(b)}{\beta_1}.\beta_1\right) - h(b).\left(g'(b) - \tfrac{\beta}{\beta_1}g(b)\right) + \\
&+ h'(a).\left(g(a) - \tfrac{g(a)}{\alpha_1}.\alpha_1\right) - h(a).\left(g'(a) - \tfrac{\alpha}{\alpha_1}g(a)\right) \\
= \;& 0 - 0 + 0 - 0 = 0.
\end{aligned} \tag{IV.13}$$

Notese que estamos suponiendo que α_1 y β_1 son no nulos, lo cual no es necesariamente cierto; para terminar la demostración correctamente deberiamos dividirnos en distintos casos (las condiciones impuestas obligan a que no se den los casos $\alpha = 0$ y $\alpha_1 = 0$ a la vez, o $\beta = \beta_1 = 0$) y hacer una demostración distinta (pero análoga) para cada uno de ellos. Dejamos esta tarea a cargo del lector.

1. Sean $h, g \in \mathcal{D}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$ tales que $h \in Ker(L-\lambda I)$ y $g \in Ker(L-\mu I)$ entonces $\langle h; g\rangle = 0$, porque $\lambda.\langle h; g\rangle = \langle Lh; g\rangle = \langle h; Lg\rangle = \mu.\langle h; g\rangle$ luego $(\mu - \lambda).\langle h; g\rangle = 0 = \langle h; g\rangle$ como queriamos ver.

2. Terminamos la demostración del lema mostrando que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $Ker(L - \mu I) = (0)$. De lo contrario para todo $\mu \in \mathbb{R}$, existe $h_\mu \neq 0$ tal que $(L - \mu I)h_\mu = 0$, de esta manera podemos construir un sistema ortonormal $\{h_\mu\}_{\mu\in\mathbb{R}}$ de la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$, la potencia del continuo, que es estrictamente mayor que la $\dim(\mathcal{L}^2[a,b]) = \aleph_0$ (vease ej 2.2 de Espacios de Hilbert), lo que es absurdo (cf. [Halmos2]) como se ve en la sección de espacios de Hilbert. Queda así probado el lema. □

V
ÁLGEBRAS DE BANACH

V.1 Generalidades, espectros e ideales

Un álgebra V sobre el cuerpo K es un espacio vectorial con producto entre vectores, que hace de V un anillo tal que: si $v, w \in V$ y $\alpha \in K$ entonces $\alpha(vw) = (\alpha v)w = v(\alpha w)$.

Definición V.1 *Se dice que* $(A, \| \quad \|)$ *es un álgebra de Banach si* $(A, \| \quad \|)$ *es un espacio de Banach y al mismo tiempo* A *es un álgebra sobre* $\mathbb{C}$ *, cumpliendo las siguientes dos relaciones entre el producto y la norma:*

$$\begin{aligned} \|ab\| \leq & \quad \|a\| \, \|b\| \\ \|1_A\| = & \quad 1 \end{aligned}$$

Cumpliéndose esta última cuando el álgebra tiene unidad. Un álgebra de Banach B sin unidad puede incluirse como ideal en un álgebra de Banach B^1 con unidad de la siguiente manera: $B^1 = \{(\lambda, b) : \lambda \in \mathbb{C}, b \in B)\}$, definiendo:

$$\begin{aligned} (\lambda, b) + (\gamma, c) := & \quad (\beta + \gamma, b + c) \\ (\lambda, b).(\gamma, c) := & \quad (\lambda\gamma, \lambda c + \gamma b + bc) \\ \|(\lambda, b)\| := & \quad |\lambda| + \|b\| \, . \end{aligned}$$

Ejercicio 1 *Probar que* B^1 *así definida es un álgebra de Banach con unidad* $(1, 0)$*. Probar que* $B \hookrightarrow B^1$ *isométricamente y que* B *es un ideal maximal de* B^1*.*

Este resultado nos permite en la mayoría de los casos trabajar con álgebras con unidad, y salvo indicación contraria, en lo sucesivo álgebra de Banach referirá a álgebra de Banach con unidad. Cuando precisemos una unidad, supondremos a nuestra álgebra $A \subset A^1$.

Nótese que se puede suponer a los complejos incluidos en A, pues $\alpha \mapsto \alpha 1_A$ es un isomorfismo isométrico con su imagen. Además, mediante esta identificación, resulta $1_A = 1$, así que no vamos a hacer la distinción de ahora en adelante.

Puede darse un producto para el producto (en el sentido de espacios normados) de álgebras de Banach: si (a,b) y $(c,d) \in A \times B$, definimos

$$\begin{aligned} (a,b)(c,d) = &\ (ac, bd). \\ \|(a,b)\| = &\ \|a\|_A + \|b\|_B \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \|(a,b)(c,d)\| &= \|ac\| + \|bd\| \\ &\leq \|a\|\,\|c\| + \|b\|\,\|d\| \\ &\leq \|a\|\,\|c\| + \|b\|\,\|d\| + \|a\|\,\|d\| + \|b\|\,\|c\| \\ &= (\|a\| + \|b\|)(\|c\| + \|d\|) \\ &= \|(a,b)\|\,\|(c,d)\| \end{aligned}$$

En todo espacio normado A, se cumple que la funciones $+ : A \times A \mapsto A$ (definida por $+(a,b) = a+b$) y $\lambda : A \mapsto A$ (definida por $\lambda(a) = \lambda a$) son continuas (ver I.3 y I.2 al comienzo del Capítulo I). Además, en un álgebra de Banach la función $x : A \times A \mapsto A$, definida por $x(a,b) = a.b$, es bilineal y continua.

$$\begin{aligned} \|ab - cd\| &= \|ab - ad + ad - cd\| \\ &\leq \|ab - ad\| + \|ad - cd\| \\ &\leq \|a\|\,\|b - d\| + \|d\|\,\|a - c\| \\ &\leq (\|a\| + \|d\|)\,(\|b - d\| + \|a - c\|) \\ &= (\|a\| + \|d\|)\,(\|(a,b) - (c,d)\|) \\ &\leq (\|(a,b)\| + \|(c,d)\|)\,(\|(a,b) - (c,d)\|) \end{aligned}$$

Donde el primer término del producto anterior se mantiene acotado con mantener acotado $\|(a,b) - (c,d)\|$.

Precisaremos una nueva noción de *morfismo de algebras de Banach*: la vieja noción de morfismo de espacios de Banach, más el agregado de ser un morfismo de algebras (morfismo de anillos con $f(\lambda) = \lambda$ si $\lambda \in K$). De la misma manera, diremos que dos álgebras de Banach son isomorfas (o equivalentes) si existe entre ellas un isomorfismo de espacios de Banach (extensivamente: transformación lineal isométrica) que es al mismo tiempo un (iso)morfismo de álgebras (extensivamente: isomorfismo de anillos con $f(\lambda) = \lambda$ si $\lambda \in K$).

No debemos olvidarnos de que las álgebras de Banach son también espacios de Banach, ni de que los morfismos de álgebras de Banach son también transformaciones lineales continuas. Como tales, estas últimas tienen norma finita.

V.1.1 Ejemplos de álgebras de Banach:

Todos estos espacios son espacios de Banach y en su mayoría fueron tratados en el Capítulo II. En cada caso, mostraremos la operación producto y el elemento unidad (cuando exista), y probaremos la desigualdad V.1

Ejemplo 67 $\mathcal{B}(E)$*, con* E *espacio de Banach con la composición como producto.*

Ejemplo 68 *Es claro que es una álgebra con unidad y (salvo el caso dim(E)=* 1*) no abeliana.*

Ejemplo 69 $L^\infty(F,\mu) = \{f : E \longmapsto \mathbb{C},\ f$ *es* $\mu-$*medible y existe* Ω *con sup*$\{|f(\Omega)|\} < \infty$ *y* $\mu(F \backslash \Omega) = 0\}$*.* (F,μ) *espacio de medida* $\sigma-$*finita. Las operaciones se definen puntualmente, y* $\|f\|_\infty = \inf\{\lambda :$*existe* Ω *con sup*$\{|f(\Omega)|\} = \lambda$ *y* $\mu(F\backslash\Omega) = 0\}$*. Tomando* Ω_f *tal que sup*$\{|f(\Omega_f)|\} = \|f\|_\infty$ *con* $\mu(F\backslash\Omega_f) = 0$ *y* Ω_g *tal que sup*$\{|f(\Omega_g)|\} = \|g\|_\infty$ *con* $\mu(F\backslash\Omega_g) = 0$ *resulta que* $\Omega = \Omega_g \cap \Omega_f$ *verifica sup*$\{|fg(\Omega)|\} \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ *y* $\mu(F\backslash\Omega) = 0$*, con lo cual* $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$*.*

La función constante 1 *es la unidad de este espacio, y es un álgebra de Banach abeliana.*

Ejemplo 70 $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, d)$*, donde* d *es la medida discreta (*$d(A) = \#(A)$*)* $C_b(A) = \{f : A \mapsto \mathbb{C}$ *tal que* f *es continua y acotada*$\}$ *con* A *un espacio topológico localmente compacto. Las operaciones se definen puntualmente y la norma es* $\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|$*. En realidad, este espacio es una subálgebra cerrada (y por lo tanto completa) de 69.*

Ejemplo 71 $l^\infty(I) = \{f : I \mapsto \mathbb{C},$ *tal que sup*$|f(I)| < \infty\}$*, con* I *un conjunto cualquiera de índices. Tomando en* I *la topología discreta, queda* I *localmente compacto, y* $l^\infty(I) = C_b(I)$*, y que en esta topología todas las funciones son continuas.*

Ejemplo 72 $l^\infty(\mathbb{N}) = l^\infty$*. Este espacio también es un caso particular de 69.*

Ejemplo 73 $C(K)$ *donde* K *es compacto topológico. En realidad este es un caso particular del 70, pero debido a su importancia se enuncia separadamente.*

El producto, así como la suma, se define puntualmente, es decir

$$
\begin{aligned}
(fg)(x) &= f(x)g(x) \\
\|fg\|_\infty &= \sup_{x\in K} f(x)g(x) \\
&\leq \sup_{x\in K} |f(x)| \sup_{x\in K} |g(x)| \\
&= \|f\|_\infty \|g\|_\infty
\end{aligned}
$$

Como casos particulares importantes, tenemos los siguientes dos:

(a) $\mathbb{C}^n \cong C(\{1,...,n\})$.

(b) $C(\overline{\Delta})$ (Con $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$)

Ejemplo 74 $C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega)$ *con* $\overline{\{x : |f(x)| > \epsilon\}}$ *compacto* $\forall \epsilon > 0\}$ *con* Ω *un espacio topólogico localmente compacto, con las mismas operaciones que para 73. Si* Ω *es un espacio compacto, entonces el espacio es el mismo 73 y tiene unidad. Si* Ω *no es compacto, el espacio no tiene unidad (pues si e fuera la unidad,* $ef = f \ \ \forall f$ *implica* $e(x)f(x) = f(x)$ $\forall x \forall f$*. Como el espacio es localmente compacto, para cada* x *podremos construir (es un corolario simple al Lema de Urysohn, ver [Munkres][Chapter4,Theorem3.1])* f *de soporte compacto, con* $f(x) \neq 0$*, con lo cual* $f \in C_0(\Omega)$*, y entonces* $e(x) = 1 \forall x$*, pero*$1 \notin C_0(\Omega)$ *).*

Podemos incluirla en un álgebra con unidad de la siguiente manera: Tomando $\Omega \subset \Omega' = \Omega \cup \{\infty\}$ *la compactificación puntual de* Ω *(ver I.66), y tomando* $\phi \in C_0(\Omega)$*,construimos* ϕ' *definiéndola igual a* ϕ *en* Ω *y definiendo* $\phi(\infty) = 0$*. Es fácil verificar que* ϕ' *resulta continua en* Ω'*, y que la aplicación* $\phi \mapsto \phi'$ *es un monomorfismo de álgebras de Banach. En consecuencia resulta* $C_0(\Omega) \subset C(\Omega')$*, y esta última tiene unidad (73)*

Nótese que $C(\Omega')$ *no es isométricamente isomorfa* $C_0(\Omega)^1$*, aunque hay entre ellas un isomorfimo algebraico que es homeomorfismo.*

Ejemplo 75 $L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}} |f| < \infty\}$*. El producto en este espacio se llamará convolución y se notara por* $*$*. Se define de la siguiente manera:* $(f * g)(s) = \int_{\mathbb{R}} f(s-t)g(t)dt$*. La operación es simétrica, asociativa y distributiva con respecto a la suma* *(ver I.50). Resta, sin embargo, probar V.1.*

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}} |(f*g)(s)|\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(s-t)g(t)dt \right| ds \\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(s-t)g(t)|\, dtds \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(s-t)|\,|g(t)|\, dsdt \qquad \textit{(Fubini)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \int_{\mathbb{R}} |f(s-t)|\, dsdt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\, \|f\|_{L^1}\, dt \\
&= \|g\|_{L^1}\, \|f\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Ejemplo 76 *S subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(E)$, E espacio de Banach. Por ejemplo, los operadores compactos, los operadores traza, los operadores Hilbert-Schmidt.*

Ejemplo 77 $H^\infty = \{\psi : \Delta \to \mathbb{C}$ *tal que* ψ *es holomorfa y acotada*$\}$

Ejemplo 78 *Álgebra del disco*$= \{\psi : \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ *tal que* ψ *es holomorfa en* Δ *y* ψ *es continua*$\}$.

Definición V.2 *Notaremos como* $A^\bullet = \{$*elementos inversibles de* $A\} = \{a \in A : \exists b \in A : ab = ba = 1\}$.

A semejanza de $\mathcal{B}(E)$, demostraremos los siguientes resultados.

Lema V.3 *Sea A un álgebra de Banach, $b \in A$ y $\|b-1\| < 1$, entonces $b \in A^\bullet$ (o sea, b es inversible)*

Demostración:

La serie $\sum_{i=0}^{\infty}(1-b)^i$ converge (es de Cauchy por la hipótesis) y además,

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{\infty}(1-b)^i - b\sum_{i=0}^{\infty}(1-b)^i &= (1-b)\textstyle\sum_{i=0}^{\infty}(1-b)^i \\
&= \lim_{n\to\infty}\textstyle\sum_{i=0}^{n}(1-b)(1-b)^i \\
&= \lim_{n\to\infty}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(1-b)^i \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}(1-b)^i - 1,
\end{aligned}$$

entonces $b\sum_{i=0}^{\infty}(1-b)^i = 1$ y análogamente $(\sum_{i=0}^{\infty}(1-b)^i)b = 1$.

Además podemos acotar $\|b^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|b-1\|}$, pues

$$\begin{aligned} \|b^{-1}\| &= \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{i=0}^{n}(1-b)^i\right\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \|1-b\|^i \\ &= \frac{1}{1-\|1-b\|}. \square \end{aligned}$$

Hay otra forma equivalente del mismo lema que a veces resulta más útil: si $\|b\| < 1$, entonces $b - 1 \in A^\bullet$.

Ejercicio 2 *Demuestre que $\|b\| < 1$, entonces $b - 1$ es inversible.*

Lema V.4 *En un álgebra de Banach A, si $a, b \in A$, a es inversible y $\|a-b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, entonces b es inversible.*

DEMOSTRACIÓN:

Si a es inversible y $\|a-b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ entonces $\|1-a^{-1}b\| = \|a^{-1}(a-b)\| \leq \|a^{-1}\|\,\|a-b\| < 1$. Entonces $a^{-1}b$ es inversible con lo cual b tiene que ser inversible.$\square$

Lema V.5 *$A^\bullet$ es un abierto de A.*

DEMOSTRACIÓN:

Es una consecuencia inmediata del Lema anterior.$\square$

Definición V.6 *Definiremos el espectro también como en $\mathcal{B}(E)$:*

$$\sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin A^\bullet\}$$

Observación V.7 *Si $f : A \to B$ es un morfismo de álgebras, $a \in A$ y $\lambda \notin \sigma_A(a)$, entonces*

$$\begin{aligned} a - \lambda \in A^\bullet \quad &\Rightarrow 1 = b(a-\lambda) = (a-\lambda)b \\ &\Rightarrow 1 = f(b)(f(a)-\lambda) = (f(a)-\lambda)f(b) \\ &\Rightarrow f(a) - \lambda \in B^\bullet \\ &\Rightarrow \lambda \notin \sigma_B(f(a)). \end{aligned}$$

Entonces $\sigma_B(f(a)) \subset \sigma_A(a)$. En particular, si f es un isomorfismo de álgebras, resulta que $\sigma_B(f(a)) = \sigma_A(a)$.

Lema V.8 *$f : A^\bullet \to A^\bullet$, definida por $f(a) = a^{-1}$ es continua.*

Demostración:

$a^{-1} - b^{-1} = a^{-1}(a-b)b^{-1}$, y entonces $\|a^{-1} - b^{-1}\| \leq \|a^{-1}\| \|a-b\| \|b^{-1}\|$. Nos resta ahora acotar $\|b^{-1}\|$. Pero $b^{-1} = (\sum_{i=0}^{\infty}(1 - a^{-1}b)^i)a^{-1}$, y entonces

$$\begin{aligned} \|b^{-1}\| &\leq \|\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a^{-i}(a-b)^i\| \|a^{-1}\| \\ &\leq \|a^{-1}\| \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \|a^{-1}\|^i \|a-b\|^i \end{aligned}$$

, y suponiendo $\|a-b\| \leq \frac{1}{2\|a^{-1}\|}$, queda $\|b^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|$. Entonces, si $\|a-b\| \leq \min\{\frac{1}{2\|a^{-1}\|}, \frac{\epsilon}{2\|a^{-1}\|^2}\}$ tenemos $\|a^{-1} - b^{-1}\| < \epsilon$. $\square$

Lema V.9 *$\sigma_A(a)$ es un compacto no vacío del plano complejo*

Demostración:

Si $|\lambda| > \|a\|$ entonces $\lambda \neq 0$ y $\|(1 - \frac{a}{\lambda}) - 1\| < 1$. Entonces $1 - \frac{a}{\lambda}$ es inversible y por lo tanto $a - \lambda 1$ también. Luego $\sigma_A(a)$ es acotado. Además el morfismo $f : \mathbb{C} \to A$ dado por $f(\lambda) = a - \lambda$ es continuo y $\sigma_A(a) = f^{-1}((A^\bullet)^c)$. Entonces $\sigma_A(a)$ es cerrado y acotado, y en consecuencia compacto.

La demostración de que el espectro es no vacío es similar a la de $\mathcal{B}(E)$ y es una aplicación del teorema de Liouville en su versión vectorial.$\square$

Teorema V.10 (Gelfand-Mazur) *Si A es un álgebra de Banach de división (no necesariamente conmutativa), entonces $A \cong \mathbb{C}$.*

Demostración:

Si $a \in A$, existe $\lambda \in \sigma_A(a)$ entonces $a - \lambda \notin A^\bullet = A - \{0\}$, entonces $a = \lambda$.$\square$

Por economía, en sucesivo ideal será sinónimo de ideal propio. Es claro que un subespacio maximal en un espacio normado es o bien denso o bien cerrado (ver I.16). Un ideal maximal, en cambio, nunca es denso. Más adelante probaremos que es siempre cerrado.

Lema V.11 *Si J es ideal de un álgebra de Banach A entonces $\overline{J}$ (la clausura métrica) es también un ideal de A.*

Demostración:

Dado $x \in \overline{J}$ $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset J$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ entonces $ax = \lim_{n\to\infty} ax_n \in \overline{J}$. Por otra parte, como la clausura de un subespacio es un subespacio (ver I.13), sólo resta ver que $\overline{J} \neq A$. Dado $a \in J$, $\|1 - a\| \geq 1$ (pues si no, a es inversible) y entonces $\|1 - b\| \geq 1$ $\forall b \in \overline{J}$. Entonces $1 \notin \overline{J}$.$\square$

Notar que si M es un ideal (a izquierda o derecha) maximal entonces tiene que ser cerrado.

Ejercicio 3 *Si A es un álgebra de Banach y I un ideal (a izquierda o a derecha) cerrado de A, entonces el cociente A/I en el sentido de espacios de Banach es un álgebra de Banach con las operaciones inducidas.*

Veamos un ejemplo acerca de los ideales de $C(K)$.

Proposición V.12 *Si K es compacto e I es un ideal cerrado de $C(K)$, entonces existe $F \subseteq K$, cerrado tal que $I = I_F := \{f \in C(K) : f(F) = 0\}$*

DEMOSTRACIÓN:

Llamemos $Ker(g) := \{x \in K : g(x) = 0\}$.

Sea $F = \bigcap_{f\in I} Ker(f)$. Está claro que F es cerrado y que $I \subseteq I_F$. Probemos que I es denso en I_F.

Sea $\psi \in I_F$. Sabemos que $F = \bigcap_{f\in I} Ker(f) \subseteq Ker(\psi) \subseteq \{x \in K : |\psi(x)| < \varepsilon\} := E$. E es abierto y $E^c \subseteq \bigcup_{f\in I} Ker(f)^c$. E^c es compacto y los $Ker(\varphi)^c$ son abiertos. Entonces $E^c \subseteq \bigcup_{i=1}^n Ker(f_i)^c$y $\bigcap_{i=1}^n Ker(f_i) \subseteq E$.

Si $f := \sum_{i=1}^n \overline{f_i} f_i = \sum_{i=1}^n |f_i|^2$resulta que $Ker(f) = \bigcap_{i=1}^n Ker(f_i) \subseteq E$. Además, f es una combinación lineal de elementos f_i y por lo tanto pertenece a I.

De la compacidad de K se deduce que existe un número positivo δ tal que $\{x \in K : f(x) < \delta\} \subseteq E$ (Tómese un subcubrimiento finito de $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{C}} \{f(x) > \frac{1}{n}\} \supset K\backslash E$).

Sea $f_\delta = \max(f(x), \delta)$ y sea $\psi_\delta = \frac{f}{f\delta}\ \psi$. Es claro que ψ_δ pertenece a I, pues f pertenece a I y éste es un ideal.

Como $f \leq f_\delta$, resulta que $|\psi(x)| \geq |\psi_\delta(x)|$.

Si $\psi_\delta(x) \neq \psi(x)$, $f(x) < \delta$ y entonces $|\psi(x)| < \varepsilon$, con lo cual $|\psi(x) - \psi_\delta(x).| < |\psi(x)| + |\psi_\delta(x)| < 2\varepsilon$.

Entonces, dado un $\varepsilon > 0$ existe $\psi_\delta \in I$ tal que $\|\psi - \psi_\delta\|_\infty < 2\varepsilon$. Entonces I es denso en I_F. Como I es cerrado $I = I_F$.□

Ejercicio 4 *Si I es un ideal maximal de $C(K)$, entonces existe $x \in K$, tal que $I = I_x := \{f \in C(K) : f(x) = 0\}$*

Ejercicio 5 *Si $f \in C(K)$, entonces $\sigma_A(f) = Im(f)$.*

V.2 Álgebras abelianas y el espectro de caracteres

Definición V.13 *Si A es un álgebra de Banach abeliana (i.e. el producto es conmutativo), se llamará espectro de A (ahora se notará χ_A) al siguiente subconjunto de A^* (probaremos la continuidad más adelante):*

$$\chi_A = \{h : A \mapsto \mathbb{C} \text{ es un morfismo de álgebras } ; h(1) = 1\}$$

A sus elementos los denominaremos caracteres.

Hay una correspondencia biunívoca entre ideales maximales y caracteres, dada por $h \overset{\theta}{\mapsto} Ker(h)$. Siempre el núcleo de un caracter es un ideal maximal, puesto que si $h(x) \neq 0$, entonces $1 - \frac{x}{h(x)}$ pertenece al núcleo de h, y $1 = (1 - \frac{x}{h(x)}) + \frac{1}{h(x)}x$. Además, como los caracteres son en particular funciones lineales, su núcleo es un subespacio maximal.

Por la discusión anterior, $\chi_A \subset A^*$, puesto que los ideales maximales son cerrados. Pero puede afirmarse más, y es que $\chi_A \subset \delta B_{A^*}$ (La cáscara de la bola unitaria de A^*). Si un caracter h tuviese norma mayor que 1, entonces existiría x tal que $|h(x)| > \|x\|$; con lo cual el elemento $1 - \frac{x}{h(x)}$ sería inversible (por V.1.1), y esto es una contradicción pues pertenece al núcleo de h. Como pedimos además que $h(1) = 1$ resulta que $\|h\| = 1$.

La aplicación θ es inyectiva, ya que como $1 \notin Ker(h)$ y $Ker(h)$ es maximal como subespacio, entonces $A = Ker(h) + \langle 1 \rangle$ (En el sentido de $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales), y entonces si $Ker(h) = Ker(j)$, y además $h(1) = j(1) = 1$, h y j conciden en todo A, es decir, $h = j$.

Para ver que θ es suryectiva, bastará construirse un caracter cuyo núcleo sea un ideal M maximal dado. Para ello, observemos que el cociente A/M es al mismo tiempo de división (por ser M maximal) y un álgebra de Banach (por ser M cerrado). Por el teorema de Gelfand-Mazur (V.10) $A/M \cong \mathbb{C}$, y entonces $\pi : A \mapsto A/M \cong \mathbb{C}$ (la proyección al cociente) es el caracter precisado.

Claramente un ideal que es maximal como subespacio es maximal como ideal, pero es interesante observar que como corolario del resultado anterior, todo ideal maximal en un álgebra de Banach es maximal como subespacio.

Ahora tenemos una nueva caracterización de $A^\bullet$: los inversibles son los que no pertenecen al núcleo de ningún caracter, ya que x es inversible si y sólo si x no pertenece a ningún ideal maximal.

Ejercicio 6 *Caracterizar $\chi_{C(K)}$, con K un espacio topológico compacto.*

V.3 La transformada de Gelfand

Definición V.14 *Se define la transformada de Gelfand de $x \in A$ como la función $\hat{x}$: $\chi_A \longmapsto \mathbb{C}$ definida por $\hat{x}(h) = h(x)$. La función $\hat{x}$ es continua (tomando a χ_A con la topología $\sigma(A^*, A)$ de A^*) pues es la restricción a χ_A de la vieja funcional $\widetilde{x}$ de A^{**}.*

Definición V.15 *Se define la transformada de Gelfand de A como la función $^\wedge : A \longmapsto C(\chi_A)$ definida por $^\wedge(x) := \hat{x}$. La función $^\wedge$ es un homomorfismo de álgebras continuo, ya que $\left|\hat{x}(h)\right| = |h(x)| \leq \|x\|$, entonces $\left\|\hat{x}\right\|_\infty \leq \|x\|$ con lo cual $\|^\wedge\| \leq 1$. Como además $\overset{\wedge}{1}(h) = h(1) = 1$ resulta que $\|^\wedge\| = 1$.*

Sabemos para un álgebra cualquiera A que si h es un carácter de A y x un elemento cualquiera de A, entonces $x - h(x)$ resulta no inversible pues pertenece al núcleo de h y entonces $h(x) \in \sigma(x)$. Recíprocamente, si $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $\lambda - x$ no es inversible y por lo tanto pertenece al núcleo de algún h, de ahi sigue que $\lambda = h(x)$. Entonces tenemos que la *transformada de Gelfand* de x es una función suryectiva de χ_A en $\sigma(x)$.

Podemos encontrar exactamente quien es $\left\|\hat{x}\right\|_\infty$:

$$\begin{aligned}\left\|\hat{x}\right\|_\infty &= \sup\{\hat{x}(h) : h \in \chi_A\} \\ &= \sup\{h(x) : h \in \chi_A\} \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}\end{aligned}$$

Definición V.16 *Si $A = B(E)$, esta cantidad se conoce como* **radio espectral del operador** *x. Definiremos para x en un álgebra de Banach, $r(x) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$*

V.4 Teorema de la aplicación espectral

Al igual que en $B(E)$ y con idéntica demostración, si p es un polinomio de coeficientes complejos, y $x \in A$ un álgebra de Banach, $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$.

V.5 Fórmula del radio espectral

Probaremos que $r(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma_A(x) &\Rightarrow \lambda^n \in \sigma_A(x^n) \qquad \text{(Por el teorema de la aplicación espectral)} \\ &\Rightarrow |\lambda|^n \le r(x^n) \le \|x^n\| \\ &\Rightarrow |\lambda| \le \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &\Rightarrow r(x) \le \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &\Rightarrow r(x) \le \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Quisieramos ver que $r(x) \ge \limsup\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ con lo cual quedaría demostrado que el límite existe y que $r(x)$ es igual a él.

Para ello se utilizarán como argumento teoremas de series complejas en sus versiones a valores vectoriales.

Consideremos $U = \{z \in \mathbb{C}: |z| > r(x)\}$ y $\varphi(z) = (z - x)^{-1}$en U, con su consiguiente desarrollo de Laurent en la misma región: $\varphi(z) = \sum\limits_{n\ge0} \frac{a_n}{z^n}$. También vale que $\varphi(z) = \sum\limits_{n\ge0}$

$\frac{x^{n-1}}{z^n}$ (serie geométrica) bien definida en $|z| > \|x\|$. Por la unicidad del desarrollo de Laurent en el dominio $\{z : |z| > \|x\|\}$, los coeficientes de las series tienen que coincidir y se deduce que $x^{n-1} = a_n$ y por lo tanto podemos extender la validez de la segunda igualdad $\varphi(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^{n-1}}{z^n}$ a la región U de la primera. Pero ahora, podemos usar la fórmula de Hadamard que dice que la serie diverge para $|z| < \limsup\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ y entonces $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$.

V.6 El espectro y la distancia Haussdorff

El estudio del espectro σ, que está estrechamente ligado al de las álgebras de Banach y de operadores, puede pensarse como una simplificación del estudio del enorme objeto $A^\bullet$. Identificando a $\mathbb{C}$ como la copia del plano complejo incluida en A (mediante $\lambda \mapsto \lambda 1_A$), resulta que $\sigma_A(x) = ((A^\bullet)^c + x) \cap \mathbb{C}$, ya que

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_A(x) \quad &\Leftrightarrow x - \lambda \notin A^\bullet \\ &\Leftrightarrow k = \lambda - x \in (A^\bullet)^c \\ &\Leftrightarrow \lambda = k + x \text{ con } k \in (A^\bullet)^c. \end{aligned}$$

O sea que el espectro no es mas que una fina (unidimensional) tajada bien elegida de $(A^\bullet)^c$. Por eso, cuando estudiamos el espectro complejo como función del operador (la función $\sigma_A : A \to$**Subconjuntos**$(\mathbb{C})$) no debemos asombrarnos de que su comportamiento parezca obedecer a leyes externas, simplemente estamos viendo una pequeña porción de la realidad (sin ir mas alla de las tres dimensiones, imaginemos el asombro de un ser bidimensional al observar como sumergimos (en forma suave) nuestro dedo cilindrico en su mundo plano). Por ejemplo, es posible encontrar una sucesión de operadores cuyo espectro conste de un único punto, que tiendan a un operador con un espectro más grande (ver ejemplo más adelante).

La distancia de Haussdorff h es una métrica en el espacio $\mathcal{H}(X)$ de los conjuntos compactos (no vacíos) de un cierto espacio métrico (X, d) completo. Esta distancia sigue una idea bien intuitiva respecto de la cercanía o lejanía de los compactos (en realidad, también de la similitud y diferencia entre ellos) y por ejemplo la distancia entre dos puntos es la misma distancia original de X.

Puede probarse además que el espacio métrico $(\mathcal{H}(X), h)$ es completo y es rico en propiedades. Para una referencia completa, véase [Barnsley].

Si G, K son dos compactos no vacíos de X, la distancia h entre ellos se define de la siguiente manera:

$$h(G, K) = \max\{\max_{x\in K} d(x, G), \max_{y\in G} d(y, K)\}$$

Es claro que h queda bien definida así, que es simétrica y que $h(G,K)=0$ si y sólo si $G=K$. La demostración de la desigualdad triangular, en cambio, no es tan sencilla.

Sean $A,B,C\in\mathcal{H}(X)$. Tenemos que, para $a\in A$,

$$\begin{aligned}
d(a,C) &= \min_{c\in C} d(a,c)\\
&\le \min_{c\in C}\{d(a,b)+d(b,c)\}\forall b\in B\\
&= d(a,b)+\min_{c\in C} d(b,c)\\
\text{Entonces } d(a,C) &\le \min_{b\in B} d(a,b)+\min_{b\in B} d(b,C)\\
&\le d(a,B)+\max_{b\in B} d(b,C)\\
\text{Ahora } \max_{a\in A} d(a,C) &\le \max_{a\in A} d(a,B)+\max_{b\in B} d(b,C)
\end{aligned}$$

Similarmente (intercambiando A con C)

$$\max_{c\in C} d(c,A) \le \max_{c\in C} d(c,B)+\max_{b\in B} d(b,A)$$

De lo cual se deduce que

$$\begin{aligned}
h(A,C) &\le \max\{\max_{a\in A} d(a,B)+\max_{b\in B} d(b,C),\max_{b\in B} d(b,A)+\max_{c\in C} d(c,B)\}\\
&\le \max\{\max_{a\in A} d(a,B),\max_{b\in B} d(b,A)\}+\max\{\max_{c\in C} d(c,B)+\max_{b\in B} d(b,C)\}\\
&= h(A,B)+h(B,C)
\end{aligned}$$

El siguiente lema quiza aclare un poco la idea geometrica de la distancia Haussdorff:

Lema V.17 $A,B\in\mathcal{H}(X)$, $\epsilon>0$. *Entonces* $h(A,B)\le\epsilon$ *si y sólo si* $A\subset B+\epsilon$ *y* $B\subset A+\epsilon$. *(Donde* $B+\epsilon$ *refiere a* $\bigcup_{x\in B} B_\epsilon[b]$ *o equivalentemente* $\{x\in X : d(x,B)\le\epsilon\}$*)*

Demostración:

Primero supongamos que $h(A,B)\le\epsilon$. Entonces $\max_{a\in A} d(a,B)\le\epsilon$, con lo cual si $a\in A$, $d(a,B)\le\epsilon$ y entonces $A\subset B+\epsilon$. Simétricamente, $B\subset A+\epsilon$.

Ahora supongamos $A\subset B+\epsilon$ y sea $a\in A$. Claramente, existe $b\in B$ tal que $d(a,b)\le\epsilon$, con lo cual $d(a,B)\le d(a,b)\le\epsilon$. Entonces $\max_{a\in A} d(a,B)\le\epsilon$. Suponiendo $B\subset A+\epsilon$, deduciremos $\max_{b\in B} d(b,A)\le\epsilon$.$\square$

Pretendemos encontrar ahora algunas relaciones entre la distancia Haussdorff entre espectros de operadores y la distancia usual entre los operadores mismos provista por la norma. Por ejemplo, uno quisiera que si $a_n \to a$, entonces $\sigma_A(a_n) \to \sigma_A(a)$.

Podemos asegurar que si $\lambda_n \in \sigma(a_n)$ y $\lambda_n \to \lambda$, entonces $\lambda \in \sigma(a)$, puesto que $(\lambda_n - a_n)$ converge a $(\lambda - a)$ y éste último no puede ser a la vez inversible y límite de no inversibles ($A^\bullet$ es abierto).

Profundizando un poco más, podemos conseguir una suerte de continuidad lateral en $H(X)$; esto es: dado $\epsilon > 0$ y $a \in A$, existe δ tal que $\|a - b\| < \delta \Rightarrow \sigma(b) \subset \sigma(a) + B_\epsilon$.

Supongamos que $|x - \lambda| \geq \epsilon, \forall \lambda \in \sigma(a)$. Claramente, $a - x \in A^\bullet$.Por V.4, resulta que si $\|(a-x)-(b-x)\| = \|a-b\| < \frac{1}{\|(a-x)^{-1}\|}$; entonces $b - x$ es inversible; y por lo tanto $x \notin \sigma(b)$. Como nosotros queremos una cota uniforme en x, veamos que $\inf\limits_{x \notin \sigma(a)+\epsilon} \frac{1}{\|(a-x)^{-1}\|} > 0$. Para eso, estudiemos la función $f : (\sigma(a) + B_\epsilon)^c \to \mathbb{R}$. Definida por $f(x) = \frac{1}{\|(a-x)^{-1}\|}$. Está bien definida porque $x \notin \sigma(a)$, y es continua por ser composición de continuas. Si $|x| > \|a\|$, por V.1.1, $\|(\frac{a}{x} - 1)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|(\frac{a}{x}\|}$ y entonces $f(x) = \frac{1}{\|(a-x)^{-1}\|} \geq |x| - \|a\|$, y por lo tanto $f(x) \underset{x\to\infty}{\to} \infty$. Como su dominio es cerrado, f alcanza un mínimo, y éste no puede ser cero.□

Para que $h(\sigma(b), \sigma(a)) < \epsilon$, sería necesario que además $\sigma(a) \subset \sigma(b) + B_\epsilon$.

Ejercicio 7 *Pruebe que si $a_n, a \in A$ álgebra de Banach, $a_n \to a$ y $\sigma(a) = \{x\}$, entonces $\sigma_A(a_n) \to \sigma_A(a)$*

Aunque un ejemplo para la no continuidad estricta del espectro no pareciera ser fácil de encontrar, tenemos uno, debido a Kakutani, en el que $a_n \to a$, las a_n son todas nilpotentes (y por ende $\sigma(a_n) = \{0\}$) y $\sigma(a) \neq \{0\}$:

Ejemplo 79 *Definamos primero $\alpha_m = e^{-k}$, si $m = 2^k(2s+1)$. Como esta descomposición es única, el operador A queda bien definido si ponemos $Af_m = \alpha_m f_{m+1}$, donde f_n es la base canónica de l^2.*

Como $\alpha_m = 1$ si m es impar (pues $m = 2^0(2s+1)$), y $k > 0$ implica $\alpha_m < 1$, entonces $\|A\| \leq \sup_{m\geq 1} \alpha_m = 1$.

Además, $\alpha_{2m} = e^{-1}\alpha_m$

Calculemos el radio espectral de A :

$A^n f_m = A^{n-1}(\alpha_m f_{m+1}) = A^{n-2}(\alpha_m \alpha_{m+1} f_{m+2}) = ... = (\alpha_m \alpha_{m+1} ... \alpha_{m+n-1}) f_{m+n}$

$$\begin{aligned}\left\|A^{2^t-1}f_1\right\| &= \alpha_1\alpha_2...\alpha_{2^t-1}\\ &= \alpha_2\alpha_4...\alpha_{2^t-2}\\ &= e^{-(2^{t-1}-1)}\alpha_1\alpha_2...\alpha_{2^{t-1}-1}\\ &= e^{-(2^{t-1}-1)}e^{-(2^{t-2}-1)}...e^{-(2^0-1)}\\ &= e^{t-\sum\limits_{k=0}^{t-1}2^k}\\ &= e^{t-2^t+1}\end{aligned}$$

Ahora $\left\|A^{2^t-1}\right\| = \sup\limits_{m\in N}\left\|A^{2^t-1}f_m\right\| \geq \left\|A^{2^t-1}f_1\right\| = e^{t-2^t+1}$, *y entonces*

$\limsup \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \geq \limsup\left\|A^{2^t-1}\right\|^{\frac{1}{2^t-1}} = \limsup e^{\frac{t-2^t+1}{2^t-1}} = e^{-1}$. *Por lo tanto,* $r(A) \geq e^{-1}$. *En particular,* $\sigma(A) \neq \{0\}$.

Ahora, definamos A_k *por*

$$A_k f_m = \begin{cases} 0 & si\ m = 2^k(2^l+1) \\ e^{-k}f_{m+1} & si\ m \neq 2^k(2^l+1)\end{cases}$$

$A_k f_m = 0$ *si* $m = 2^k(2^l+1)$, $A_k f_m = \alpha_m f_{m+1}$ *si* $m \neq 2^k(2^l+1)$. *Es fácil ver que* $A_k^{2^{k+1}} = 0$, *y por lo tanto,* $\sigma(A_k) = \{0\}$.

Veamos que $A_k \to A$.

$$(A-A_k)f_m = \begin{cases} e^{-k}f_{m+1} & si\ m = 2^k(2^l+1) \\ 0 & si\ m \neq 2^k(2^l+1)\end{cases}$$

Sea $x \in l^2$, $x = \sum x_m f_m$. *Entonces*

$$\begin{aligned}
\|(A-A_k)x\|^2 &= \left\|\sum_m x_m(A-A_k)f_m\right\|^2 \\
&= \left\|\sum_l x_{2^k(2l+1)}e^{-k}f_{2^k(2l+1)+1}\right\|^2 \\
&= e^{-2k}\left\|\sum_l x_{2^k(2l+1)}\right\|^2 \\
&\le e^{-2k}\|x\|^2
\end{aligned}$$

Es interesante ver que el ejemplo de Kakutani no fue elegido inútilmente en un espacio de dimensión infinita. Probaremos que en un espacio de Banach de dimensión $N<\infty$, la convergencia de los operadores implica la convergencia de sus espectros en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Sea A un espacio de dimensión finita ($\dim A = N < \infty$) y sean $a_n, a : A \mapsto A$ operadores lineales (y por lo tanto acotados, ver I.40). Como en un espacio de dimensión finita las transformaciones lineales estan determinadas por su matriz en alguna base, fijada una base el espacio de las matrices de $n \times n$ y el de los operadores lineales son isométricamente isomorfos. Abusando un poco de la notación, fijaremos de una vez una base (arbitraria) y llamaremos con un mismo nombre a una y a la otra. Tenemos entonces que $\lambda \in \sigma_A(a)$ si y sólo si $\chi_a(\lambda) := \det(a-\lambda) = 0$. Entonces, el estudio del espectro en espacios de dimensión finita se reduce al de encontrar ceros de polinomios.

Observemos primero que en el espacio normado de polinomios de grado menor o igual a n restringidos a un compacto K de $\mathbb{C}$ (con la pequeña hipótesis de $\#K \ge n$), la convergencia uniforme y la convergencia coeficiente a coeficiente son la misma, pues ambas provienen de normas y el espacio tiene dimensión finita (ver I.42). Asimismo, en el espacio de matrices de $n \times n$, la convergencia coeficiente a coeficiente y la convergencia en norma (con la norma de operadores) también son equivalentes.

Como $a_n \to a$, $\|a_n\|$ está acotada. Además, está claro que $\{\lambda : \chi_{a_n}(\lambda) = 0\} = \chi_A(a_n) \subset B_{\|a_n\|}$. Teniendo en cuenta esto, para el análisis de los ceros podremos restringirnos al compacto $K = \overline{B}_{1+\max\{\|a_n\|_{n\in\mathbb{N}}, \|a\|\}}$.

Como $\chi_a(\lambda)$ es un polinomio cuyos coeficientes son a su vez polinomios en los coeficientes de la matriz a, y como $a_n \to a$ en norma entonces tiende coeficiente a coeficiente, resulta que $\chi_{a_n}(\lambda) \longrightarrow \chi_a(\lambda)$ coeficiente a coeficiente, y ahora, por la discusión anterior, también uniformemente en K.

Ahora dado λ_0 tal que $\chi_a(\lambda_0) = 0$ podemos elegir $r_0 > 0$ tal que en B_{r_0}, $\chi_a(\lambda)$ se anule sólo en λ_0, puesto que la cantidad de ceros es finita. Claramente, la propiedad anterior seguirá cumpliéndose en $r' < r_0$. Por lo tanto, podemos elegir un r_1 tal que para todo $r < r_1$ la propiedad se cumpla para cada uno de los ceros de χ_a. Sea ahora un $r < r_1$.

La teoría de funciones analiticas [Ahlfors][p176] asegura que si existe una sucesión de funciones analíticas no nulas convergiendo uniformemente en un compacto K a una función f , entonces el límite f es analítico y no nulo en K o bien constantemente nulo.

En nuestro caso $\chi_{a_n}(\lambda)$ no pueden no anularse todas en B_r, y por lo tanto, no pueden tener ninguna subsucesión tal que cada término sea no nulo en B_r (pues aquella subsucesión estaría en las condiciones de la anterior) o lo que es lo mismo, se anulan todas en algún punto de B_r para $n \geq n_0$. Haciendo lo propio para todos los ceros de χ_a y eligiendo n_1 el mayor de todos los n_0 resulta que $\sigma_A(a) \subset \sigma_A(a_n) + r$ para todo $n \geq n_1$.

V.7 La dependencia del espectro

Supongamos que B es una subálgebra de A, y tenemos un elemento $b \in B$. Claramente, en B hay menos elementos $B-$inversibles (o sea, con inversa en B) que $A-$inversibles; en signos, $A^\bullet \cap B$ no es $B^\bullet$ y la única desigualdad que válida en general es $A^\bullet \cap B \supset B^\bullet$. Resulta por lo tanto que $\sigma_B(b) \supset \sigma_A(b)$ es lo único que se puede afirmar. (Búsquese un ejemplo). Pero lo que puede resultar asombroso es que $\delta\sigma_B(b) \subset \delta\sigma_A(b)$, es decir que lo que tiene de más $\sigma_B(b)$ lo consiguió *rellenando huecos* de $\sigma_A(b)$.

Si K es un compacto de $\mathbb{C}$, definamos a los *huecos* de K como las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C}\backslash K$.

Sea $\lambda \in \delta\sigma_B(b)$. Alcanza con probar que $\lambda \in \sigma_A(b)$, pues si $\lambda \in \sigma_A(b)^\circ \subset \sigma_B(b)^\circ$, resulta $\lambda \in \sigma_B(b)^\circ \cap \delta\sigma_B(b)$, que es absurdo.

Supongamos que $\lambda \notin \sigma_A(b)$. Entonces $b - \lambda \in A^\bullet$. Por estar en la frontera de $\sigma_B(b)$, $\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$, con $\lambda_n \notin \sigma_B(b)$. Ahora, $b - \lambda_n \in B^\bullet \subset A^\bullet$, y $(b - \lambda_n) \overset{n\to\infty}{\to} (b - \lambda)$ en A y entonces $B \ni (b - \lambda_n)^{-1} \overset{n\to\infty}{\to} (b - \lambda)^{-1}$en A. Como B es cerrada, resulta que $(b - \lambda)^{-1} \in B$, pero $\lambda \in \delta\sigma_B(b) \subset \sigma_B(b)$, lo que es contradictorio.

Si U es un hueco de $\sigma_A(b)$ entonces o bien $U \cap \sigma_B(b) = \emptyset$ (en cuyo caso es un hueco de B) o bien $U \subset \sigma_B(b)$.

$U_1 = U\cap\, \sigma_B(b)$ que es abierto, pues

$$\begin{aligned} U \cap \sigma_A(b) = \emptyset \qquad &\Rightarrow U \cap \partial\sigma_B(b) = \emptyset \\ &\Rightarrow U_1 = U \cap \sigma_B(a)^\circ \end{aligned}$$

Definniendo $U_2 = U\backslash\, \sigma_B(b)$ resulta abierto, y como U es conexo, $U_1 = \emptyset$ ó $U_2 = \emptyset$.

Ahora, sería razonable pensar que mirando el espectro de a en la mínima álgebra que lo contiene (esto es la clausura de $\{p(a) : p \in\mathbb{C}[X]\}$) resulte el máximo espectro posible, es decir uno que no tenga huecos. En efecto, probaremos que si $B = \overline{\{p(a) : p\ \in \mathbb{C}[X]\}}$, entonces $\sigma_B(a)$ no tiene huecos.

Diremos que un conjunto A es simplemente conexo si no tiene huecos, es decir si $\mathbb{C}\backslash A$ es conexo (Nota: no pediremos que el conjunto mismo sea conexo. A veces suele incluirse esta condición en la definición de simplemente conexo). Dado un compacto cualquiera K, definiremos la cápsula simplemente conexa $\hat{K}$ como el mínimo (en el sentido de inclusión) conjunto simplemente conexo que contenga a K (la existencia quedará probada en el próximo párrafo)

Probemos que $\hat{K}=\mathbb{C}\setminus U$, donde U es la única componente no acotada de $\mathbb{C}\setminus K$. Claramente $\mathbb{C}\setminus U$ es simplemente conexo, ya que su complemento U es conexo. Si $x \in U_1$ una componente conexa acotada de $\mathbb{C}\setminus K$ no perteneciera a $\hat{K}$, entonces la separación por abiertos $\mathbb{C}\setminus \hat{K}\subset U_1 \cup (\mathbb{C}\setminus U_1)$ sería no trivial y en consecuencia $\mathbb{C}\setminus \hat{K}$ no sería conexo.

Ahora precisaremos una nueva caracterización de $\hat{K}$.

Lema V.18 $\hat{K}= \{z \in\mathbb{C}\colon |p(z)| \leq \|p\|_K$ *para todo* $p \in\mathbb{C}[X]\} := K^p$

Demostración:

Al conjunto mencionado se lo llama a veces cápsula polinómica de K. Supongamos primero que B es una componente conexa acotada de $\mathbb{C}\setminus K$. Es claro que $\partial B \subset K$. Usando el principio del máximo de funciones analíticas, si $z \in B$,entonces $|p(z)| \leq \sup_{x\in B} |p(x)| = \sup_{x\in\partial B} |p(x)| \leq \sup_{x\in K} |p(x)|$, con lo cual $B \subset K^p$. Haciéndolo para las demás componentes conexas acotadas, concluimos que $\hat{K}\subset K^p$. Ahora sea $w \in U$ (la componente no acotada). La función $\frac{1}{z-w}$ es continua y acotada en un entorno de $\hat{K}$ (quitando un entorno de w), y entonces hay una sucesión de polinomios p_n tales que $\left\|p_n - \frac{1}{z-w}\right\|_{\hat{K}} \to 0$, tomando $q_n = (z-w)p_n$, resulta que $\|q_n - 1\|_K \to 0$, y para n suficientemente grande, $|q_n(w) - 1| < \|q_n - 1\|_K$, con lo cual $w \notin K^p$. Entonces, $K^p \subset\hat{K}$.

Tenemos ahora las herramientas para probar que si $B = \overline{\{p(a) : p \text{ polinomio complejo}\}}$, entonces $\sigma_B(a) = \widehat{\sigma_A(a)}$ (y en consecuencia no tiene huecos)

Tomemos $\lambda \in \widehat{\sigma_A(a)}\setminus\sigma_B(a)$. El elemento $(a - \lambda)^{-1} \in B$, y entonces existe polinomios p_n tales que $p_n(a) \to (a-\lambda)^{-1}$. Sea $q_n = (z-\lambda)p_n(z)$. Entonces, $\|q_n(a) - 1\| \to 0$. Ahora

$$\begin{aligned}
\|q_n(a) - 1\| &\geq r(q_n(a) - 1) \\
&= \sup_{z\in\sigma_A(q_n(a))} |z - 1| \qquad \text{(teorema de la aplicación espectral)} \\
&= \sup_{z\in q_n(\sigma_A(a))} |z - 1| \\
&= \sup_{t\in\sigma_A(a)} |q_n(t) - 1| \qquad \lambda \in \widehat{K} = K^p \\
&\geq |q_n(\lambda) - 1| = 1
\end{aligned}$$

Lo cual es un absurdo.□

V.8 Álgebras con un generador

En esta sección agregaremos, a fin de profundizar el estudio del espectro, una fuerte condición a nuestra álgebra A: la de ser monogenerada. Un algebra de Banach A se dice monogenerada si es dueña de un elemento *generador* a que verifica que el conjunto $\{p(a) : p \in \mathbb{C}[X]\}$ es denso en A.

Rápidamente el lector podrá generalizar un poco los resultados a álgebras sin un generador observando la relación entre el espectro en un álgebra y en sus subálgebras explicado más arriba. Pero un poco más adelante eliminaremos de raíz el problema a costa de restringirnos a las álgebras C^*. Esta última aproximación, si bien nos sigue dejando en el área de estudio a los $\mathcal{B}(H)$ (de que otro modo podría ser), no abarca mucho más: puede demostrarse que toda álgebra C^* es una subálgebra cerrada de algún $\mathcal{B}(H)$. Si nos restringimos sólo a las álgebras C^* conmutativas, en cambio, nos quedamos con espacios equivalentes a $C(K)$. Estos dos resultados se conocen como teoremas de Gelfand-Neimark y de Gelfand-Neimark conmutativo; presentaremos luego la demostración del último.

Una de las ventajas inmediatas de tener un generador es que ahora tratamos con un álgebra conmutativa (puesto que los polinomios en a conmutan, es inmediato ver que la clausura es también conmutativa).

Otra ventaja es que ahora podemos caracterizar al espectro del álgebra usando el espectro de su generador. De hecho, veremos que resultan homeomorfos topológicamente (χ_A con la topología $\sigma(A^*, A)$ heredada de A^*, $\sigma_A(a)$ con la topología de $\mathbb{C}$.)

Intentaremos probar que la función continua $\phi : \chi_A \longrightarrow \sigma(a)$ definida por $\phi(h) = \hat{a}(h) = h(a)$, la *transformada de Gelfand de* a (donde a es el elemento generador de A), es un homeomorfismo topológico. Ya sabemos que es continua y suryectiva (ver transformada de Gelfand, arriba).

Para demostrar que es inyectiva tendremos que usar que A es generada por a: si $h(a) = k(a)$, $h(p(a)) = k(p(a))$ para todo polinomio p, y entonces h y k coinciden en un denso.

Como χ_A es cerrado adentro de B_{A^*} (Si $\chi_A \ni h_\alpha \longrightarrow f, h_\alpha(x.y) \longrightarrow f(x.y)$ y entonces $h_\alpha(x.y) = h_\alpha(x).h_\alpha(y) \longrightarrow h(x)h(y)$ donde la convergencia es en el sentido de redes) y al ser B_{A^*} compacto (Alaoglu) resulta χ_A también $\sigma(A^*, A)$-compacto. Si C es cerrado dentro de χ_A, es compacto y entonces $\phi(C)$ es compacto y vuelve a ser cerrado en $\sigma_A(x)$; por lo tanto ϕ resulta cerrada, y en consecuencia ϕ^{-1} continua.

Ejercicio 8 *Caracterizar χ_A con A el álgebra del disco (ver ejemplo arriba). Deducir una caracterización de los ideales maximales de A.*

Ejercicio 9 *Pruebe que si $a, a_n \in A$, con A un álgebra con generador, y $a_n \to a$, entonces $\sigma(a_n) \to \sigma(a)$*

VI
ÁLGEBRAS C*

VI.1 Generalidades

Definición VI.1 *Un álgebra C^* es un álgebra de Banach dotada de una nueva operación, llamada involución y denotada por $^* : A \longmapsto A$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned}
(\lambda a + b)^* &= \overline{\lambda} a^* + b^* \\
(a^*)^* &= a \\
(ab)^* &= b^* a^* \\
\|a^* a\| &= \|a\|^2 \\
1^* &= 1
\end{aligned}$$

Siempre debemos tener en cuenta que esta estructura es una simple generalización de $\mathcal{B}(H)$: ahora tenemos casi todos los elementos para hacer la analogía; podremos definir, a semejanza de $\mathcal{B}(H)$, los términos *autoadjunto, unitario, positivo, normal.* Tenemos algunos ejemplos clásicos:

Ejemplo 80 *$\mathcal{B}(H)$ H espacio de Hilbert con la composición como producto. * está definida como tomar el adjunto*

Ejemplo 81 *$C(K)$ donde K es compacto. $\psi^*(t) = \overline{\psi(t)}$.*

Ejemplo 82 *Subálgebra cerrada y $^*-$cerrada de un $\mathcal{B}(H)$, por ejemplo*

Ejemplo 83 $C^*(a) := \overline{\{p(a,a^*) : p \in \mathbb{C}[X,Y]\}} \subset A$ *álgebra* C^*.

Este último resulta de vital importancia, y es nuestro reencuentro con las álgebras monogeneradas (sólo que ahora *generar* implica realizar una operación más, la *). Un problema es que para seguir teniendo la ventaja de ser conmutativa de las álgebras monogeneradas debemos agregar la condición de normalidad del generador (es decir: $a^*a = aa^*$). Pero tenemos otro problema, y es que, segun la definición anterior, nuestra álgebra no es más monogenerada: ¿seguirá teniendo validez la afirmación de que χ_A es homeomorfo a $\sigma(a)$? La respuesta es sí, y el razonamiento muy similar. Lo único que está en duda es si $\widehat{a}$ es inyectiva, pues nada en la demostración V.8 de que es cerrada es restrictivo para las monogeneradas.

Supongamos que existen h y k tales que $\widehat{a}(h) = \widehat{a}(k)$, o sea $h(a) = k(a)$. Entonces $h(a)^* = k(a)^*$ y $h(a^*) = k(a^*)$ y ahora h y k coinciden en $\{p(a,a^*) : p \in\mathbb{C}[X,Y]\}$ que es denso en A.

VI.2 Otra vez el radio espectral

Ahora en un álgebra C^*, si x es autoadjunto ($x^* = x$), entonces $r(x) =\|x\|$. Porque - $\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|x^2\|$, y como x^2 también es autoadjunto, resulta que $\|x\|^{2^n} = \|x^{2^n}\|$, y usando la fórmula del radio espectral, queda que $r(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|x\|$.

VI.3 Teorema de Gelfand-Neimark conmutativo

Teorema VI.2 *Si A es un álgebra C^* conmutativa, la transformada de Gelfand es un isomorfismo de álgebras C^* (es decir un isomorfismo de álgebras que preserva la involución $*$, también se lo llama *-isomorfismo). Este resultado (al que hacíamos referencia anteriormente) nos dice que las álgebras C^* conmutativas son isométricamente *-isomorfas a algún $C(K)$ con K compacto de $\mathbb{C}$.*

Demostración:

La demostración consta de cuatro partes: primero probaremos que para $x^* = x, \sigma(x) \subset$R. Segundo, que un elemento a cualquiera de A tiene una descomposición en 'parte real y parte imaginaria', es decir que $a = x + iy$, con $x^* = x$ y $y^* = y$. Teniendo esto, será fácil probar que $\wedge$ conserva la *. Por último probaremos que es una isometría y que es suryectiva en $C(\chi_A)$.

Sea x un elemento autoadjunto. Definimos $u_t(x) = e^{itx} := \sum\limits_{n\in N} \frac{(itx)^n}{n!}$. Dado que A es conmutativa, podemos probar que es unitario cualquiera sea t real, pues $u_t(x)u_t(x)^* = u_t(x) \sum\limits_{n\in\mathbb{R}} \frac{(-itx^*)^n}{n!} = u_t(x)u_t(-x)$; y ahora el producto formal de las series (para A conmutativa!) nos dice que $e^x e^y = e^{x+y}$. Entonces, teniendo que $\|u_t\| = 1$ se sigue que, dado $h \in \chi_A$, $e^{tRe(ih(x))} = \left|e^{ith(x)}\right| = \left|e^{ith(x)}\right| = |h(u_t)| \leq 1$ para todo t real. Entonces, $Re(ih(x))$ tiene que ser cero, con lo cual $h(x) \in\mathbb{R}$.

Sea $a \in A$. Como en los números complejos y como en $B(H)$, podemos definir $Re(a) = \frac{a+a^*}{2}$ y $Im(a) = \frac{a-a^*}{2i}$. Rápidamente se puede verificar que $a = Re(a) + iIm(a)$, y que $Re(a)$ y $Im(a)$ son ambos autoadjuntos.

Ahora, si $h \in \chi_A$, $h(a^*) = h(Re(a^*)) + ih(Im(a^*)) = h(Re(a)) + h(-Im(a)) = \overline{h(a)}$.

a^*a es autoadjunto, y entonces

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &= \|a^*a\| \\ &= r(a^*a) \\ &= \sup_{h\in\chi_A} \{|h(a^*a)|\} \\ &= \sup_{h\in\chi_A} \{\left|\widehat{(a^*a)}(h)\right|\} \\ &= \left\|\widehat{a^*a}\right\|_\infty \\ &= \left\|\widehat{a^*}\widehat{a}\right\|_\infty \\ &= \left\|\overline{\widehat{a}}\widehat{a}\right\|_\infty \\ &= \|\widehat{a}\|_\infty^2 \end{aligned}$$

. En otras palabras, la transformada de Gelfand es isométrica.

Por fin, $Im(\wedge) = \{\widehat{a} : a \in A\} \subset C(\chi_A)$ es una subálgebra que separa puntos (si $h \neq g$, existe b tal que $h(b) \neq g(b)$, $\widehat{b}$ separará h de g); por el teorema de Stone Weierstrass es densa, y por ser $\wedge$ isométrica, resulta cerrada.

VI.4 La independencia del espectro

Afirmabamos para un álgebra de Banach A y una subálgebra B, que en general $B^\bullet \subset A^\bullet \cap B$ estrictamente. En un álgebra C^*, la situación es diferente: B es una $*-$subágebra de A un álgebra C^*, entonces $B^\bullet = A^\bullet \cap B$, y por lo tanto $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$ para cualquier $b \in B$.

Si $b \in A^\bullet \cap B$, entonces b^* también. Como $(b^*b)^{-1}b^*b = 1$, entonces $(b^*b)^{-1}b^*$ es el inverso de b (y por ahora está en A). Pero si miramos la subálgebra $B_0 := C^*(b^*b)$ (ver ejemplo arriba), resulta que $\sigma_A(b^*b) \subset \sigma_{B_0}(b^*b) \subset R$ (porque b^*b es autoadjunto) y entonces $\sigma_A(b^*b)$ no tiene *agujeros* que rellenar, con lo cual $\sigma_A(b^*b) = \sigma_B(b^*b)$. Como $0 \notin \sigma_A(b^*b) = \sigma_B(b^*b)$ resulta que $b^*b \in B^\bullet$. Conseguimos demostrar que la inversa de b, $(b^*b)^{-1}b^*$ pertence a B.

Este resultado es muy importante: al menos en lo que al espectro se refiere, en algunos casos podemos suponer que nuestra álgebra es monogenerada (y por lo tanto conmutativa).

VI.5 El cálculo funcional

VI.5.1 Cálculo funcional continuo

Si A es el álgebra C^* $*$-generada por x normal, es conmutativa, y por el teorema de Gelfand-Neimark resulta que A es $*$- isomorfa a $C(\chi_A)$ a través de la transformada de Gelfand.

Por otro lado χ_A es homeomorfo a $\sigma_A(x)$, lo que induce un $*$-isomorfismo entre $C(\chi_A)$ y $C(\sigma_A(x))$. Este isomorfismo se construye simplemente componiendo: siendo $\widehat{x}$ el homeomorfismo entre χ_A y $\sigma_A(x)$, $\beta : C(\sigma_A(x)) \mapsto C(\chi_A)$ se define como $\beta(\phi) = \phi \circ \widehat{x}$.

Componiendo β con la inversa de$\widehat{\ }$conseguimos un $*$-isomorfismo Γ entre $C(\sigma_A(x))$ y A que se denominará *cálculo funcional continuo de x*. Sin suponer que el álgebra ya es la $C^*(x)$ conseguimos un $*$-isomorfismo entre $C(\sigma_A(x))$ y $C^*(x) \subset A$.

Al elemento $\Gamma(\phi)$ se lo llamará $\phi(x)$. Habría que demostrar que esta notación es coherente con la de $p(x)$ de antes pero felizmente los polinomios (y hasta las funciones analíticas) respetan el calculo funcional continuo, en el sentido de que $p(x)$ es único, no importa cual de las dos definiciones usemos. Para ello, basta ver que $\Gamma(Id) = x$, pues todo lo demás sigue de que Γ es un $*$-morfismo.

Podemos fácilmente rastrear a Id a través de Γ :

$$Id \xrightarrow{\beta} Id \circ \widehat{x} \xrightarrow{\widehat{\ }^{-1}} x$$

También extenderemos el teorema de la aplicación espectral para cualquier función continua, es decir, que $f(\sigma_A(x)) = \sigma_A(f(x))$ si x es nomal. Esto es una consecuencia directa de que el espectro no cambia por isomorfismos. Puesto que $\widehat{a}$ es un isomorfismo, resulta que $\sigma_A(f(a)) = \sigma_A(\widehat{a}(f)) = \sigma_{C(\sigma_A)}(f)$. Pero el espectro en $C(K)$ es la imagen directa, y entonces $\sigma_A(f(a)) = Im(f) = f(\sigma_A(a))$.

VI.5.2 Cálculo funcional boreliano

Sea $T \in B(H)$ normal, $x, y \in H$. Definimos la siguiente funcional lineal $L_{x,y} : C(\sigma(T)) \longmapsto \mathbb{C}$ por $L_{x,y}(\psi) =< \psi(T)x, y >$.

La funcional $L_{x,y}$ está acotada, pues $|< \psi(T)x, y >| \leq \|\psi(T)\| \, \|x\| \, \|y\| = \|\psi\|_\infty \, \|x\| \, \|y\|$. Como el dual de $C(K)$ es $M(K)$ (Teorema de Riesz-Markov), tiene que existir una $\mu_{x,y} \in M(\sigma(T))$ tal que $< \psi(T)x, y >= \int\limits_{\sigma(T)} \psi d\mu_{x,y}$. Pero ahora si fijamos ξ boreliana y acotada (y por lo tanto integrable) podemos definir una forma sesquilineal respecto de x, y acotada integrándola: $B_\xi(x, y) = \int\limits_{\sigma(T)} \xi d\mu_{x,y}$. Por el teorema de representación de Riesz, existe una única $N \in B(H)$ tal que $B_\xi(x, y) = \langle Nx, y\rangle$. Notaremos $N = \xi(T)$ y la función Ω que asigna $\xi \longmapsto \xi(T)$ se llamará cálculo funcional boreliano de T.

Nuevamente el problema de notación nos recuerda las propiedades más importantes del cálculo funcional boreliano: Ω es un $^*-$homomorfismo continuo (de norma 1) que extiende al cálculo funcional continuo. El hecho de extienda al cálculo funcional continuo surge de la definición. Para demostrarlo, notaremos mientras tanto $\psi(T)$ al cálculo continuo y $\psi[T]$ al boreliano.

Tenemos pues: dada $\psi \in C(\sigma(T)), < \psi[T]x, y >= \int\limits_{\sigma(T)} \psi d\mu_{x,y} \forall x, y$, donde $\mu_{x,y}$ es la única medida boreliana que verifica $< \phi(T)x, y >= \int\limits_{\sigma(T)} \phi d\mu_{x,y} \forall x, y$ para toda ϕ continua. En particular, $\int\limits_{\sigma(T)} \psi d\mu_{x,y} =< \psi(T)x, y >$ y entonces $< \psi(T)x, y >=.< \psi[T]x, y > \forall x, y$.

En consecuencia, si $\psi \in C(\sigma(T)), \psi(T) = \psi[T]$, es decir, el cálculo funcional boreliano extiende al cálculo funcional continuo.

Ahora vamos a caracterizar un poco estas medidas $\mu_{x,y}$ y al cálculo funcional boreliano:

Lema VI.3 $\overline{\mu_{x,y}} = \mu_{y,x}$

DEMOSTRACIÓN:

Como las funciones continuas caracterizan a las medidas borelianas, bastará comprobar que $\int\limits_{\sigma(T)} \psi d\overline{\mu_{x,y}} = \int\limits_{\sigma(T)} \psi d\mu_{y,x}$ para toda ψ continua. Pero

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\sigma(T)} \psi d\mu_{y,x} &= \langle \psi(T)y, x \rangle \\
&= \langle y, \psi(T)^* x \rangle \\
&= \left\langle y, \overline{\psi}(T)x \right\rangle \\
&= \overline{\left\langle \overline{\psi}(T)x, y \right\rangle} \\
&= \overline{\int\limits_{\sigma(T)} \overline{\psi} d\mu_{x,y}} \\
&= \int\limits_{\sigma(T)} \psi d\overline{\mu_{x,y}}. \square
\end{aligned}$$

Como consecuencia, resulta que $\mu_{x,x} \in \mathbb{R}$. Pero puede afirmarse más:

Lema VI.4 $\mu_{x,x} \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN:

Si $\psi \geq 0$, entonces $\psi = \nu^2$ con $\nu \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T)} \psi d\mu_{x,x} &= < \psi(T)x, x > \\ &= < \nu(T)\nu(T)x, x > \\ &= < \nu(T)x, \nu(T)x > \\ &= \|\nu(T)x\|^2 \geq 0.\square\end{aligned}$$

Lema VI.5 $\overline{\psi}(T) = \psi(T)^* \forall \psi \in B(\sigma(T))$.

Demostración:

$$\begin{aligned}< \overline{\psi}(T)x, y > &= \int_{\sigma(T)} \overline{\psi} d\mu_{x,y} \\ &= \overline{\int_{\sigma(T)} \psi d\mu_{y,x}} \\ &= \overline{< \psi(T)y, x >} \\ &= < x, \psi(T)y > \\ &= < \psi(T)^* x, y >\end{aligned}$$

Es decir, el cálculo boreliano conserva la involución.□

Lema VI.6 $\mu_{\psi(T)x,y} = \mu_{x,\psi(T)^* y} \forall \psi \in C(\sigma(T))$

Demostración:

Si $\nu \in C(\sigma(T))$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T)} \nu d\mu_{\psi(T)x,y} &= < \nu(T)\psi(T)x, y > \\ &= < (\nu\psi)(T)x, y > \\ &= < \psi(T)\nu(T)x, y > \\ &= < \nu(T)x, \psi(T)^* y > \\ &= \int_{\sigma(T)} \nu d\mu_{x,\psi(T)^* y}.\square\end{aligned}$$

Lema VI.7 $\psi(T)\nu(T) = (\psi\nu)(T)\forall\psi, \nu \in B(\sigma(T))$

DEMOSTRACIÓN:

Si $\psi \in C(\sigma(T))$ entonces $\mu_{\psi(T)x,y} = \psi\mu_{x,y}$ pues, si $\psi \in C(\sigma(T)), \nu \in B(\sigma(T))$ entonces

$$\begin{aligned} < \nu(T)\psi(T)x, y > &= \int_{\sigma(T)} \nu d\mu_{\psi(T)x,y} \\ &= \int_{\sigma(T)} \nu\psi d\mu_{x,y} \\ &=< (\psi\nu)(T)x, y > \end{aligned}$$

Con lo cual $\psi \in C(\sigma(T)), \nu \in B(\sigma(T))$ implica $\nu(T)\psi(T) = (\psi\nu)(T)$. Conjugando la igualdad, tenemos que $(\overline{\psi\nu})(T) = (\psi\nu)(T)^* = \psi(T)^*\nu(T)^* = \overline{\psi}(T)\overline{\nu}(T)$. Como la conjugada de una función boreliana sigue siendo boreliana y la conjugada de una continua sigue siendo continua, tenemos finalmente que $\psi \in C(\sigma(T)), \nu \in B(\sigma(T))$ implica $\psi(T)\nu(T) = (\psi\nu)(T)$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(T)} \psi d\mu_{\nu(T)x,y} &=< \psi(T)\nu(T)x, y > \\ &=< (\psi\nu)(T)x, y > \\ &= \int_{\sigma(T)} \psi\nu d\mu_{x,y} \end{aligned}$$

Como coinciden en toda continua, $\mu_{\nu(T)x,y} = \nu\mu_{x,y}$y coinciden en toda función boreliana y entonces $\forall\psi, \nu \in B(\sigma(T))$:

$$\begin{aligned} < \nu(T)\psi(T)x, y > &= \int_{\sigma(T)} \psi d\mu_{\nu(T)x,y} \\ &= \int_{\sigma(T)} \psi\nu d\mu_{x,y} \\ &=< (\psi\nu)(T)x, y > \end{aligned}$$

Es decir, el cálculo boreliano es multiplicativo.□

Lema VI.8 $\|\psi(T)\| \leq \|\psi\|_\infty \forall\psi \in B(\sigma(T))$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
|< \psi(T)x, y >| &= \left| \int_{\sigma(T)} \psi d\mu_{x,y} \right| \\
&\leq \|\psi\|_{\infty} \|x\| \|y\|
\end{aligned}
$$

entonces $\sup_{x,y\in H} \frac{|<\psi(T)x,y>|}{\|x\|\|y\|} \leq \|\psi\|_{\infty}$, luego $\|\psi(T)\| \leq \|\psi\|_{\infty}$. Entonces, el cálculo boreliano tiene norma menor o igual a 1. Como extiende al cálculo continuo (que es isométrico) necesariamente tiene norma igual a 1.□

VI.6 El teorema espectral y la medida espectral

Los operadores normales, en el caso de H de dimensión finita, son facilmente caracterizables por la descomposición espectral; todo operador normal $j : H \to H$ puede escribirse como $j = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n p_n$, donde p_n son unas ciertas proyecciones ($p_n^2 = p_n, \|p_n\| = 1$) y los λ_n son numeros complejos. En el caso de H infinito separable (o sea de dimensión hilbertiana numerable), una cierta generalización es posible pero sólo para la clase de los operadores normales compactos, ya que éstos pueden escribirse como $j = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n p_n$ con la convergencia de la topología fuerte de operadores. Pero para el caso de operadores normales cualesquiera en espacios de dimensión arbitraria no sería posible en general usar este tipo de expresiones, puesto que algunas veces el espectro ni siquiera es numerable. Pero sí una generalización es posible cambiando las sumas por integrales sobre el espectro, previa una generalización de la medida, la llamada *medida espectral*.

Definición VI.9 *Si H es un espacio de Hilbert, una medida espectral es una función $E : \Sigma \longmapsto \mathcal{B}(H)$ donde Σ es una $\sigma-$álgebra que verifica que:*

$$
\begin{aligned}
E(\emptyset) &= 0 \\
E(X) &= Id \\
E(\Delta_1 \cap \Delta_2) &= E(\Delta_1)E(\Delta_2) \qquad \text{(y entonces } E(\Delta)^2 = E(\Delta), \text{ los } E(\Delta) \text{ son proyecciones ortogonales)} \\
< E(\coprod_{n=1}^{\infty} \Delta_n)x, y > &= \sum_{n=1}^{\infty} < E(\Delta_n)x, y > \\
E(\Delta_1 \coprod \Delta_2) &= E(\Delta_1) + E(\Delta_2)
\end{aligned}
$$

Podemos construir una medida espectral sobre $\sigma(T)$ a partir del cálculo funcional boreliano, poniendo Σ la $\sigma-$álgebra de Borel:

Así: $E(\Delta) = \chi_\Delta(T)$. Con esta definición, $< E(\Delta)x, y >= \mu_{x,y}(\Delta)$ pues

$$\begin{aligned} \mu_{x,y}(\Delta) &= \int \chi_\Delta d\mu_{x,y} \\ &=< \chi_\Delta(T)x, y > \\ &=< E(\Delta)x, y > \end{aligned}$$

Con lo cual a partir de la medida espectral E y con x e y en H podemos conseguir $E_{x,y} = \mu_{x,y}$ una medida compleja.

Extendiendo este concepto, definiremos $\int\limits_{\sigma(T)} \psi(\lambda)dE$ por:

$$\begin{aligned} < \int\limits_{\sigma(T)} \psi(\lambda)dEx, y > &:= \int\limits_{\sigma(T)} \psi dE_{x,y} \\ &= \int\limits_{\sigma(T)} \psi d\mu_{x,y} \\ &=< \psi(T)x, y > \end{aligned}$$

Entonces, $\int\limits_{\sigma(T)} \psi dE = \psi(T)$. En particular, $\int\limits_{\sigma(T)} 1dE(z) = Id$ y (Teorema espectral) $\int\limits_{\sigma(T)} zdE(z) = T$

VII
EL ESPECTRO

VII.1 El espectro de un operador acotado en un espacio de Banach

Un objetivo importante en la aplicación de la teoría de los operadores lineales acotados que actúan en un espacio de Banach X, consiste en la solución de la ecuación

$$Ax = \lambda x,$$

donde A es el operador lineal acotado ,$x \in X$ el elemento buscado y $\lambda \in \mathbb{C}$ es un parámetro.Un valor de λ,para el cual esta ecuación tiene una solución distinta de la nula,se denomina autovalor del operador A.En espacios de dimensión finita existen dos posibilidades:

1)Ax=λx tiene solución no nula y por lo tanto $(A$-$\lambda I)^{-1}$no existe.

2) Existe $(A$-$\lambda I)^{-1}$.

En dimensión infinita,puede darse que $\ker(A$-$\lambda I)^{-1} = \{0\}$ y $(A$-$\lambda I)$ no es inversible.Un ejemplo para este caso es el operador $Shift, S$:$\ell^2 \longrightarrow \ell^2$,dado por

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

$S \in B(\ell^2)$,claramente es un monomorfismo,pero sin embargo no es inversible,ya que la sucesión $(1, 0, 0, 0, \ldots) \in \ell^2$ no está en la imagen de S.

Definición VII.1 *El conjunto de todos los valores $\lambda \in \mathbb{C}$,tal que A-λI no es inversible se denomina espectro de A y se designa $\sigma(A)$.*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A\text{-}\lambda I \ \textit{no es inversible}\}.$$

En dimensión finita, $\sigma(A)$ coincide con el conjunto de los autovalores de A.

Proposición VII.2 *$\sigma(A)$,el espectro de un operador lineal acotado A en un espacio de Banach X,es un conjunto cerrado,contenido en $D(0, \|A\|) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq \|A\|\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Veamos que $\sigma(A)$ es un conjunto cerrado:

Para ello defino f:$\mathbb{C} \longrightarrow B(X)$

$$f(\lambda) = A - \lambda I.$$

f es una función continua,luego $f^{-1}(Gl(X))$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$,pues $Gl(X)$ es abierto en $B(X)$.

Pero $f^{-1}(Gl(X))$ es justamente el complemento de $\sigma(A)$, por lo que $\sigma(A)$ es cerrado.

Supongamos ahora que $\lambda \in \sigma(A)$ y $|\lambda| > \|A\|$.

Como $\left\|\frac{A}{\lambda}\right\| < 1$, $\frac{A}{\lambda} - I$ es un operador inversible,de donde $A - \lambda I$ tambien resulta inversible,por lo que $\lambda \notin \sigma(A)$.Así vemos que $\sigma(A)$ está contenido en $D(0, \|A\|)$. □

Ejemplo 84 *Sea $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ y $M_r : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ el operador definido por*

$$M_r(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (r_1 x_1, r_2 x_2, r_3 x_3, \ldots)$$

Calculemos su espectro:

Si $e_n \in \ell^2$ es la sucesión dada por

$$(e_n)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases},$$

entonces,

$$(M_r - r_n I)e_n = 0.$$

Por lo tanto vale que $\overline{\{r_n : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \sigma(M_r)$.Supongamos ahora que λ pertenece al espectro de M_r y no a $\overline{\{r_n : n \in \mathbb{N}\}}$.Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|r_n - \lambda| \geq \varepsilon.$$

Así,$\{\frac{1}{r_n - \lambda}\}$ pertenece a ℓ^∞,con lo que $M_r - \lambda I = M_{(r_1 - \lambda, r_2 - \lambda, \ldots, r_n - \lambda, \ldots)}$ resulta inversible,teniendo como inverso a $M_{(\frac{1}{r_1 - \lambda}, \frac{1}{r_2 - \lambda}, \ldots, \frac{1}{r_n - \lambda}, \ldots)}$.Pero esto es absurdo,ya que habíamos supuesto $\lambda \in \sigma(M_r)$.De esta manera,

$$\sigma(M_r) = \overline{\{r_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Ejemplo 85 *Sea T:$\ell^2 \longrightarrow \ell^2$ el operador dado por*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

Por la proposición anterior,$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq 1 = \|T\|\}$.

$$(x_2, x_3, x_{4,\ldots}) = \lambda(x_1, x_2, x_{3,\ldots}) \quad \text{si y sólo si}$$

$$x_2 = \lambda x_1,\ x_3 = \lambda x_2, \ldots$$

Por lo tanto,si $|\lambda| < 1$,entonces $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots)$ es un autovector de T asociado a λ,o sea $\lambda \in \sigma(T)$.Se obtiene entonces

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Pero como $\sigma(T)$ es cerrado,

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Observación VII.3 *Si H es un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$,entonces $A - \lambda I$ es inversible si y sólo si $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$ es inversible.Por lo tanto,$\sigma(A) = \overline{\sigma(A^*)}$.*

Ejemplo 86 *Por la observación anterior podemos concluir que si $S \in B(\ell^2)$ es el operador $Shift$ mencionado anteriormente,entonces*

$$\sigma(S) = \sigma(S^*) = \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Proposición VII.4 *Si X es un espacio de Banach y $A \in B(X)$ entonces $\sigma(A) \neq \emptyset$.*

Para probar esta proposición,demostraremos primero los siguientes lemas:

Lema VII.5 *Si X es un espacio de Banach y $A \in Gl(X)$ entonces $B(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}) \subseteq Gl(X)$.*

Demostración:

Sea B un operador lineal acotado en X tal que $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.Entonces se tiene

$$\left\|I - A^{-1}B\right\| = \left\|A^{-1}(B - A)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|B - A\| < 1.$$

Por lo tanto,el operador $I - (I - A^{-1}B)$ es inversible y su inversa es

$$\left[I - (I - A^{-1}B)\right]^{-1} = \sum_{n \geq 0} (I - A^{-1}B)^n.$$

Pero

$$I - (I - A^{-1}B) = A^{-1}B,$$

o sea $A^{-1}B$ es inversible,por ende B lo es también,y vale

$$B^{-1} = \left[\sum_{n \geq 0} (I - A^{-1}B)^n\right] A^{-1}. \ \square$$

Lema VII.6 *La función* $\Psi : Gl(X) \longrightarrow Gl(X)$*,dada por* $\Psi(A) = A^{-1}$*,es continua.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $A \in Gl(X)$arbitrario.

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1},$$

luego

$$\left\| A^{-1} - B^{-1} \right\| \leq \left\| A^{-1} \right\| \|B - A\| \left\| B^{-1} \right\|.$$

Si $\|B - A\| = \alpha < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$,entonces,por el lema anterior,

$$B^{-1} = \left[\sum_{n \geq o} \left(I - A^{-1}B \right)^n \right] A^{-1}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\| \leq & \left\| \sum_{n\geq 0} (I - A^{-1}B)^n \right\| \|A^{-1}\| \leq \\ \leq \|A^{-1}\| \sum_{n\geq 0} \|I - A^{-1}B\|^n \leq & \|A^{-1}\| \sum_{n\geq 0} \|A^{-1}\|^n \|A - B\|^n \leq \\ \leq \|A^{-1}\| \sum_{n\geq 0} \|A^{-1}\|^n \frac{1}{2^n \|A^{-1}\|^n} = & \|A^{-1}\| \sum_{n\geq 0} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 2\|A^{-1}\|. \end{aligned}$$

Pero entonces,si llamo $\alpha = \|B - A\|$,

$$\left\| A^{-1} - B^{-1} \right\| \leq \left\| A^{-1} \right\| \|B - A\| \left\| B^{-1} \right\| \leq 2 \left\| A^{-1} \right\|^2 \alpha \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo tanto,dado $\varepsilon > 0$,existe un $\delta > 0$ tal que si $\|B - A\| < \delta$,entonces $\|A^{-1} - B^{-1}\| < \varepsilon$.

Así quedó probado que Ψ es continua. $\square$

Volvamos ahora a la demostración de la proposición que dice que si X es un espacio de Banach y $A \in B(X)$ entonces el espectro de A es distinto del vacío.

Supongamos que $\sigma(A) = \emptyset$.Entonces,para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $A - \lambda I$ es inversible.

Sea $p : \mathbb{C} \longrightarrow Gl(X) \subset B(X)$, definida por

$$p(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Sea $\varphi \in B(X)^*$.Entonces

$$\Psi = \varphi \circ p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

es continua,pues φ y p son continuas.

Probemos que $\Psi = \varphi \circ p$ es analítica:

$$\tfrac{\Psi(z_0+h)-\Psi(z_0)}{h} = \tfrac{1}{h}\left\{\varphi\left([A-(z_0+h)I]^{-1}\right) - \varphi\left([A - z_0 I^{-1}]\right)\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{h}\varphi([A-(z_0+h)I]^{-1} - [A - z_0 I]^{-1}) =$$

$$= \tfrac{1}{h}\varphi([A-(z_0+h)I]^{-1}\,[A - z_0 I - (A-(z_0+h)I)]\,[A - z_0 I]^{-1}) =$$

$$= \varphi([A-(z_0+h)I]^{-1}\,[A - z_0 I]^{-1}) = \varphi[p(z_0+h)p(z_0)].$$

Pero

$$\varphi(p(z_0+h)p(z_0)) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \varphi([p(z_0)]^2),$$

lo que significa que Ψ es analítica.

Veamos que Ψ es acotada en $\mathbb{C}$:

Está claro que Ψ es acotada en cualquier disco,ya que es continua.Alcanzaría probar entonces que es acotada en el complemento de un disco.

Se tiene

$$|\Psi(z)| = \left|\varphi((A-zI)^{-1})\right| \leq \|\varphi\| \left\|(A-zI)^{-1}\right\|.$$

Ahora,si $|z| > 2\,\|A\|$, puedo escribir

$$A - zI = z(\frac{A}{z} - I), \text{ con } \left\|\frac{A}{z}\right\| < \frac{1}{2},$$

de donde

$$(A-zI)^{-1} = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\frac{A}{z})^n.$$

Así,

$$\left\|(A-zI)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|z|}\sum_{n\geq 0}\left\|\frac{A}{z}\right\|^n \leq \frac{1}{\|A\|},$$

de lo que concluimos que

$$|\Psi(z)| \leq \frac{\|\varphi\|}{\|A\|} \quad \text{en } |z| > 2\,\|A\|.$$

Luego Ψ es analítica y acotada,con lo cual, por el teorema de Liouville,Ψ es constante.

$$\Psi(z) = \varphi\left((A-zI)^{-1}\right) = cte,$$

para toda φ perteneciente a $B(X)^*$.Pero si $z_1 \neq z_2$, entonces

$$(A - z_1 I)^{-1} \neq (A - z_2 I)^{-1}.$$

En virtud del teorema de Hahn-Banach,existe una $\varphi \in B(X)^*$ tal que

$$\varphi\left((A-z_1 I)^{-1}\right) \neq \varphi\left((A-z_2 I)^{-1}\right),$$

lo cual es una contradicción. $\square$

VII.1.1 Espectro de un operador autoadjunto

Los operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert tienen un interés especial, porque se puede tener una información mucho más precisa sobre su espectro que en el caso de los operadores generales.

Veremos ahora una propiedad,para lo cual primero necesitaremos una definición y un lema:

Definición VII.7 *Sea X un espacio de Banach.Un operador $A \in B(X)$ se dice acotado inferiormente si y sólo si existe $C \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\|Ax\| \geq C\|x\| \quad \forall x \in X$.*

Lema VII.8 *$A \in B(X)$ es acotado inferiormente si y sólo si $R(A)$ es cerrado y $Ker(A) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$) Si $x \in Ker(A)$ entonces $0 = \|Ax\| \geq C\|x\|$,y por lo tanto necesariamente $x = 0$.

Sea ahora $y \in \overline{R(A)}$.Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $Ax_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Usando la definición de acotado inferiormente,

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{C}\|A(x_n - x_m)\|.$$

Vemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy,puesto que $A(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lo es.Luego $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Finalmente la continuidad de A nos asegura que $Ax = y$,como queríamos ver.

$\Leftarrow$)Razonemos por el absurdo.Negar la afirmación significa suponer que dado $C > 0$ existe un $x \in X$ tal que $\|Ax\| < C\|x\|$. Luego podemos suponer,tomando $C_n = \frac{1}{n}$,que existe una sucesión de vectores (x_n),con $\|x_n\| = 1$,tal que $\|Ax_n\| < \frac{1}{n}$.En consecuencia, (Ax_n) converge a 0.Dado que $R(A)$ es cerrado y que A es un monomorfismo, se sigue que (x_n) converge a 0, lo que es absurdo ya que supusimos que $\|x_n\| = 1$ para todo n. $\square$

VII.2 Operadores compactos

Estudiaremos ahora una clase especial de operadores,que en algunos aspectos se asemejan a los operadores lineales que actúan en espacios de dimensión finita,especialmente,como veremos,en lo que respecta a los espectros.Muchos de los operadores que aparecen en el estudio de ecuaciones integrales pertenecen a esta clase.De ahí resulta su importancia desde el punto de vista de las aplicaciones.

Definición VII.9 *Sea X un espacio de Banach.Un operador $K \in B(X)$ es compacto si y sólo si $\overline{K(B(0,M))}$ es un conjunto compacto en X para todo $M > 0$.*

Las siguientes definiciones son equivalentes :

1)K es compacto si y sólo si $\overline{K(B(0,1))}$ es compacta en X.

2)K es compacto si y sólo si $\overline{K(A)}$ es compacta en X para todo $A \subseteq X, A$ acotado.

3)K es compacto si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en X tal que $\|x_n\| \leq c$,$\{Kx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene alguna subsucesión convergente.

Llamemos $K(X)$ al conjunto de los operadores compactos de $B(X)$.

Ejemplo 87 *Si X un espacio de Banach y $T \in B(X)$ tal que dim$(R(T)) < \infty$,entonces $T \in K(X)$.*

Esto se deduce inmediatamente de que T transforma todo subconjunto acotado $A \subseteq X$ en un subconjunto acotado de un espacio de dimensión finita,es decir,en un conjunto totalmente acotado.

De aquí se desprende que,en particular,si dim$(X) < \infty$,entonces todo operador de $B(X)$ es compacto.

Ejemplo 88 *Si $k \in C([0,1] \times [0,1])$ y $K : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ es el operador representado por*

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,s)f(s)ds,$$

entonces K es compacto.

Veamos que el operador del ejemplo 2 es compacto:
Sea $M > 0$ y

$$B = \{f \in C[0,1] : \|f\|_\infty < M\} = B(0,M)$$

El objetivo es probar que $K(B)$ es un conjunto equiacotado y equicontinuo.
Sea $g = Kf$,tal que $f \in B$ y $x \in [0,1]$.Entonces,

$$|g(x)| \leq \|g\|_\infty = \|Kf\|_\infty \leq \|K\| \, \|f\|_\infty \leq \|K\| \, M,$$

con lo cual $K(B)$ resulta equiacotado.
Sea $\varepsilon > 0, g = Kf$,con $f \in K(B)$.

$$|g(x) - g(y)| = \left| \int_0^1 k(x,t)f(t)dt - \int_0^1 k(y,t)f(t)dt \right| \leq \int_0^1 |k(x,t) - k(y,t)| \, |f(t)| \, dt.$$

k es continua en [0,1]$\times[0,1]$,que es un conjunto compacto.Luego es uniformemente continua.O sea ,dado $\varepsilon > 0$, existe un $d > 0$, tal que si

$$\|(x,t) - (y,t')\| < \delta,$$
entonces
$$|k(x,t) - k(y,t')| < \tfrac{\varepsilon}{M}.$$

Por lo tanto,si

$$|x-y| = \|(x,t)-(y,t)\| < \delta,$$

se verifica

$$|k(x,t)-k(y,t)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Pero entonces,

$$|g(x)-g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{M}\int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon,$$

es decir $K(B)$ es equicontinuo.
En consecuencia, por el teorema de Arzelá-Ascoli, $\overline{K(B)} = \overline{K(B(0,M))}$ es compacta. □

Ejemplo 89 *Sea $k \in C([0,1]\times[0,1])$ y $K_0 : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ el operador dado por*

$$K_0 f(x) = \int_0^x k(x,y)f(y)dy$$

Se puede probar que este operador es compacto,de manera análoga a como se lo hizo en el ejemplo 2.En particular,el operador de Volterra V,

$$V : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]), \text{donde}$$

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

es compacto.

Propiedad VII.10 *Sea X un espacio de Banach.*
1)Si $\alpha,\beta \in \mathbb{C}; K,T \in K(X)$,entonces $\alpha K+\beta T \in K(X)$,o sea $K(X)$ es un subespacio lineal de $B(X)$.
2)Si $A \in B(X), K \in K(X)$,entonces $KA, AK \in K(X)$,o sea $K(X)$ es un ideal bilátero en el anillo de los operadores acotados $B(X)$.

Demostremos la propiedad 2):
$A(B(0,1))$ es acotado, pues $\|Ax\| \leq \|A\|$ para todo x tal que $\|x\| < 1$.Como $K \in K(X)$, $\overline{K(A(B(0,1)))}$ es compacta,lo cual significa que KA es compacto.

$\overline{K(B(0,1))}$ es compacto,con lo cual $K(B(0,1))$ es totalmente acotado.Luego $A(K(B(0,1)))$ es totalmente acotado,ya que A es continuo.Por lo tanto $\overline{A(K(B(0,1)))}$ es compacto y así $AK \in K(X)$. □

Corolario VII.11 *En un espacio de dimensión infinita un operador compacto no puede tener un inverso acotado.*

En efecto,en caso contrario,el operador unidad $I = A^{-1}A$ sería compacto.Pero esto es imposible,ya que si I fuera compacto,$\overline{B(0,1)} = \overline{I(B(0,1))}$ sería compacta,lo cual es absurdo ya que el espacio es de dimensión infinita.

Teorema VII.12 *Si* $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de operadores compactos en un espacio de Banach* X *y* $T \in B(X)$*,tal que* $\|K_n - T\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*,entonces* $T \in K(X)$*.En otras palabras,*$K(X)$ *es cerrado en* $B(X)$*.*

Demostración:

Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores compactos en un espacio de Banach X y $T \in B(X)$ tal que $K_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$.

Probemos que $T(B(0,1))$ es totalmente acotado:

Sea $\varepsilon > 0$.Sabemos que existe un $n_0 \in\mathbb{N}$ tal que $\|K_{n_0} - T\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$K_{n_0}(B(0,1))$ es totalmente acotado.Luego existen $x_1, \ldots, x_r \in X$ tal que

$$K_{n_0}(B(0,1)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B(x_{i,}\varepsilon).$$

Veamos que $T(B(0,1)) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{r} B(x_{i,}\varepsilon)$:

Sea $y \in T(B(0,1))$.Entonces $y = Tx$, con $\|x\| < 1$.

Como $K_{n_0}x \in K_{n_o}(B(0,1))$, existe un x_j tal que $\|K_{n_0}x - x_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Así,

$$\|Tx - x_j\| \leq \|Tx - K_{n_0}x\| + \|K_{n_0}x - x_j\| \leq \|T - K_{n_0}\| \, \|x\| + \|K_{n_0}x - x_j\| < \varepsilon.$$

De esta manera $T(B(0,1))$ resulta totalmente acotado y por lo tanto $\overline{T(B(0,1))}$ compacta. □

Proposición VII.13 *Si* H *es un espacio de Hilbert y* $K \in K(H)$*,entonces existe una sucesión* $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(H)$ *tal que* $dim(R(K_n)) < \infty$ *y* $K_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} K$.

Demostración:

Basta ver que dado $\varepsilon > 0$ existe un operador $K_\varepsilon \in B(H)$ tal que

$$dim(K_\varepsilon) < \infty \text{ y } \|K_\varepsilon - K\| < \varepsilon.$$

Como K es compacto,existen $x_{1,}x_{2,\ldots,}x_m$ tales que $K(B(0,1)) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} B(x_i, \frac{\varepsilon}{4})$.

Sea $S =< x_1, \ldots, x_m >$ y $K_\varepsilon = P_S$,donde el operador P_S es el proyector ortogonal sobre S.($\|P_S\| = 1$)

Está claro que $\dim(R(K_\varepsilon)) \leq m < \infty$.

Si $x \in B(0,1)$, existe un x_j tal que $Kx \in B(x_j, \frac{\varepsilon}{4})$.Luego,

$$\|K_\varepsilon x - Kx\| \leq \|K_\varepsilon x - x_j\| + \|x_j - Kx\| < \|K_\varepsilon x - x_j\| + \frac{\varepsilon}{4}$$

Pero

$$\|K_\varepsilon x - x_j\| = \|P_S Kx - P_S x_j\| = \|P_S(Kx - x_j)\| \leq \|P_S\| \, \|Kx - x_j\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Así, $\|K_\varepsilon x - Kx\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y por lo tanto $\|K_\varepsilon - K\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. □

Observación VII.14 *El resultado anterior se adapta perfectamente al caso de un espacio de Banach con base (base de Schauder); es decir:*

Proposición VII.15 *Si E es un espacio de Banach con base, y $K \in K(E)$, entonces existe una sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(E)$ tal que* $\dim(Ran(K_n)) < \infty$ *y* $K_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} K$.

Demostración:

Idéntica a la anterior.□

Teorema VII.16 *(Teorema de Schauder)Sea X un espacio de Banach y $K \in B(X)$.Entonces K es compacto si y sólo si K^* es compacto.*

Demostración:

⇒)

Denotemos

$$B = \overline{B(0,1)} \subseteq X$$
$$B^* = \overline{B(0,1)} \subseteq X^*$$

Si K es compacto,entonces $\overline{K(B)}$ es compacta en X.

Sea

$$F = \{\varphi|_{\overline{K(B)}} : \varphi \in B^*\} \subseteq [C(\overline{K(B)}, C), \; \|\|_\infty]$$

Sea $\varepsilon > 0$.Si $\varphi \in F$, y $\|x - y\| < \delta = \varepsilon$,entonces

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(x - y)| \leq \|x - y\| < \varepsilon,$$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{y \in \overline{K(B}} |\varphi(y)| = \sup_{x\in B} |\varphi(K(x))| \leq \|K\| \, .$$

Por lo tanto la familia F es equicontinua y equiacotada.Luego,en virtud del teorema de Arzelá-Ascoli,F es precompacto en $C(\overline{K(B)}, C)$.

Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X^* tal que $\|\varphi_n\| \leq 1$ para todo $n \in$N.

$\{\varphi_{n|_{\overline{K(B)}}}\}$ está contenida en F,que es precompacto.Por lo tanto existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k|_{\overline{K(B)}}}\}_{k\in N}$ convergente en $\overline{F}$,que, por consiguiente, es de Cauchy.

Pero

$$\left\|\varphi_{n_k|_{\overline{K(B)}}}-\varphi_{n_{k+l}|_{\overline{K(B)}}}\right\|_\infty=\sup_{y\in\overline{K(B)}}\|(\varphi_{n_k}-\varphi_{n_{k+l}})(y)\|=\sup_{x\in B}|\varphi_{n_k}(K(x))-\varphi_{n_{k+l}}(K(x))|=$$
$$=\sup_{x\in B}|(K^*\varphi_{n_k}-K^*\varphi_{n_{k+l}})(x)|=\|K^*\varphi_{n_k}-K^*\varphi_{n_{k+l}}\|,$$

de lo que se sigue que la sucesión $\{K^*\varphi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X^*, y luego convergente.

De esta manera K^* resulta un operador compacto.

$\Leftarrow$)

Si K^* es compacto,entonces K^{**} es compacto,por lo que probamos anteriormente.

Sea

$$J : X \longrightarrow X^{**}, \text{dado por}$$
$$J(x)(\Psi)=\psi(x)$$

Entonces

$$[K^{**}J(x)](\Psi)=[J(x)K^*](\Psi)=J(x)(\Psi K)=\Psi(K(x))=J(K(x))(\Psi),$$

Luego,

$$K^{**}J(x)=J(K(x)$$

Sea $B^{**}=\overline{B(0,1)}\subseteq X^{**}$.Entonces $K^{**}(B^{**})$ es totalmente acotado,ya que K^{**} es compacto.Así,$J(K(B))$, que está contenido en $K^{**}(B^{**})$, es totalmente acotado.

Como J es una isometría,tambien $K(B)$ es totalmente acotado.Luego $\overline{K(B(0,1))}$ es compacta,es decir,K es un operador compacto. □

Proposición VII.17 *Sea X un espacio de Banach.Si $K\in K(X)$,entonces:*

1) $\dim(\ker(I-K))<\infty$

2) $R(I-K)$ es cerrado.

Demostración:

1)

$$\ker(I-K)=\{x\in X : Kx=x\}$$

K es compacto.Pero entonces $K_{|\ker(I-K)}$ sigue siendo compacto.

$$K_{|\ker(I-K)}=I_{|\ker(I-K)},$$

luego $I_{|\ker(I-K)}$ es compacto.Esto implica que $\dim(\ker(I-K))<\infty$. □

2)Veamos que $R(I-K)$ es cerrado:

Sea $y\in\overline{R(I-K)}$.Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(I-K)x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}y$.

Pueden darse dos casos:

a)Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un sucesión acotada,$\{Kx_n\}_{n\in N}$ tiene una subsucesión convergente $\{Kx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

$$Kx_{n_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}v,\quad (I-K)x_{n_k}=x_{n_k}-Kx_{n_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}y.$$

Luego,

$$x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v+y$$

O sea ,

$$(I-K)x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (I-K)(v+y).$$

Así,

$$(I-K)(v+y)=y,$$

Por consiguiente $y \in R(I-K)$,por lo que $R(I-K)$ resulta cerrado.

b)Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada,entonces consideramos $d(x_n, \ker(I-K))$:

i)Si $d(x_n, \ker(I-K)) = 0$ para infinitos $n \in\mathbb{N}$,entonces existe una subsucesión$(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_j} \in \ker(I-K)$.

Pero

$$(I-K)x_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} y\ ,$$

por lo tanto $y=0$ y en consecuencia $y \in R(I-K)$,que es lo que quería ver.

ii)Si $d(x_n, \ker(I-K)) > 0$ para infinitos $n \in\mathbb{N}$,existe una subsucesión $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $d(x_{n_i}, \ker(I-K)) > 0$.Como $\dim(\ker(I-K) < \infty$,para cada x_{n_i} existe un $z_{n_i} \in \ker(I-K)$ tal que

$$\|x_{n_i} - z_{n_i}\| = d(x_{n_i}, \ker(I-K)) > 0.$$

Llamemos $w_i = x_{n_i} - z_{n_i}$.

$$(I-K)w_i = (I-K)x_{n_i}$$

Probemos que w_i es una sucesión acotada:

Supongamos que no lo es.Entonces existe una subsucesión w_{i_p} tal que $\|w_{i_p}\| \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

$$\left\|\frac{w_{i_p}}{\|w_{i_p}\|}\right\| = 1.$$

$$(I-K)\frac{w_{i_p}}{\|w_{i_p}\|} = \frac{(I-K)w_{i_p}}{\|w_{i_p}\|} = \frac{(I-K)x_{i_p}}{\|w_{i_p}\|} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\frac{w_{i_p}}{\|w_{i_p}\|}$ es una sucesión acotada,por lo tanto existe $K\frac{w_{i_{p_t}}}{\|w_{i_{pt}}\|}$ convergente a u.

$$\frac{w_{i_{p_t}}}{\|w_{i_{pt}}\|} - K\frac{w_{i_{p_t}}}{\|w_{i_{pt}}\|} = (I-K)\frac{w_{i_{pt}}}{\|w_{i_{pt}}\|} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

luego

$$\frac{w_{i_{p_t}}}{\|w_{i_{pt}}\|} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} u,$$

por lo que

$$Ku = \lim_{t\to\infty} K\frac{w_{i_{p_t}}}{\|w_{i_{pt}}\|} = u.$$

Así $u \in \ker(I-K)$.Pero si $z \in \ker(I-K)$,

$$\left\| \frac{w_{i_{p_t}}}{\|w_{i_{pt}}\|} - z \right\| = \frac{\|w_{i_{p_t}} - \|w_{i_{pt}}\|z\|}{\|w_{i_{pt}}\|} =$$

$$= \frac{\|x_{i_{p_t}} - (z_{i_{p_t}} + \|w_{i_{pt}}\|z)\|}{\|x_{i_{p_t}} - z_{i_{p_t}}\|} \geq \frac{d(x_{i_{p_t}}, \ker(I-K))}{\|x_{i_{p_t}} - z_{i_{p_t}}\|} = 1,$$

con lo que $d(u, \ker(I-K)) \geq 1$,lo cual es una contradicción.

Se tiene entonces que la sucesión $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es acotada.Por consiguiente, $\{Kw_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{Kw_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $Kw_{i_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$.

$$w_{i_k} - Kw_{i_k} = (I-K)w_{i_k} = (I-K)x_{i_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y,$$

con lo cual

$$w_{i_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v + y,$$

o sea

$$(I-K)w_{i_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (I-K)(v+y),$$

de lo que se sigue que

$$(I-K)(v+y) = y.$$

De esta forma $y \in R(I-K)$,por lo que $R(I-K)$ resulta cerrado. □

Proposición VII.18 *Sea X un espacio de Banach y $K \in K(X)$.Si $(I-K)$ es un monomorfismo,entonces $R(I-K) = X$.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $R(I-K) = X_1 \subseteq X$ es distinto de X.

Por la proposición anterior,X_1 es un conjunto cerrado.Luego,es un espacio de Banach.

$K_{|X_1}$ es compacto.

$$K(X_1) = K(I-K)(X) = (I-K)K(X) \subseteq X_1$$

Sea $X_2 = R(I_{X_1} - K_{|X_1})$.Entonces X_2 es cerrado.

$$X_2 = (I-K)(X_1) = (I-K)^2(X)$$
$$K(X_2) = K((I-K)^2(X) = (I-K)^2(K(X)) \subseteq X_2$$

Nos construimos de esta manera una sucesión de conjuntos $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq \ldots,$$

donde X_n es cerrado para todo $n \in\mathbb{N}$.

Probaremos que todas estas inclusiones son estrictas:
Supongamos que existe un $n \in N$ tal que $X_n = X_{n+1}$, o sea

$$(I-K)^n(X) = (I-K)^{n+1}(X)$$

Sea $y \in X$.Entonces existe un $x \in X$ tal que

$$(I-K)^n(y) = (I-K)^{n+1}(x),$$

o sea

$$(I-K)^n(y) = (I-K)^n(I-K)(x). \qquad (*)$$

Sabemos que $I-K$ es monomorfismo.Veamos usando inducción que $(I-K)^n$ tambien lo es:

$$(I-K)^n(z) = 0,$$

luego

$$(I-K)[(I-K)^{n-1}z] = 0$$

Esto implica que $(I-K)^{n-1}z = 0$, ya que $I-K$ es inyectivo.
Por hipótesis inductiva ,$(I-K)^{n-1}$ es monomorfismo,por lo tanto $z = 0$.
Así,$(I-K)^n$ resulta monomorfismo.
Pero entonces ,volviendo a la ecuación (*), $y = (I-K)(x)$, o sea $y \in R(I-K)$.
Por consiguiente ,$X = R(I-K)$,lo cual es absurdo, pues habíamos supuesto $R(I-K) \neq X$.
Por lo tanto

$$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \ldots$$

Consideremos $X_{n+1} \subset X_n$:
X_{n+1} es un subespacio cerrado propio de X_n.
Aplicando el lema de Riesz para $\delta = \frac{1}{2}$,existe un $x_n \in X_n$ tal que

$$\|x_n\| = 1 \text{ y } d(x_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Está claro que $(x_n)_{n \in I\!N}$ es una sucesión acotada.
Si $m \geq n+1$

$$\|Kx_n - Kx_m\| = \|x_n + Kx_n - x_n - Kx_m\| = \|x_n - (I-K)x_n - Kx_m\|.$$

Se tiene $(I-K)x_n \in X_{n+1}$, $K(x_m) \in X_{n+1}$.Luego

$$\|Kx_n - Kx_m\| \geq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto $\{Kx_n\}$ no puede tener ninguna subsucesión convergente,lo cual es absurdo,pues $K \in K(X)$.
Hemos demostrado entonces que $X_1 = R(I-K) = X$. $\square$

VII.2.1 Espectro de un operador compacto

El espectro de un operador compacto en un espacio de Banach tiene cierta similitud con el espectro de un operador lineal que actúa en un espacio de dimensión finita,como se ve en el siguiente teorema:

Teorema VII.19 *Sea X un espacio de Banach,$K \in K(X)$ y $\sigma(K)$ el espectro de K. Entonces:*
a)Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \in \sigma(K)$,entonces λ es un autovalor de K.
b)Si $\lambda \in \sigma(K)$ y $\lambda \neq 0$,entonces $\dim(\ker(\lambda I - K)) < \infty$
c)$\sigma(K)$ es a lo sumo numerable y tiene a lo sumo un punto límite,el 0.

DEMOSTRACIÓN:

a)

$(\lambda I - K)$ no es inversible,ya que $\lambda \in \sigma(K)$.

$$\lambda I - K = \lambda(I - \frac{K}{\lambda}).$$

$\frac{K}{\lambda} \in K(X)$ y $I - \frac{K}{\lambda}$ no es inversible.Luego $I - \frac{K}{\lambda}$ no es monomorfismo,pues si lo fuera,sería suryectivo,por la propiedad anterior.Por lo tanto existe un $v \neq 0$ tal que $(I - \frac{K}{\lambda})v = 0$, o sea existe un $v \neq 0$ tal que $(\lambda I - K)v = 0$.Pero entonces,λ es un autovalor de K. $\square$

b)

Sea $\lambda \in \sigma(K), \lambda \neq 0$.

$$(\lambda I - K) = \lambda(I - \frac{K}{\lambda}).$$

Vale que $\dim(\ker(I - \frac{K}{\lambda})) < \infty$,pues $\frac{K}{\lambda} \in K(X)$.

Por lo tanto $\dim(\ker(\lambda I - K) < \infty$. $\square$

c)

Supongamos que $\sigma(K)\backslash\{0\}$ tiene un punto límite.Entonces existen una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in I\!N} \subseteq \sigma(K)\backslash\{0\}$,y $\lambda \in \sigma(K)\backslash\{0\}$ tal que $\lambda_j \neq \lambda_i$ si $j \neq i$ y $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

Por a),λ y los λ_n son autovalores de K.

Sea $x_n \in \ker(K - \lambda_n I), x_n \neq 0$.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ son linealmente independientes, pues son autovectores correspondientes a autovalores distintos.Por lo tanto,si defino

$$S_n =< x_1, x_2, \ldots x_n >,$$

entonces $\dim(S_n) = n$.

Para cada $y \in S_n$ se tiene $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$.

$$y - \frac{1}{\lambda_n} Ky = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}) x_k,$$

de donde se ve que $y - \frac{1}{\lambda_n}Ky \in S_{n-1}$.
$S_{n-1} \subseteq S_n$, $S_{n-1} \neq S_n$ y S_n es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por el lema de Riesz,podemos escoger una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$de manera que

$$y_n \in S_n,\ \|y_n\| = 1 \text{ y } d(y_n, S_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

$\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \neq 0$,por lo tanto $\{\frac{1}{\lambda_n}\}$ es una sucesión acotada.Luego $\{\frac{y_n}{\lambda_n}\}$ es una sucesión acotada.Pero para cualquier $l \in\mathbb{N}$,

$$\left\| K(\frac{y_{n+l}}{\lambda_{n+l}}) - K(\frac{y_n}{\lambda_n}) \right\| = \left\| y_{n+l} - [y_{n+l} - \frac{1}{\lambda_{n+l}}K(y_{n+l}) + K(\frac{y_n}{\lambda_n})] \right\| \geq \frac{1}{2},$$

puesto que $y_{n+l} - \frac{1}{\lambda_{n+l}}Ky_{n+l} + K(\frac{y_n}{\lambda_n}) \in S_{n+l-1}$.
Resulta entonces que $K(\frac{y_n}{\lambda_n})$ no contiene ninguna subsucesión convergente,lo cual es una contradicción.

Si $\dim(X) < \infty$,entonces $\sigma(K)$ es finito.

Hemos probado que si $\lambda \in \sigma(K), \lambda \neq 0$,entonces λ es un punto aislado de $\sigma(K)$.Por lo tanto $\sigma(K)$ es a lo sumo numerable.

Ejemplo 90 *Sea* $K : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$,*el operador dado por*

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots).$$

Este operador es compacto,ya que transforma la bola unitaria del espacio ℓ^2 en el conjunto de puntos que satisfacen la condición

$$\sum n^2 x_n^2 \leq 1,$$

y este conjunto es compacto.Calculemos el espectro del operador K :
$0 \in \sigma(K)$,pues K es compacto y ℓ^2 tiene dimensión infinita.
Sea $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2, \lambda \in\mathbb{C}$.Entonces

$$[(K - \lambda I)(x)]_i = [Kx - \lambda x]_i = \frac{1}{i}x_i - \lambda x_i.$$

Sea $e_n \in \ell^2$ la sucesión definida por

$$(e_n)_i = \begin{cases} 0 & si\ \ i \neq n \\ 1 & si\ \ i = n \end{cases}.$$

$$[(K - \lambda I)e_n]_n = \frac{1}{n} - \lambda.$$

Por lo tanto,si $\lambda = \frac{1}{n}$,entoces $(K - \lambda I)e_n = 0,$ o sea $\lambda \in \sigma(K)$.

Supongamos que λ es no nulo y distinto de $\frac{1}{n}$ para todo $n \in$N,y que $\lambda \in \sigma(K)$.Como λ es distinto de cero y K es compacto,λ es un autovalor de K.O sea,existe un $x = (x_i)_{i \in I} \in \ell^2, x \neq 0$ tal que

$$[Kx - \lambda x]_i = \frac{1}{i} x_i - \lambda x_i = 0 \qquad \text{para todo } i.$$

Pero entonces,

$$(\frac{1}{i} - \lambda) x_i = 0 \qquad \text{para todo } i.$$

Como $\lambda \neq \frac{1}{i}$ para todo i,resulta que $x = 0$, lo cual es absurdo pues λ era un autovalor.Luego,

$$\sigma(K) = \left\{ \frac{1}{n} : n \in I\!N \right\} \} \cup \{0\}.$$

Se puede probar análogamente que,en general,si $K : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ se define por

$$Kx = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots),$$

entonces K es compacto si y sólo si $\alpha_n \longrightarrow 0$ y,en este caso,

$$\sigma(K) = \{\alpha_n : n \in I\!N\} \cup \{0\}.$$

Ejemplo 91 *Sea* $V : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ *el operador de Volterra definido por*

$$V f(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Ya hemos visto que este operador es compacto.Como la dimensión de $C([0,1])$ es infinita,V no es inversible,y por lo tanto $0 \in \sigma(V)$.Supongamos que λ pertenece al espectro de V y es distinto de cero.Entonces λ tiene que ser autovalor.O sea,existe una función $f \in C([0,1])$,$f \neq 0$ tal que

$$\int_0^x f(t) dt = \lambda f(x) \qquad \text{para todo } x \in [0,1].$$

Luego,f resulta una función derivable y obtenemos

$$f(x) = \lambda f'(x), \text{ o sea que } f \text{ es de la forma}$$

$$f(x) = c e^{\frac{1}{\lambda} x}.$$

$$\text{Pero } c = f(0) = \frac{\int_0^0 f(t) dt}{\lambda} = 0.$$

Concluimos entonces que $f = 0$, lo cual es absurdo,pues λ era autovalor.De esta manera vimos que $\sigma(V) = \{0\}$.

VII.2.2 Alternativa de Fredholm
Sea $k \in C([0,1] \times [0,1])$, y $K_0 \in B(C[0,1])$ el operador integral dado por

$$(K_0 f)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)dt.$$

Hemos demostrado anteriormente que este operador es compacto.
Consideremos la ecuación integral

$$\varphi(s) = \int_0^1 k(s,t)\varphi(t)dt + g(s),$$

donde $g \in C[0,1]$ y φ es la función que debemos encontrar.

Esta ecuación se llama ecuación de Fredholm de segunda especie y existen varios ejemplos de la física que llevan a estudiarla,como por ejemplo las oscilaciones de una cuerda de hilo bajo la acción de una fuerza exterior.

En términos de operadores,la ecuación de Fredholm se puede escribir en la forma

$$(I - K)\varphi = g.$$

El problema de encontrar una solución para la ecuación integral nos lleva entonces a realizar consideraciones sobre esta ecuación de operadores.

Alternativa de Fredholm:

Sea X un espacio de Banach, $K \in K(X)$.Entonces pueden darse dos y sólo dos casos:

1)$\ker(I-K) = \{0\}$,o sea $\varphi - K\varphi = 0$ tiene como única solución a $\varphi = 0$.

Esto significa que $I - K$ es inversible,ya que tenemos que $I - K$ es monomorfismo y por lo tanto,como K es compacto,epimorfismo.Luego $\varphi - K\varphi = g$ tiene como solución única a $\varphi = (I-K)^{-1}g$,cualquiera que sea g.

2)$\ker(I-K) \neq 0$.En este caso,la ecuación $\varphi - K\varphi = g$ tiene o bien infinitas soluciones ,o bien no tiene ninguna solución,ya que si existe una función $\varphi_0 \in C([0,1])$ tal que $\varphi_0 - K\varphi_0 = g$, entonces la solución general es el conjunto

$$S = \{\varphi \in C([0,1]) : \varphi = \Phi + \varphi_0,\ \Phi \in \ker(I-K)\},$$

que es infinito pues $\ker(I-K) \neq 0$.

Veamos entonces cómo tiene que ser g para que la ecuación tenga una solución:
Decir que la ecuación tiene solución es equivalente a decir que $g \in R(I-K)$.

$$R(I-K) \underset{K \in K(X)}{=} \overline{R(I-K)} =^{\circ} [\ker(I-K^*)],$$

La dimensión de $\ker(I-K)$ es finita,pues K es compacto,por lo tanto

$$dim[\ker(I-K^*)] = \dim[(\ker(I-K)] = n.$$

Luego existe $\{\Psi_1, \dots \Psi_n\}$ base de $\ker(I-K^*)$.Resulta entonces que g es admisible si y sólo si

$$\Psi_i(g) = 0 \; \forall i, 1 \leq i \leq n.$$

En el caso particular en que K es el operador de Volterra,

$$V : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]),$$

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

se tiene la *ecuación de Volterra* (de segunda especie):

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt + g(x),$$

donde $g \in C[0,1]$ y φ es la función que debemos encontrar.Sabemos que $\sigma(V) = \{0\}$.Por lo tanto $\ker(I-V) = \{0\}$.Luego,para todo $g \in C[0,1]$ existe una única función $\varphi \in C[0,1]$ tal que $\varphi - V\varphi = g$.

VII.2.3 La diagonalización de operadores compactos autoadjuntos en un espacio de Hilbert

Para el caso de operadores que actúan en un espacio euclídeo de dimensión finita,se conoce el teorema sobre la reducción de una transformación lineal autoadjunta a la forma diagonal respecto a una base ortonormal.

Probaremos un teorema que es la generalización de este resultado al caso de operadores compactos autoadjuntos en un espacio de Hilbert.

Veamos primero algunas propiedad de los autovalores y autovectores de operadores autoadjuntos:

Propiedad VII.20 *Si H es un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$ es autoadjunto,entonces:*

1) $r(A) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \|A\|$,como ya se había probado anteriormente.

Por lo tanto si $K \in K(H)$ y $K^* = K \neq 0$,entonces K tiene autovalores distintos de cero.

2) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ (demostrado anteriormente).

3) Si λ_1 y λ_2 son autovalores asociados a los autovectores v_1 y v_2,y $\lambda_1 \neq \lambda_2$,entonces $v_1 \perp v_2$.Esto se debe a que

$$\lambda_1 < v_1, v_2 >=< \lambda_1 v_1, v_2 >=< K v_1, v_2 >=< v_1, K v_2 >=< v_1, \lambda_2 v_2 >=$$
$$= \lambda_2 < v_1, v_2 > .$$

4)Si $K \in K(H)$ y S es un subespacio invariante,o sea si $KS \subseteq S$,entonces $S^\perp$ es invariante.En efecto,sea $x \in S^\perp$ e $y \in S$.Entonces

$$< Kx, y >=< x, Ky >= 0,$$

luego $Kx \in S^\perp$.

Teorema VII.21 *(Teorema de Diagonalización de $Hilbert - Schmidt$)*

Sea K un operador compacto autoadjunto en un espacio de Hilbert H,$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$ los autovalores de K distintos de cero y distintos entre sí y P_{N_k} la proyección sobre $N_k = \ker(K - \lambda_k I)$.Entonces

$$K = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{N_k},$$

donde la serie converge en la métrica definida por la norma de $B(H)$.

Demostración:

$$N_k = \ker(K - \lambda_k I),\ dim(N_k) = n_k$$

$$N_0 = \ker(K).$$

Sabemos que $N_k \perp N_l$ si $k \neq l$ por la propiedad 3) anterior.

Sea $\{e_1^k, e_2^k, \ldots, e_{n_k}^k\}$ una base ortonormal de N_k, y $\{f_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal de N_0.Veamos que

$$F = \{e_j^k, j = 1, \ldots, n_k, k \geq 1\} \cup \{f_i\}_{i\in I}$$

es una base ortonormal de H.(Dicho en otras palabras H tiene una base ortonormal de autovectores de K).

Está claro que F es un conjunto ortonormal.

Veamos que F es total:

$$S = F^{\perp} =< F >^{\perp}, \; K(< F >) \subseteq < F > .$$

Pero entonces,por la propiedad 4) anterior, $K(S) \subseteq S$.

Además, $K_{|S} \in B(S)$ es compacto y es autoadjunto:

$$< K_{|S}(s_1), s_2 >=< K(s_1), s_2 >=< s_1, K(s_2) >=< s_1, K_{|S}(s_2) > .$$

Existen dos posibilidades:

1)$K_{|S} = 0$ ó

2)$K_{|S}$ tiene un autovalor $\mu \neq 0$

Si $K_{|S} = 0$ tenemos que $S \subseteq \ker(K) = N_0 \perp S$,de donde se deduce que $S = \{0\}$.

Si $K_{|S}$ tiene un autovalor $\mu \neq 0$,entonces existe un $v \in S, v$ no nulo,tal que $Kv = \mu v$.Luego μ es autovalor de K y por lo tanto existe un k tal que $\mu = \lambda_k$.De ahí resulta que $v \in N_k \subseteq < B >$,por lo que $v \in S \cap S^{\perp} = \{0\}$,lo cual es absurdo pues v era un autovector.

Probemos que

$$K = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{N_k}.$$

Como F es una base ortonormal de H, para todo $x \in H$,

$$x = \sum_{i\in I} < x, f_i > f_i + \sum_{k\geq 1} \sum_{j=1}^{n_k} < x, e_j^k > e_j^k.$$

Luego,

$$Kx = \sum_{k\geq 1} \sum_{j=1}^{n_k} < x, e_j^k > \lambda_k e_j^k = \sum_{k\geq 1} \lambda_k (\sum_{j=1}^{n_k} < x, e_j^k > e_j^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{N_k}(x)$$

Ahora resta ver que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{N_k}$ es convergente:

Llamemos

$$S_{M} = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k P_{N_k}.$$

Entonces,

$$\|S_{M+l}-S_M\|^2_{B(H)} = \left\|\sum_{k=M+1}^{M+l} \lambda_k P_{N_k}\right\|^2 =$$

$$= \sup_{\|x\|\leq 1}\left\|\sum_{k=M+1}^{M+l} \lambda_k P_{N_k}(x)\right\|^2 = \sup_{\|x\|\leq 1}\sum_{k=M+1}^{M+l} \lambda_k^2 \|P_{N_k}(x)\|^2 \leq$$

$$\leq \sup_{\|x\|\leq 1}\sup_{k\geq M+1} \lambda_k^2 \sum_{k=M+1}^{M+l} \|P_{N_k}(x)\|^2 \leq \sup_{\|x\|\leq 1}\sup_{k\geq M+1} \lambda_k^2 l \, \|x\|^2 \leq \sup_{k\geq M+1} \lambda_k^2 l \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Luego S_M es de Cauchy.

Una aplicación del teorema de Hilbert-Schmidt es el denominado cálculo funcional para operadores compactos autoadjuntos.
Si K es un operador compacto autoadjunto,podemos escribir:

$$K = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{N_k},$$

Así,

$$K^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{N_k}\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{N_k}\right) = \sum_{k,l} \lambda_k \lambda_l P_{n_k} P_{n_l} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 P_{N_k}.$$

Por inducción resulta que

$$K^n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n P_{N_k}.$$

De aquí se deduce que si q es un polinomio tal que $q(0)$=0 entonces se puede definir

$$q(K) = \sum_{k=1}^{\infty} q(\lambda_k) P_{N_k}.$$

Definición VII.22 *Sea K un operador compacto autoadjunto en un espacio de Hilbert,f una función continua y $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sigma(K) \subseteq \Omega$.Supongamos que se cumple $f(0) = 0$.Entonces definimos*

$$f(K) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k) P_{N_k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) P_{N_k}.$$

Se puede demostrar la convergencia en la métrica definida por la norma de $B(H)$ análogamente a como lo hicimos anteriormente.

$f(K)$ resulta un operador compacto por ser límite de operadores compactos.

Proposición VII.23 *Si $K \in K(H), K = K^*$,entonces K es un operador positivo si y sólo si todos sus autovalores son números reales positivos.*

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$)Por el teorema de Hilbert-Schmidt,

$$K = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{N_k}.$$

Sea $x \in N_k$ con $\|x\| = 1$.Entonces $Kx = \lambda_k x$.

Así, $\lambda_k = < Kx, x >$ resulta un número real positivo.

$\Leftarrow$)

Supongamos que $\lambda_k \geq 0$ para todo $k \geq 0$.Si $x \in H$,entonces

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k,$$

donde $x_0 \in N_0$ y $x_k \in N_k$.Así,

$$Kx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k,$$

o sea

$$< Kx, x > = < \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k > = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_k < h_k, h_l > =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|x_k\|^2 \geq 0.$$

Este resulado nos permite definir la raíz cuadrada de un operador compacto positivo,pues si consideramos la función

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \text{dada por}$$
$$f(x) = x^{\frac{1}{2}},$$

se ve que $\sigma(K) \subseteq \mathbb{R}^+$ y por lo tanto se tiene

$$K^{\frac{1}{2}} := f(K) = \sum_{k \geq 1} \lambda_k^{\frac{1}{2}} P_{n_k}.$$

Se cumple que $A = K^{\frac{1}{2}}$ es el único operador compacto positivo tal que $AA = K$.

Si K es un operador compacto cualquiera, vale que KK^* y K^*K son compactos,autoadjuntos y positivos.Podemos entonces definir

$$|K| := (KK^*)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k\geq 1} |\lambda_k| \, P_{n_k},$$

siendo $B = |K|$ el único operador positivo tal que $B^2 = K^*K$.

A los autovalores de $|K|$ se los denomina valores singulares de K.

VIII
ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS

VIII.1 Definiciones

Se recomienda ver el Apéndice B previamente.

Definición VIII.1 *Un espacio vectorial topológico (***EVT***)es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial E con una topología tal que las siguientes funciones son continuas:*

(a) $f : ExE \to E$, $f(x,y):= x+y$

(b) $g : \mathbb{F}xE \to E$, $g(\alpha,x):=\alpha.x$

Ejemplo 92 *Un espacio normado es un espacio vectorial topológico.*

Definición VIII.2 *Sea E un $\mathbb{F}$-ev y $\mathcal{P}$ una familia de seminormas, (recordar que $p:E \to \mathbb{R}$ es una seminorma sii i) $p(x) \geq 0$ $\forall$ $x \in E$, ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall$ $x,y \in E$,y iii) $p(\alpha.x)=|\alpha|.p(x)$ $\forall$ $\alpha \in \mathbb{F}$, $x \in E$) sea Υ la topología de E que tiene como sub-base a los conjuntos $\{ x : p(x\text{-}x_0) < \varepsilon \}$ donde $p \in \mathcal{P}$, $x_0 \in E$ y $\varepsilon > 0$.*

Proposición VIII.3 *Υ es la menor topología que hace continuas a las $\varphi \in \mathcal{F}$ donde $\mathcal{F} = \{\varphi : E \to IR^+ \ / \ \exists \ y \in E, \ \exists \ p \in \mathcal{P} : \varphi(x)=p(x\text{-}y) \ \forall x\}$*

Proposición VIII.4 *$U \subseteq E$ es abierto en esta topología sii $\forall$ $x_0 \in U$ existen $p_1,\ldots p_n$ en $\mathcal{P}$ y $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n > 0$ tales que $\bigcap_{j=1}^{n} \{ x \in E : p_j(x\text{-}x_0) < \varepsilon_j \} \subseteq U$.*

Ejercicio 10 *(E,Υ) es un espacio vectorial topológico.*

Definición VIII.5 *Un espacio localmente convexo (***ELC***) es un espacio vectorial topológico cuya topología está definida por una familia de seminormas $\mathcal{P}$ tal que $\bigcap\limits_{p\in P} \{ x : p(x)=0 \} = \{0\}$.*

Proposición VIII.6 *Un espacio localmente convexo es Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN:

Dados x$\neq$y existe p $\in \mathcal{P}$ tal que p(x-y) $> \varepsilon > 0$. Sean U=$\left\{ \text{z} : \text{p(x-z)} < \frac{1}{2}\varepsilon \right\}$ y V=$\left\{ \text{z} : \text{p(y-z)} < \frac{1}{2}\varepsilon \right\}$ entonces U$\cap$V=$\emptyset$ y U y V son entornos abiertos de x e y respectivamente.

Ejemplo 93 *Sea X completamente regular y sea $C(X) = \{f : X \to \mathbb{F}$, continuas $\}$. Si K es un subconjunto compacto de X, definimos $p_K(f) = sup\{ \ |f(x)| \ : \ x \in K \ \}$. Entonces $\mathcal{P} = \{ \ p_K : K$ compacto en $X \ \}$ es una familia de seminormas y $C(X)$ resulta un espacio localmente convexo con la topología definida por $\mathcal{P}$.$\Box$*

VIII.2 Topologías débiles

1) Sea E espacio normado, para cada $\varphi \in$E*consideramos la seminorma p$_\varphi$(x) = $|\varphi$(x)$|$.Sea Υla topología definida por la familia $\mathcal{P}$= $\{$ p$_\varphi$: $\varphi \ \in$ E* $\}$. Entonces (E,Υ) es un espacio vectorial localmente convexo. Ésta topología se llama la topología débil de E y se denota σ**(E,E*)**.

2) Si E es un espacio nornado, para cada x $\in$E definimos la seminorma p$_x$por la fórmula p$_x(\varphi) = |\varphi$(x)$|$. Si Υes la topología definida por $\mathcal{P}$= $\{$ p$_x$: x $\in$ E $\}$,entonces (E*,Υ) resulta un espacio vectorial localmente convexo. Ésta topología se llama la topología débil*de E*(léase topología débil estrella) y se nota σ**(E*,E)** ó **w***.

Ejercicio 11 *Sea E un espacio normado. Entonces una red $x_\alpha$converge débilmente a x si y sólo si para toda $\varphi \in E^*$la red $\varphi(x_\alpha)$converge a $\varphi(x)$en $\mathbb{C}$. Análogamente, una red $\varphi_\alpha, \varphi \in E^*$converge a φen $(E^*, \sigma(E^*, E))$ si y sólo si para todo $x \in E$,la red $\varphi(x_\alpha)$converge a $\varphi(x)$en $\mathbb{C}$*

Definición VIII.7 *1) Si x,y $\in$E un espacio vectorial, llamamos segmento de x a y (y lo denotamos [a,b]) al conjunto $\{$ tx+(1-t)y : 0 $\leq$ t $\leq$ 1 $\}$.*

Definición VIII.8 *2) A $\subseteq$E es convexo si [a,b] $\subseteq$A $\forall$a,b $\in$A.*

Definición VIII.9 *3) Dado A $\subseteq$E, llamamos la cápsula convexa de A a co(A):=$\bigcap \{A_r : A_r \supseteq A, \ A_r$ convexo $\}$
Si E es un ev topológico definimos la cápsula cerrada convexa de A a $\overline{co}$(A):=$\bigcap \{A_r : A_r \supseteq A, \ A_r$ convexo y cerr*

Proposición VIII.10 *Valen:*

Definición VIII.11 *(a) A es convexo sii* $\forall x_1,\ldots,x_n \in A$, $t_1,\ldots,t_n \in [0,1]$ *tales que* $\sum_{i=1}^{n} t_i=1$ *vale que* $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in A$.

(b) Si los conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ *son convexos, entonces* $\bigcap_{i\in I} A_i$ *también.*

(c) Sean E_1,E_2 *ev ,* $T:E_1 \to E_2$ *una t.l. y* $C \subseteq E_2$ *un conjunto convexo.Entonces* $T^{-1}(C)$ *también lo es.*

(d) Sea E un espacio vectorial topológico, $A\subseteq E$ *convexo. Entonces* $\overline{A}$ *es convexo.*

(e) En las mismas hipótesis de (d), si $a \in A^o$, $b \in \overline{A}$, *entonces* $[a,b]\setminus b \in A^o$.

Demostración:

(d): i)Si a $\in$A, sea $\{x_i\}_{i\in I}\in$A una red que converge a b. Entonces la red $\{tx_i+(1-t)a\}_{i\in I}\subseteq$A y converge a (tb+(1-t)a). Por lo tanto [a,b]$\subseteq\overline{A}$.

ii) Si $b_1,b_2\in\overline{A}$, existe $\{x_i\}_{i\in I}\subseteq$A red que converge a b_1. Por el caso anterior, $tx_i+(1-t)b_2\in\overline{A}$y la red $\{ tx_i + (1-t)b_2 \}_{i\in I}$converge a $tx_i+(1-t)b_2$.

(e) Fijo t, 0<t<1, sea c = tb+(1-t)a. Existe V abierto tal que 0 $\in$V y (a + V) $\subseteq$A (a$\in A^o$). Para todo d $\in$A vale que

A $\supseteq$(td + (1-t)(a+V) = t(d-b) + tb + (1-t)(a+V) = [t(d-b) + (1-t)V] + c.

Si existe d $\in$A tal que 0 $\in$[t(d-b) + (1-t)V] entonces c $\in A^o$porque V es abierto.

Cómo encontramos d: existe d $\in$A tal que 0 $\in$[t(d-b) + (1-t)V] sii existe d $\in$A tal que 0 $\in[t^{-1}(1-t)V$ + (d-b)] ó d perteneciente a [b-t^{-1}(1-t)V].

Pero 0 $\in$[-t^{-1}(1-t)V] y ésto es un abierto. Como b $\in\overline{A}$,d se puede encontrar en A.□

Corolario VIII.12 *Si* $A \subseteq E$ *entonces* $\overline{co}(A)=\overline{co(A)}$.

Definición VIII.13 $A \in E$ *es balanceado si* $\alpha x \in A\ \forall\ x \in A$, $\alpha \in F$, $|\alpha| \leq 1$. *A se dice absorbente si* $\forall\ x \in E\ \exists\ \varepsilon>0$ *tal que* $\mathbf{t}x \in A$ *para todo* $t \in (0,\varepsilon)$. *Finalmente, A es absorbente en* $a \in A$ *si (A-a) es absorbente.*

i) Un conjunto absorbente contiene al origen.

ii) A es absorbente en a si $\forall\ x \in E$ *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $a+tx \in A$ *para* $0 < t < \varepsilon$.

Proposición VIII.14 *Si E es un espacio normado y p es una seminorma, entonces el conjunto* $\{ x : p(x) < 1 \}$ *resulta convexo,balanceado y absorbente en todos sus puntos.*

Teorema VIII.15 *Si V es un conjunto convexo, balanceado y absorbente en todos sus puntos, entonces existe una única seminorma p (llamada funcional de Minkowski de V) tal que* $V=\{ x : p(x) < 1 \}$.

Demostración:

Sea p(x):=inf$\{$ t : t $\geq$ 0 y x $\in$ tV $\}$. Como V es absorbente, E= $\bigcup_{n=1}^{\infty}$nV y por lo tanto $\{$ t : t $\geq$ 0 y x $\in$ tV $\} \neq \emptyset$. Queremos ver que p(αx)=$|\alpha|$p(x) (puedo suponer $\alpha \neq$0 pues claramente p(0)=0). Por definición,

$$\begin{aligned} p(\alpha x) &:= inf\,\{ \text{ t : t} \geq 0 \text{ y } \alpha\text{x} \in \text{tV} \} \\ &= inf\,\{ \text{ t : t} \geq 0 \text{ y x} \in \tfrac{\text{t}}{\alpha}\text{V} \} \\ &= inf\left\{ \text{ t : t} \geq 0 \text{ y x} \in \tfrac{\text{t}}{|\alpha|}\text{V} \right\} \\ &= |\alpha|\, inf\left\{ \tfrac{\text{t}}{|\alpha|} \text{ : t} \geq 0 \text{ y x} \in \tfrac{\text{t}}{|\alpha|}\text{V} \right\} \\ &= |\alpha|\, p(x) \end{aligned}$$

y p(x+y) $\leq$ p(x) + p(y) $\forall$ x,y $\in$ E : si α,β $\geq$0, a,b $\in$ V, αx+βy=(α+β)($\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$a + $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$b) $\in$ (α+β)V por la convexidad de V. Sean x,y $\in$E, p(x)=α, p(y)=β, y sea δ>0. Por la definición de p y porque V es balanceado vale que x $\in$ (α+δ)V e y $\in$ (β+δ)V. Como V es convexo, x+y pertenece a (α+δ)V + (β+δ)V=(α+β+2δ)V. Tomando δ $\rightarrow$0 resulta que p(x+y) $\leq$ α+β = p(x) + p(y).

V={ x : p(x)<1 } : Si p(x)=α<1 , para β $\in$ (α,1) vale que x $\in$ βV$\subseteq$V pues V es balanceado. Por lo tanto, V$\subseteq$ { x : p(x)<1 } . Sea x $\in$ V,y por lo anterior,p(x)<1. Como V es absorbente en x, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $0 <$ t $< \varepsilon$, x+tx=y $\in$ V. Pero x=(1+t)$^{-1}$y , y $\in$ V, entonces p(x)=(1+t)$^{-1}$p(y) $\leq$ (1+t)$^{-1}$ < 1.

La unicidad de p viene dada por el siguiente ejercicio:

Lema VIII.16 *Sean p,q seminormas. p$\leq$q sii { x : p(x)<1 } $\subseteq$ { x : q(x)<1 } .*

Definición VIII.17 *q : E$\rightarrow$R es una funcional sublineal si*
(a) q(x+y)$\leq$q(x)+q(y) $\forall$x, y $\in$E.
(b) q(αx)=αq(x) $\forall\alpha$ $\geq$0,$\forall$x $\in$E.

Ejercicio 12 *Sean E un espacio vectorial topológico y G un abierto convexo que contiene al origen.*

Ejercicio 13 *Si q(x) = inf { t : t $\geq$ 0 y x $\in$ tG } . Entonces q es una funcional sublineal continua, no negativa y G={ x : q(x)<1 } .*

Ejercicio 14 *Sea E un espacio vectorial topológico, U = { R $\subseteq$ E abierto, convexo y balanceado } . E es localmente convexo sii U es una base de entornos del cero.*

Teorema VIII.18 (Alaoglu) *Sea E un espacio normado, B_{E^*} = { f$\in$ E* : $\|f\| \leq 1$ }. Entonces B_{E^*} es σ^*- compacta.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $D = \{ t \in IR : t \leq 1 \}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$. Definimos Φ : $B_{E^*} \to \prod_{x\in B_{E^*}} D$, $\Phi(f):=(f(x))_{x\in B_{E^*}}$. $\prod_{x\in B_{E^*}} D$ con la topología producto. Por el Teorema de Tychonov, $\prod_{x\in B_{E^*}} D$ es compacto.

Queremos ver que Φ es un homeomorfismo entre B_{E^*} y su imagen.

Φ es inyectiva : claramente.

Φ es continua : Sea $f_\alpha \to f$ red en B_{E^*}. Es decir que, $\forall$ x $\in B_{E^*}$, $f_\alpha(x) \to f(x)$. Por lo tanto que $(f_\alpha(x))_{x\in B_{E^*}}$ converge coordenada a coordenada a $(f(x))_{x\in B_{E^*}}$. Entonces $(f_\alpha(x))_{x\in B_{E^*}} \to (f(x))_{x\in B_{E^*}}$ en $\prod_{x\in B_{E^*}} D$.

$\Phi(B_{E^*})$ es cerrada : Sea f_α red en B_{E^*} tal que $\Phi(f_\alpha) \to f$ en $\prod_{x\in B_{E^*}} D$. Definimos f(x)=lim $f_\alpha(x)$ para x $\in B_{E^*}$. Este límite existe (casi) por definición de convergencia de una red en un espacio con topología producto. Sean x $\in$ E, $\alpha > 0$ tal que $\|\alpha x\| \leq 1$. Entonces definimos $f(x)=\alpha^{-1}f(\alpha x)$ (Chequear la buena definición y la linealidad). Si $\|x\| \leq 1$, $f(x) \in D$, es decir $|f(x)| \leq 1$. Por lo tanto f es continua y $\|f\| \leq 1$. Así, tenemos que $\Phi(f)=f.\Phi(B_{E^*})$ es cerrado $\subseteq D$ compacto $\Rightarrow \Phi(B_{E^*})$ es compacto.

Resumiendo, $\Phi : B_{E^*} \to \Phi(B_{E^*})$ es continua y biyectiva, $\Phi(B_{E^*})$ es compacto, entonces Φ es homeomorfismo y por lo tanto (B_{E^*}) es compacta. $\square$

Corolario VIII.19 *Todo espacio de Banach es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de C(X) para un conveniente espacio compacto X.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\Psi : E \to C(B_{E^*})$, $\Psi(x)=\hat{x}_{|B_{E^*}}$. *Tenemos que*

$$\|x\| = \left\|\hat{x}\right\| = \sup_{\|f\|\leq 1} \left\|\hat{x}(f)\right\| = \left\|\hat{x}_{|B_{E^*}}\right\|_\infty .\square$$

Teorema VIII.20 (de Urysohn) *Si X es un espacio métrico compacto, entonces es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de* $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *(* $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *con la topología producto).*

Lema VIII.21 *Sea E un espacio localmente convexo, f,* $f_1,\ldots,f_n \in E^*$. *Son equivalentes :*

(a) $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$.

(b) $\exists$ *c > 0 tal que* $|f(x)| \leq \max_k |f_k(x)|$.

(c) $\bigcap_{k=1}^{n} Ker(f_k) \subseteq Ker(f)$

DEMOSTRACIÓN:

(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) son inmediatas.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Sea S = $\{ (f_1(x),\ldots,f_n(x)) : x \in E \} \subseteq$ C. Definimos $\Phi : S \to C$, $\Phi((f_1(x),\ldots,f_n(x)))=f(x)$. Está bien definida y es lineal. Sea A : $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \in E^*$ una extensión de Φ, existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que A(z)=$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k$. En S, A((f_1(x),...,f_n(x))) = $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x)$ = f(x). □

Proposición VIII.22 *Sea E un espacio localmente convexo, $F \subseteq E^*$ un subespacio separador (si x≠y existe f en F tq f(x)≠f(y)). Sean $\mathcal{P} = \{p_f : f \in F\}$ y σ(E,F) la topología definida por $\mathcal{P}$. Entonces $(E, \sigma(E,F))^*$=F. En particular,*

$$(E, \sigma(E, E^*))^* = E^*$$

Demostración:

Dado que $\sigma(E$,F) es la menor topología de E que hace continuas a las funciones de F,.F⊆$(E, \sigma(E,$F$))^*$.

Sea f $\in (E, \sigma(E,$F$))^*$, entonces { x : |f(x)| < 1 } es un abierto que contiene al origen. Sabemos que existen $f_1, ..., f_n \in$ F, $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n > 0$ tq $A := \bigcap_{k=1}^{n} \{ x : |f_k(x)| < \varepsilon_k \} \subseteq$ { x : |f(x)| < 1 }. De esto último y del hecho que para todo x en E existe $\alpha > 0$ tq αx $\in A$ se deduce que $|f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ max $|f_k(x)|$ ∀x∈E . Por el lema anterior, f=$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$. □

Teorema VIII.23 (Banach) *Si E es un espacio de Banach separable entonces es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de C[0,1].*

Demostración:

E separable ⇒ (B_{E^*},σ(E^*,E)) es metrizable ; sea x_n familia densa numerable,definimos d(f,g)=$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{1 + |f(x_n) - g(x_n)|}$.(Chequear que es una distancia y que las topologías son equivalentes).□

Ejercicio 15 *Sea E espacio vectorial topológico, $f : E \to \mathbb{F}$ lineal. Son equivalentes:*

(a) f es continua.

(b) f es continua en 0.

Teorema VIII.24 *Teorema de separación de Hahn-Banach : Sea E un espacio vectorial topológico, U, V convexos disjuntos, distintos del vacío, U abierto. Entonces existe $f \in E^*$, $t \in \mathbb{R}$ tal que Re f(x) < t ≤ Re f(y) ∀ x ∈ U, ∀ y ∈ V.*

Demostración:

(a) Si E es un espacio vectorial topológico real, sean $x_0 \in$ U, $y_0 \in$ V, W=x_0-y_0+U-V, z=x_0-$y_0 \notin$ W. W es convexo, abierto (pues W= $\bigcup_{y \in V}$ (z-y+U)) y 0 ∈ W. Sea p_W la funcional sublineal continua no negativa tal que W={ x:p_W(x)<1 } (ver ejercicio posterior a la construcción de la funcional de Minkowsky). Vale que p_W(z)≥1. Sea f_0(tz):=t, entonces $f_0(tz) \leq p_W(tz)$: si t>0 es trivial, si t<0, $f_0(tz) < 0 \leq p_W(tz)$. Aplicando el teorema de Hahn-Banach, existe f ∈ E^* tq f(tz)=t, f(x) ≤ p_W(x).

Queremos ver que f ∈ E^* :Por el ejercicio anterior basta probar que es continua en el cero. Sea $x_n \to 0$, entonces tenemos las siguientes desigualdades :$f(x_n) \leq p_W(x_n)$, $f(x_n) = -f(-x_n) \geq -p_W(-x_n)$. Pero $p_W(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $p_W(-x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Por lo tanto,$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\forall$ x $\in$ U,$\forall$ y $\in$ V,x -y + z $\in$ W, entoces f(x) - f(y) + 1=f(x - y + z) $\leq$ p_W(x-y+z) < 1. De aquí se deduce que f(x) < f(y). Sea a=sup f(U), a $\notin$ f(U) porque f es una función abierta (ejercicio).

(b) E espacio vectorial topológico complejo : Si f : E $\to$ $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-lineal continua (E pensado como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico), entonces g : E $\to$ C, g(x)=f(x)-i(ix) es una función lineal compleja, continua y su parte real es f (verificar). $\square$

Proposición VIII.25 *Sea E un espacio normado, $C \subseteq E$ convexo,entonces* $\overline{C}^{\| \|}=\overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$.

Demostración:

$\overline{A}^{\| \|} \subseteq \overline{A}^{\sigma(E,E^*)}$ $\forall$A porque $\Upsilon_{\| \|} \supseteq \Upsilon_{\sigma(E,E^*)}$. Sea x $\in$ $\overline{C}^{\sigma(E,E^*)} \setminus \overline{C}^{\| \|}$, B_r(x) tal que $B_r(x) \cap \overline{C}^{\| \|} = \emptyset$. B_r(x) es un abierto convexo, $\overline{C}^{\| \|}$ es convexo también. Por el teorema anterior existe f $\in E^*$ tal que

$\sup_{y \in B_r(x)}$ Re f(y) $\leq \alpha < \beta \leq \inf_{z \in \overline{C}^{\| \|}}$ Re f(z).

Como x $\in$ $\overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$, existe una red $x_\alpha \in$ C tal que $x_\alpha \underset{\sigma(E,E^*)}{\longrightarrow}$ x, pero esto implica que f(x_α)$\longrightarrow$ f(x), lo que es absurdo. $\square$

Teorema VIII.26 (Goldstine) *Sea E normado, $J : E \to E^{**}$ la inclusión canónica. Entonces $J(E^{**})$ es $\sigma(E^{**},E^*)-$ densa en $B_{E^{**}}$.*

Demostración:

$B_{E^{**}}$ es $\sigma(E^{**},E^*)-$ cerrada : Sea Φ_α red en $B_{E^{**}}$ tq Φ_α(f)$\to$ Φ(f) $\forall$f $\in$ E^*. Como $\|\Phi_\alpha\| \leq 1 \Rightarrow \|\Phi_\alpha(f)\| \leq \|f\| \Rightarrow \|\Phi\| \leq 1$.

Sea C=$\overline{J(B_E)}^{\sigma(E^{**},E^*)} \subseteq \overline{B_{E^{**}}}^{\sigma(E^{**},E^*)}$ = $B_{E^{**}}$.C es convexo y cerrado. Supongamos que existe $\Phi \in B_{E^{**}} \setminus$ C; según el teorema de separación de Hahn-Banach existe $\Lambda \in (E^{**},\sigma(E^{**},E^*))^*$ tal que $\sup_{\Psi \in C}$ Re $\Lambda(\Psi)$ < Re $\Lambda(\Phi)$.

$\Lambda \in E^*$: recordar que si X es un espacio localmente convexo, entonces $(X^*,\sigma^*)^*$=X. Vale decir que existe f $\in E^*$ tal que Λ(f)=Θ(f) $\forall$ $\Theta \in E^{**}$.

Tenemos que $\sup_{\Psi \in C}$ Re Ψ(f) < Re Φ(f). Pero $\|f\|$= $\sup_{x \in B_E}$ |f(x)|= $\sup_{x \in B_E}$ Re f(x)= $\sup_{x \in B_E}$ Re $\hat{x}$(f) $\leq$ $\sup_{\Psi \in C}$Re Ψ(f) < Re Φ(f)$\leq$ |Φ(f)| . Por lo tanto, |Φ(f)| > $\|f\| \Rightarrow \|\Phi\| > 1$, absurdo. $\square$

Un espacio de Banach E se dice reflexivo si el morfismo natural J : E $\to$ E^{**}, $J(x)(\varphi) = \varphi(x)$ es suryectivo. Sabemos que

J : E $\to$ J(E) es una isometría. Ahora bien, si consideramos a E con la topología débil y a J(E) con la topología $\sigma(E^{**},E^*)_{|J(E)}$, J : E $\to$ J(E) resulta un isomorfismo. Ésto último se ve de la caracterización de las redes en (E,$\sigma(E,E^*)$), y en (J(E),$\sigma(E^{**},E^*)_{|J(E)}$).

Teorema VIII.27 *Si E es un espacio de Banach, son equivalentes las siguientes proposiciones :*

(a) E es reflexivo.

(b) E^* es reflexivo.
(c) $\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**})$.
(d) B_E es débilmente compacto.

Demostración:

(a)⇒(c) es obvio pues E=E**.

(d)⇒(a) Identificando J(E) con E, las topologías $\sigma(E^{**}, E^*)_{|J(E)}$ y $\sigma(E, E^*)$ son equivalentes. Por lo tanto, J(E) es $\sigma(E^{**}, E^*)-$ compacto, y entonces es $\sigma(E^{**}, E^*)-$ cerrado. Como, $J(\mathrm{B}_E)$ es $\sigma(E^{**}, E^*)-$ denso en $\mathrm{B}_{E^{**}}$(Goldstine) resulta que $J(\mathrm{B}_{E^{**}})$=$\mathrm{B}_{E^{**}}$. Pero entonces $E = E^{**}$.

(c)⇒(b) Por el teorema de Alaoglu, B_{E^*} es $\sigma(E^*, E)-$ compacto. Por (c) las topologías son equivalentes, entonces B_{E^*} es $\sigma(E^*, E^{**})-$ compacto. Así, E^* está en las hipótesis de (d). Ya probamos que (d) implica (a).Por lo tanto,E^* es reflexivo.

(b)⇒(a)$\mathrm{B}_E \subseteq \mathrm{B}_{E^{**}}$,$\mathrm{B}_E = \overline{\mathrm{B}_E}^{\| \|_{E^{**}}}$. Como B_E es convexo y $\| \|_{E^{**}} -$ cerrado resulta $\sigma(E^{**}, E^{***})-$ cerrado en E^{**} (propiedad anterior). E^* es reflexivo, por lo tanto B_E es $\sigma(E^{**}, E^*)-$ cerrado. Sabemos que B_E es $\sigma(E^{**}, E^*)-$ denso en $\mathrm{B}_{E^{**}}$(Goldstine). Entonces, B_E=$\mathrm{B}_{E^{**}}$, que implica que E sea reflexivo.

(a)⇒(d)Por el teorema de Alaoglu, $\mathrm{B}_{E^{**}}$ es $\sigma(E^{**}, E^*)-$ compacto. Como E=E**, $\mathrm{B}_{E^{**}}$ es $\sigma(E, E^*)-$ compacto. □

Corolario VIII.28 *Sea E un espacio de Banach reflexivo y $S \subseteq E$ subespacio cerrado. Entonces S es reflexivo.*

Demostración:

En $\mathrm{B}_S, \sigma(S, S^*) = \sigma(E, E^*)_{|S}$. Por lo tanto, B_S es $\sigma(E, E^*)-$ cerrado en B_E, y cerrado dentro de un compacto es compacto.

Corolario VIII.29 *Sean E un espacio de Banach, $S \subseteq E$ un subespacio cerrado. E es reflexivo si y sólo si S y E/S son reflexivos.*

Demostración:

Tenemos la siguiente sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathrm{S} \xrightarrow{i} \mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{E/S} \longrightarrow 0$

El adjunto de esta sucesión es exacto también:$0 \longrightarrow \mathrm{S}^{**} \xrightarrow{i} \mathrm{E}^{**} \xrightarrow{\pi} (\mathrm{E/S})^{**} \longrightarrow 0$

y el diagrama conmuta
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{S} & \xrightarrow{i} & \mathrm{E} & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{E/S} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow J_1 & & \downarrow J_2 & & \downarrow J_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{S}^{**} & \xrightarrow{i} & \mathrm{E}^{**} & \xrightarrow{\pi} & (\mathrm{E/S})^{**} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por el corolario anterior, si J_2 es isomorfismo isométrico entonces J_1 también. Probar que J_3 resulta un isomorfismo es un ejercicio (fácil) de álgebra II.

La vuelta también es un ejercicio fácil de álgebra II. □

Proposición VIII.30 *Sea E reflexivo, $S \subseteq E$ un subespacio cerrado, $x_0 \in E \backslash S$. Entonces existe $y_0 \in S$ tal que $\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in S} \|x_0 - y\| = d(x_0, S)$. Comparar con el Corolario I.47 del Capítulo I.*

DEMOSTRACIÓN:

Vamos a probar que la función x $\to \|x - x_0\|$ es $\sigma(E, E^*)-$ semicontinua inferiormente, es decir, si y$_n \overset{w}{\to} y$ entonces $\|y - x_0\| \leq \liminf \|y_n - x_0\|$.

Supongamos que no: existen entonces $\varepsilon > 0$ y una subsucesión y$_{n_j}$ tales que $\|y - x_0\| > \lim \left\|y_{n_j} - x_0\right\| + \frac{\varepsilon}{2}$. Sean A $= \{y\}$, B $=$ B(x$_0, \lim \left\|y_{n_j} - x_0\right\| + \frac{\varepsilon}{2}$). Ambos conjuntos son $\| \; \|-$ cerrados, convexos y A es compacto.De un corolario de la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach sabemos que existen f $\in E^*, \alpha \in$IR,$\delta > 0$ tales que para todo a $\in$ A, b $\in$ B

Re f(a)$\leq \alpha < \alpha + \delta \leq$ Re f(b)

Pero esto es un absurdo ya que f(y$_{n_j}$) $\to$ f(y).

Si d $= d(x_0$,S), entonces S $\cap \{x : \|x - x_0\| \leq 2d\}$ es $\sigma(E, E^*)-$ compacto y una función $\sigma(E, E^*)-$ semicontinua inferiormente alcanza su mínimo sobre un compacto. $\square$

IX
OPERADORES COMPACTOS EN ESPACIOS DE HILBERT

Primero, algunos resultados útiles:

Lema IX.1 *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T \in L(\mathcal{H})$.*

(a) $\|T\mathrm{x}\| = \||T|\,\mathrm{x}\|$ y $\ker|T| = \ker T$.
(b) $\mathrm{R}(T)$ es cerrado si y sólo si $\mathrm{R}(|T|)$ es cerrado.

Demostración:

Ejercicio 1.

Teorema IX.2 (Descomposición polar) *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T \in L(\mathcal{H})$. Entonces existe una única isometría parcial $U \in L(\mathcal{H})$ tal que $T = U\,|T|$ y $\ker U = \ker T$.*

Demostración:

Definimos $U : \mathrm{R}(|T|) \to \mathcal{H}$ como $U\mathrm{y} = T\mathrm{x}$ donde $\mathrm{y} = |T|\mathrm{x}$. Está bien definida por el ítem (a) del lema anterior, es lineal, y además

$\|U\mathrm{y}\| = \|T\mathrm{x}\| = \||T|\,\mathrm{x}\| = \|\mathrm{y}\|$.

Por lo tanto U resulta una isometría; en particular es continua. Entonces podemos extenderla de manera isométrica a $\overline{\mathrm{R}(\,|T|\,)}$.Ahora bien, sabiendo que $|T|^* = |T|$ y usando el ítem (a) del lema anterior :

$\overline{\mathrm{R}(\,|T|\,)} = (\ker|T|^*)^\perp = (\ker|T|)^\perp = (\ker T)^\perp$

En definitiva, definimos U sobre $(\ker T)^\perp$.Luego extendemos U sobre $\ker T$ como el operador nulo.Como $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{R}(\,|T|\,)} \bigoplus \ker|T| = (\ker T)^\perp \bigoplus \ker T$, extendemos U por linealidad a todo el espacio y está bien definida. Sea $\mathrm{x} \in \mathcal{H}$, $\mathrm{x} = \mathrm{a} + \mathrm{b}$ con $\mathrm{a} \in \ker T$, $\mathrm{b} \in (\ker T)^\perp$. Entonces

$\|U\mathrm{x}\|^2 = \|U(\mathrm{a} + \mathrm{b})\|^2 = \|U\mathrm{b}\|^2 = \|\mathrm{b}\ \|^2 \leq \|\mathrm{a}\ \|^2 + \|\mathrm{b}\ \|^2 = \|\mathrm{x}\ \|^2$ y por lo tanto $\|U\| = 1$.

Veamos que $\ker U = \ker T$:

Puesto que U es el operador nulo sobre $\ker T$, es claro que $\ker T \subseteq \ker U$. Sea $\mathrm{x} \in \ker U$, $\mathrm{x} = \mathrm{a} + \mathrm{b}$ con $\mathrm{a} \in \ker T$, $\mathrm{b} \in (\ker T)^{\perp}$:

$0 = U\mathrm{x} = U\mathrm{a} + U\mathrm{b} = U\mathrm{b}$ pues $U_{|kerT:} = 0$, por lo tanto

$0 = \|U\mathrm{x}\| = \|U\mathrm{b}\| = \|\mathrm{b}\ \|$.(porque U es isometría sobre $(\ker T)^{\perp}$).Es decir, $\mathrm{x} = \mathrm{a} \in \ker T$.

La unicidad es clara del hecho que $\mathcal{H}$ es suma directa de $\overline{\mathrm{R}(\ |T|\ )}$ y $\ker T$; y dos tales U, V tienen por núcleo a $\ker T$ y valen lo mismo restrigidas a $\overline{\mathrm{R}(\ |T|\ )}$. $\square$

Lema IX.3 *Un $B \in L(\mathcal{H})$ puede escribirse como combinación lineal de cuatro operadores unitarios.*

Demostración:

Dada la identidad B=$\frac{1}{2}(B$+$B^*)$-$\frac{1}{2}i(B$-$B^*)$, vemos que B puede ser escrito como combinación lineal de dos operadores autoadjuntos.Sin pérdida de generalidad, supongamos que A es autoadjunto y $\|A\| \leq 1$.Entonces $A \pm (\mathrm{I} - A^2)^{1/2}$ son operadores unitarios y A=$\frac{1}{2}(A + (\mathrm{I} - A^2)^{1/2}) + \frac{1}{2}(A - (\mathrm{I} - A^2)^{1/2})$. $\square$

IX.1 Operadores de Hilbert-Schmidt (1):

Definición IX.4 *Sea $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ un conjunto ortonormal completo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Un operador lineal acotado T se llama operador de Hilbert-Schmidt si la serie $\sum\limits_{\substack{\alpha \in A \\ a}} |T\,(x_\alpha)|^2$ es finita.En este caso llamamos la norma de Hilbert-Schmidt ó norma doble*

$$\|T\| = \left\{ \sum_{\alpha \in A} |T\,(x_\alpha)|^2 \right\}^{1/2}.$$

Lema IX.5 *La norma de Hilbert-Schmidt es independiente de la base ortonormal usada en la definición.Además,$|T| \leq \|T\|$ y $\|T\| = \|T^*\|$.*

Demostración:

Sean $\|T\|_A$, $\|T\|_B$ las normas dobles de T definidas en términos de los sistemas ortonormales completos $\{x_\alpha : \alpha \in A\}, \{x_\beta : \beta \in B\}$ respectivamente. Usando la igualdad de Parseval $\|x\|^2 = \sum_\beta |\langle x,y_\beta\rangle|^2$, vemos que

$$\begin{aligned} \|T\|_A^2 &= \sum_\alpha |T(x_\alpha)|^2 = \sum_\alpha\sum_\beta |\langle T(x_\alpha),y_\beta\rangle|^2 \\ &= \sum_\beta\sum_\alpha |\langle x_\alpha,T^*(y_\beta)\rangle|^2 \\ &= \sum_\beta |T^*(y_\beta)|^2 \\ &= \|T^*\|_B^2 . \end{aligned}$$

Si tomamos el mismo sistema ortonormal llegamos a $\|T\|_A^2 = \|T^*\|_A^2$, y entonces $\|T\|_A^2 = \|T^*\|_B^2 = \|T\|_B^2$.

Finalmente, si $\varepsilon > 0$, sea x_0 de norma uno tal que $|T|^2 = |T(x_0)|^2 + \varepsilon$.Como existe un sistema ortonormal completo que contiene a x_0,tenemos que $|T|^2 \leq |T(x_0)|^2 + \varepsilon$ y por lo tanto $|T| \leq \|T\|$. □

Corolario IX.6 *Si T es un operador de Hilbert-Schmidt y $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ es cualquier sistema ortonormal completo en $\mathcal{H}$, entonces* $\|T\| = \left\{ \sum_{\alpha,\beta\in A} |\langle T(x_\alpha),x_\beta\rangle|^2 \right\}^{1/2}$.

Demostración:

Dado que $|T(x_\alpha)|^2 = \sum_\beta |\langle T(x_\alpha),y_\beta\rangle|^2$ y como los términos son positivos, existe la suma doble. □

Teorema IX.7 *El conjunto HS={operadores de Hilbert-Schmidt} es un espacio de Banach con la norma doble.Además, HS es un álgebra de Banach y vale la desigualdad* $\|TS\| \leq \|T\| . \|S\|$ *para todo S,T en HS.*

Demostración:

Claramente, si T pertenece a HS, αT también y $\|\alpha T\| = |\alpha| . \|T\|$ .Sean T,S en HS y $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ un sistema ortonormal completo en $\mathcal{H}$.Del corolario anterior y la desigualdad de Minkowski se sigue que

$$\begin{aligned} \|S+T\| &= \left\{ \sum_{\alpha,\beta\in A} |\langle (S+T)(x_\alpha),x_\beta\rangle|^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \sum_{\alpha,\beta\in A} |\langle T(x_\alpha),x_\beta\rangle|^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{\alpha,\beta\in A} |\langle S(x_\alpha),x_\beta\rangle|^2 \right\}^{1/2} \\ &= \|T\| + \|S\| . \end{aligned}$$

Por lo tanto $T+S \in HS$. Para ver que HS es completo, sea $\{T_n\}$ en HS tal que $\|T_n\text{-}T_m\| \to 0$. Del lema anterior se sigue que $|T_n\text{-}T_m| \to 0$ y por lo tanto existe $T \in B(\mathcal{H})$ tal que $|T_n\text{-}T| \to 0$. Sea k una cota superior de $\{\|T_n\|\}$. Si A_1 es cualquier subconjunto finito de A, entonces

$$\sum_{\alpha\in A_1} |T(\mathrm{x}_\alpha)|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha\in A_1} |T_n(\mathrm{x}_\alpha)|^2 \leq k^2$$

y por lo tanto $\|T\|^2 = \sum\limits_{\alpha\in A} |T(\mathrm{x}_\alpha)|^2 \leq \mathrm{k}^2$. Así, T pertenece a HS. Sea m_ε tal que $\|T_n\text{-}T_m\| < \varepsilon$ para $\mathrm{n,m} \geq \mathrm{m}_\varepsilon$. Entonces, para $\mathrm{m} > \mathrm{m}_\varepsilon$, se tiene

$$\begin{array}{rcl} \|T - T_m\|^2 & = & \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\alpha\in A_1} |(T\text{-}T_m)(\mathrm{x}_\alpha)|^2 \\ & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \sup \|T_n\text{-}T_m\|^2 \\ & \leq & \varepsilon^2 \end{array}$$

de donde se sigue que $\|T\text{-}T_m\| \leq \varepsilon$ para $\mathrm{m} > \mathrm{m}_\varepsilon$ y por lo tanto $T_n \underset{\|\,\|}{\to} T$.

Finalmente, sea T en HS y B en $B(\mathcal{H})$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \|BT\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |BT(\mathrm{x}_\alpha)|^2 & \leq & |B|^2 \sum\limits_{\alpha\in A} |T(\mathrm{x}_\alpha)|^2 \\ & = & |B|^2 . \|T\|^2 \end{array}$$

, con lo cual $\|TB\| = \|(TB)^*\| = \left\|B^{*T*}\right\| \leq |B| . \|T\|$.

En particular, si S pertenece a HS, como $|S| \leq \|S\|$ tenemos que

$$\|ST\| \leq |S| . \|T\| \leq \|S\| . \|T\| \ .\square$$

Teorema IX.8 *Todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto y existe una sucesión de operadores de Hilbert-Schmidt de rango finito que converge a él en la norma doble.*

Demostración:

Sea $\{\mathrm{x}_\alpha : \alpha \in A\}$ un conjunto ortonormal completo en $\mathcal{H}$ y sea T en HS. Dado que $\|T\|^2 = \sum\limits_{\alpha\in A} |T(\mathrm{x}_\alpha)|^2 < \infty$, sólo una cantidad numerable de los $|T(\mathrm{x}_\alpha)|$ pueden ser no nulos.Además, para cada natural n existe un subconjunto finito $A_n \subseteq A$ tal que $\sum\limits_{\alpha\notin A_n} |T(\mathrm{x}_\alpha)|^2 < \frac{1}{n^2}$. Para cada n definimos el operador lineal T_n como $T_n(\mathrm{x}_\alpha)$=$T(\mathrm{x}_\alpha)$ si $\alpha \in A_n$, $T_n(\mathrm{x}_\alpha)$=0 si no. El rango de T_n es finito y $\|T\text{-}T_n\|^2 = \sum\limits_{\alpha\notin A_n} |T(\mathrm{x}_\alpha)|^2 < \frac{1}{n^2}$, y por lo tanto $|T\text{-}T_n| \leq \|T\text{-}T_n\| < \frac{1}{n}$. Entonces $\{T_n\}$ converge en los dos espacios, HS y $\mathcal{H}$, a T. Por la convergencia en $\mathcal{H}$ resulta T un operador compacto. $\square$

Lema IX.9 *Si S y T son operadores de Hilbert-Schmidt en $\mathcal{H}$ y $\{x_\alpha\}$ es una base ortonormal completa de $\mathcal{H}$, entonces la serie $\sum_\alpha \langle S(x_\alpha),T^*(x_\alpha)\rangle$ converge absolutamente a un límite que no depende de la base elegida.*

Demostración:

Sean $\{\mathrm{x}_\alpha\}$,$\{\mathrm{y}_\beta\}$ dos bases ortonormales de $\mathcal{H}$. Por la desigualdad de Schwarz,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta}\left|\langle S(\mathrm{x}_\alpha),\mathrm{y}_\beta\rangle\,\overline{\langle T^*(\mathrm{x}_\alpha),\mathrm{y}_\beta\rangle}\right| \quad &\leq \quad \left\{\sum_{\alpha,\beta}|\langle S(\mathrm{x}_\alpha),\mathrm{y}_\beta\rangle|^2\right\}^{1/2}\cdot\left\{\sum_{\alpha,\beta}|\langle T^*(\mathrm{x}_\alpha),\mathrm{y}_\beta\rangle|^2\right\}^{1/2}\\
&= \quad \left\{\sum_{\alpha,\beta}|S(\mathrm{x}_\alpha)|^2\right\}^{1/2}\\
&= \quad \|S\|\cdot\|T^*\|\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la serie doble $\sum_{\alpha,\beta}\left|\langle S(\mathrm{x}_\alpha),\mathrm{y}_\beta\rangle\,\overline{\langle T^*(\mathrm{x}_\alpha),\mathrm{y}_\beta\rangle}\right|$ converge absolutamente y entonces las series $\sum_\alpha\sum_\beta$, $\sum_\beta\sum_\alpha$ existen y son iguales. Por un teorema viejo,

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha\langle S(\mathrm{x}_\alpha),T^*(\mathrm{x}_\alpha)\rangle \quad &= \quad \sum_\alpha\sum_\beta\left|\langle S(\mathrm{x}_\alpha),\mathrm{y}_\beta\rangle\,\overline{\langle T^*(\mathrm{x}_\alpha),\mathrm{y}_\beta\rangle}\right|\\
&= \quad \sum_\beta\sum_\alpha\left|\langle T(\mathrm{y}_\beta),\mathrm{x}_\alpha\rangle\,\overline{\langle S^*(\mathrm{y}_\beta),\mathrm{x}_\alpha\rangle}\right|\\
&= \quad \sum_\beta\langle T(\mathrm{y}_\beta),\mathrm{S}^*(\mathrm{y}_\beta)\rangle\,.
\end{aligned}$$

De lo que se deduce que no depende de la base escogida. Tomando $\{\mathrm{y}_\beta\}$ igual a $\{\mathrm{x}_\alpha\}$ vale que $\sum_\alpha\langle S(\mathrm{x}_\alpha),T^*(\mathrm{x}_\alpha)\rangle=\sum_\alpha\langle T(\mathrm{x}_\alpha),S^*(\mathrm{x}_\alpha)\rangle$, y resulta una expresión simétrica. □

Definición IX.10 *Si S,T son operadores de Hilbert-Scmidt en $\mathcal{H}$, definimos la traza de S y T $tr(S,T)=\sum_\alpha\langle S(x_\alpha),T^*(x_\alpha)\rangle$ donde $\{x_\alpha\}$ es cualquier base ortonormal de $\mathcal{H}$.*

Teorema IX.11 *La función traza es una función simétrica bilineal. Además vale que $|tr(S,T)|\leq\|S\|\cdot\|T\|$, $tr(T,T)=\|T\|^2$.*

Las demostraciones son casoso particulares de la demostración del lema anterior.

Corolario IX.12 *HS resulta un espacio de Hilbert con el producto interno definido así: $\langle S,T\rangle = tr(S,T^*)$.*

De aquí en adelante $\mathcal{H}$ será un espacio de Hilbert separable.

IX.2 Operadores de Traza (1):

Definición IX.13 *Sea K compacto en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, K$\geq$0. Sabemos que K=*$\sum_{k\geq 1} \lambda_k P_{N_k}$*. Como K es positivo, se tiene que los autovalores* $\lambda_k \geq 0$*. Llamamos la raíz cuadrada de K al operador* $\sum_{k\geq 1} \lambda_k^{1/2} P_{N_k}$ *y lo notamos* $K^{1/2}$.

Proposición IX.14 *(a)* $K^{1/2}$ *verifica* $K^{1/2}.K^{1/2} = K$.
(b) $K^{1/2}$ *es el único operador positivo tal que verifica (a).*

Definición IX.15 *Dado K compacto en $\mathcal{H}$, K^*K, KK^* son operadores compactos positivos, llamamos operador módulo de K a* $|K| = (K^*K)^{1/2}$*. A los autovalores de $|K|$ se los llama* **valores singulares** *de K.*

Proposición IX.16 $|K|$ *es el único operador positivo tal que* $|K|^2 = K^*K$.

Definición IX.17 *Sea 1$\leq$ p $<\infty$,definimos* $V_p = \{K \text{ compacto} : \{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$*, donde* μ_k *son los valores singulares de* $K\}$.

Observación IX.18 *Si p=1,* $V_1 = T(\mathcal{H})$ *y sus elementos se llaman operadores traza (ver la definición de abajo). Si p=2,* $V_2 = HS(\mathcal{H})$ *y sus elementos son los "operadores nucleares" o de Hilbert-Schmidt, con los que hemos estado trabajando.*

Definición IX.19 *Sea* $A \in B(\mathcal{H}), \{e_i : i \in I\}$ *una base ortonormal de $\mathcal{H}$, definimos la traza de A,Tr(A)=*$\sum_{i\in I} < Ae_i, e_i >$ *cuando esta suma exista.*

Ejercicio 16 *Probar que la definición de Tr(A) no depende de la base ortonormal elegida.*

Proposición IX.20 *Sea K compacto,*$\{\mu_k : k \in N\}$ *los valores singulares de K. Entonces vale*

$$\sum_{k\geq 1} \mu_k = Tr(|K|).$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de autovalores de $(K^*K)^{1/2}$, entonces

$$Tr((K^*K)^{1/2}) = \sum_{n\geq 1} < (K^*K)^{1/2} e_n, e_n > = \sum_{n\geq 1} \lambda_n = \sum_{k\geq 1} \mu_k \ . \ \square$$

Proposición IX.21 *Si* $A \geq 0$*,entonces* $Tr(A) < \infty$ *implica que A es compacto.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $A \geq 0$, existe $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} < Ae_n, e_n >$(aunque no sea finito).Sea B acotado tal que$A$=B^*B; tenemos que $\sum\limits_{n=1}^{N} < Ae_n, e_n > < \infty$; entonces $\sum\limits_{n=1}^{N} < Be_n, Be_n > < \infty$, y

$$\sum_{n=1}^{N} < Be_n, Be_n > = \sum_{n=1}^{N} \|Be_n\|^2 .$$

.Sea N tal que $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \|Be_n\|^2 < \varepsilon$. Definimos A_N(x):=$\sum\limits_{n=1}^{N} < A(\mathrm{x}), e_n >$, C$_N$(x):=$\sum\limits_{n=N}^{\infty} < A(\mathrm{x}), e_n >$. C$_N$ está bien definido y es acotado porque A(x)=$\sum\limits_{n=1}^{\infty} < A(\mathrm{x}), e_n >$, A_N es compacto pues dim(R(A_N))<∞.

Queremos ver que $\|\mathrm{C}_N\| < \varepsilon$. Dado x de norma uno,

$$\|\mathrm{C}_N(\mathrm{x})\|^2 = \left\| \sum_{n=N}^{\infty} < A(x), e_n > \right\|^2 ,$$

llamando $z = \sum_{n=1}^{\infty} < A(x), e_n >$, de la igualdad de Parseval tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathrm{z}\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |< z, e_k >|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |< A(x), e_k >|^2 \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty} |< B(x), B(e_k) >|^2 , \end{aligned}$$

y de la desigualdad de Cauchy-Swarz deducimos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{\infty} |< B(x), B(e_k) >|^2 &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|B(x)\|^2 \|B(e_k)\|^2 \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|B\|^2 . \|B(e_k)\|^2 \\ &< \|B\|^2 .\varepsilon \end{aligned}$$

Resumiendo,tenemos una serie de operadores compactos A_N que convergen a A, y por lo tanto A es compacto. □

Lema IX.22 *Sea A un operador autoadjunto, q* $\in \mathbb{R}[X]$, *entonces q(A) también es autoadjunto y*

$$\|q(A)\| = \sup_{\mu \in \Gamma(\mathrm{q}(A))} |\mu| .$$

Demostración:

Ejercicio para el lector.

Proposición IX.23 *Si $A \geq 0$,vale que A=H^2 para algún operador positivo H.*

DEMOSTRACIÓN:

Por ser A un operador positivo vale que $\Gamma(A)\subset [0,\mathrm{M}] = [0, \|A\|]$ que es un conjunto compacto de R. La función f:$[0, \|A\|] \to R$, f(t)=$t^{1/2}$ es claramente continua. Los polinomios reales y positivos en $[0, \|A\|]$ son densos en $(C(0, \|A\|), \| \quad \|_\infty) \cap \{f \geq 0 \text{ en } [0, \|A\|]\}$ pues están dentro de las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass. Sean $\mathrm{p}_n \overset{\| \|_\infty}{\rightarrow}$ f polinomios reales y positivos en $[0, \|A\|]$.

Entonces $\mathrm{p}_n(A)$ es un operador acotado para todo n,y queremos ver que $\mathrm{p}_n(A) \to$H positivo que satisface $\mathrm{H}^2 = A$.

Veamos que $\{\mathrm{p}_n(A)\}$ es una sucesión convergente: calculemos $\|\mathrm{p}_{n+k}(A)\text{-}\mathrm{p}_n(A)\|$; por el Lema anterior,

$$\|\mathrm{p}_{n+k}(A)\text{-}\mathrm{p}_n(A)\| = \sup_{\mu \in \Gamma(\mathrm{p}_{n+k}(A)\text{-}\mathrm{p}_n(A))} |\mu| .$$

Pero μ =$(\mathrm{p}_{n+k}\text{-}\mathrm{p}_n)(\lambda)$ para algún $\lambda \in \Gamma(A)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\mathrm{p}_{n+k}(A)\text{-}\mathrm{p}_n(A)\| &= \sup_{\lambda \in \Gamma(A)} |(\mathrm{p}_{n+k}\text{-}\mathrm{p}_n)(\lambda)| \\ &= \sup_{t \in [0, \|A\|]} |(\mathrm{p}_{n+k}\text{-}\mathrm{p}_n)(t)| \\ &= \|\mathrm{p}_{n+k}\text{-}\mathrm{p}_n\|_\infty \to_n 0. \end{aligned}$$

Como $\{\mathrm{p}_n(A)\}$ es de Cauchy en $B(\mathcal{H})$, p_n(A)$\to$ H para algún H autoadjunto, y $\mathrm{p}_n(\mathrm{A})^2 \to \mathrm{H}^2$. Además, $(\mathrm{p}_n(\mathrm{A}))^2 = \mathrm{p}_n^2(\mathrm{A})$, pero $\mathrm{p}_n^2 \to$ t en $[0, \|\mathrm{A}\|]$; usando además el lema anterior tenemos

$$\left\|p_n^2(A) - A\right\| = \left\|(p_n^2 - t)(A)\right\| \leq \left\|(p_n^2 - t)\right\|_\infty \to 0$$

Es decir, $\mathrm{p}_n^2(\mathrm{A}) \to$ A. □

Teorema IX.24 (Forma canónica para operadores) *Sea A un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existen sistemas ortonormales (no necesariamente completos!) $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}, \{\psi_n\}_{n\geq 1}$ y números reales positivos $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ con $\lambda_n \to 0$ tal que*

$A = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle \; . \; , \psi_n \rangle \varphi_n$. La suma que puede ser finita o infinita, converge en norma. Recordemos que los números $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ son los autovalores de $|A|$, y se los llama los valores singulares de A (ver la Definición **??**).

DEMOSTRACIÓN:

Dado que A es compacto, también lo es A^*A.Como A^*A es compacto y autoadjunto, por el teorema de Hilbert-Schmidt (Teorema VII.21), existe un conjunto ortonormal $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ tal que $A^*A\psi_n = \mu_n\psi_n$ con $\mu_n \neq 0$,positivos y A^*A se anula en el complemento ortogonal de $\{\psi_n\}_{n=1}^N$. Sean λ_n las raíces cuadradas positivas de μ_n y sean $\varphi_n = A\psi_n/\lambda_n$.Los φ_n resultan ortonormales y haciendo una pequeña cuenta se ve que $A\psi = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle \psi, \psi_n \rangle \varphi_n$.

Y los λ_n son los autovalores de $|A|$. □

IX.3 Operadores de Traza (2):

Teorema IX.25 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal. Entonces, para cualquier operador positivo continuo A definimos tr A=$\sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n, \varphi_n\rangle$. Este número es llamado la* **traza** *de A y es independiente de la base ortonormal elegida. Valen además las siguientes propiedades:*

(a) tr($A + B$) = tr A + tr B.
(b) tr(λA) = λtr A para todo $\lambda \geq 0$.
(c) tr(UAU^{-1}) = tr A para todo operador unitario U.
(d) Si 0$\leq A \leq B$, etonces tr $A \leq$ tr B.

DEMOSTRACIÓN:

Dadas dos bases ortonormales $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, definimos
$\mathrm{tr}_\varphi\ A$=$\sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n, \varphi_n\rangle$, $\mathrm{tr}_\psi A$.=$\sum_{n=1}^{\infty} \langle A\psi_n, \psi_n\rangle$. Tenemos que
$\mathrm{tr}_\varphi A$=$\sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n, \varphi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| A^{1/2}\varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty} \left| \left\langle A^{1/2}\varphi_n, \psi_m \right\rangle \right|^2) =$
$\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\varphi_n, A^{1/2}\psi_m \right) \right|^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| A^{1/2}\psi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n, \varphi_n\rangle$ =$\mathrm{tr}_\psi A$.
Vale itercambiar el orden de las sumas pues los términos son positivos.

Las propiedades (a),(b),(d) son obvias. Para probar (c), vemos que si $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal, entonces también lo es $\{U\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por lo tanto,

$$tr(UAU^{-1}) = tr_{(U\varphi)}(UAU^{-1}) = tr_\varphi A = trA.\square$$

Definición IX.26 *Un operador $A \in L(\mathcal{H})$ es un operador traza si tr $|A| < \infty$. La familia de operadores traza se nota S_1.*

Proposición IX.27 *S_1 es un *-ideal en $L(\mathcal{H})$, es decir*

(a) S_1 es un espacio vectorial.
(b) Si A es un operador traza y B es un operador continuo, entonces AB, BA son operadores traza.
(c) Si A es un operador traza, entonces A^* también lo es.

DEMOSTRACIÓN:

(a) Dado que $|\lambda A| = |\lambda|\,|A|$ para todo λ complejo, S_1 es cerrado bajo multiplicación por escalar. Queremos ver que si A y B son operadores traza, entonces su suma también. De la descomposición polar sabemos que existen isometrías parciales U,V,W tales que $A + B = U\,|A + B\,|$, $A = V\,|A|$, $B = W\,|B|$.

Tenemos entonces que
$\sum_{n=1}^{N} \langle |A + B|\,\varphi_n, \varphi_n\rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle U^*(A + B)\varphi_n, \varphi_n\rangle \leq$
$\sum_{n=1}^{N} |\langle U^*\mathrm{V}\,|A|\,\varphi_n, \varphi_n\rangle| + \sum_{n=1}^{N} |\langle U^*\mathrm{W}\,|B|\,\varphi_n, \varphi_n\rangle|$.
Seguimos acotando:
$\sum_{n=1}^{N} |\langle U^*\mathrm{V}\,|A|\,\varphi_n, \varphi_n\rangle| \leq \sum_{n=1}^{N} \left\| |A|^{1/2}\,\mathrm{V}^*U\varphi_n \right\| \left\| |A|^{1/2}\,\varphi_n \right\| \leq$
$\leq (\sum_{n=1}^{N} \left\| |A|^{1/2}\,\mathrm{V}^*U\varphi_n \right\|^2)^{1/2}(\sum_{n=1}^{N} \left\| |A|^{1/2}\,\varphi_n \right\|^2)^{1/2}$.

Queremos ver que $\sum_{n=1}^{N} \left\| |A|^{1/2} \mathrm{V}^{*} U\varphi_n \right\|^2 \leq$ tr $|A|$, para lo que nos basta probar que tr$(U^{*}\mathrm{V}|A|\mathrm{V}^{*}U)\leq$tr $|A|$.

Para probar esto último, tomamos una base ortonormal $\{\varphi_n\}$ donde cada φ_n pertenece a Ker U o a (Ker $U)^{\perp}$. Así vemos que tr$(U^{*}\mathrm{V}|A|\mathrm{V}^{*}U)\leq$tr $(\mathrm{V}|A|\mathrm{V}^{*})$. Análogamente, tomando una base ortonormal $\{\psi_n\}$ donde cada ψ_n está en Ker V o en (Ker V)$^{\perp}$ llegamos a tr $(\mathrm{V}|A|\mathrm{V}^{*})\leq$tr $|A|$.

(b) Por el Lema IX.3, sabemos que cada $B \in L(\mathcal{H})$ se escribe como combinación lineal de cuatro operadores unitarios.Por (a), basta ver que si A es un operador traza, U es unitario, entonces AU, UA también son operadores traza.Pero $|UA| = |A|$ y $|AU| = U^{-1}|A|U$, por la parte (c) del teorema anterior AU, UA están en S_1.

(c) Sean A=$U|A|$ y A^{*}=V$|A^{*}|$ las descomposiciones polares de A y A^{*}.Entonces $|A^{*}|$ =V$^{*}|A|U^{*}$.Si $A \in S_1$,entonces $|A| \in S_1$, por (b) $|A^{*}| \in S_1$ y A^{*}=V$|A^{*}| \in S_1$. □

Teorema IX.28 *Sea* $\| \ . \ \|_1$ *definida en* S_1 *por* $\|A\|_1 =$ *tr* $|A|$. *Entonces* S_1 *resulta un espacio de Banach con norma* $\| \ . \ \|_1$ *y* $\|A\| \leq \|A\|_1$.

Demostración:

Del teorema anterior sabemos que $\| \ . \ \|_1$ es una norma. Para ver la desigualdad entre las normas, dado $\varepsilon > 0$, sea x_0 un elemento de norma unitaria tal que $\|T\|^2 \leq \|Tx_0\|^2 + \varepsilon$.Dado que existe un sistema ortonormal completo que contiene al elemento x_0, tenemos que $\|T\|^2 \leq \|T\|_1^2 + \varepsilon$ y por lo tanto $\|T\|^2 \leq \|T\|_1^2$.

Sea A_n una $\| \ . \ \|_1 -$ sucesión de Cauchy.De la desigualdad antes probada sabemos que también es una $\| \ . \ \| -$ sucesión de Cauchy.Sea A el límite de A_n (como $\| \ . \ \| -$ sucesión).También es cierto que $|A_n| \overset{\|.\|}{\to} |A|$ .Queremos ver que A es un operador traza: sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal, M una cota superior para tr A_n, y $\mathrm{S}_N = \sum_{n=1}^{N} \langle |A| \varphi_n, \varphi_n \rangle$ .Dado $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que para todo $m \geq n_0$ vale que $\| \ |A| - |A_m| \ \| < \frac{\varepsilon}{N}$.$T$enemos

$\mathrm{S}_N = \sum_{n=1}^{N} \langle |A| \varphi_n, \varphi_n \rangle . = \sum_{n=1}^{N} \langle |A_m| \varphi_n, \varphi_n \rangle . + \sum_{n=1}^{N} \langle (|A| - |A_m|)\varphi_n, \varphi_n \rangle <$
$< \sum_{n=1}^{N} \langle |A_m| \varphi_n, \varphi_n \rangle + \varepsilon \leq \mathrm{tr}(A_m) + \varepsilon < M + \varepsilon.$

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$ existe un n_1 tal que para todo $m, r \geq n_1$ vale que $\|A_r - A_m\|_1 < \varepsilon$. Entonces, para $m \geq n_1$,

$\sum_{n=1}^{N} \langle |A - A_m| \varphi_n, \varphi_n \rangle = \lim\limits_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle |A_r - A_m| \varphi_n, \varphi_n \rangle \leq \lim\limits_{r\to\infty} \sup \|A_r - A_m\|_1 \leq \varepsilon$

de donde se sigue que $\|A - A_m\|_1 \leq \varepsilon$ para $m > n_1$. □

Teorema IX.29 *Todo operador traza es compacto. Un operador compacto A pertenece a* S_1 *si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ *donde* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *son los valores singulares de A. De hecho, tr(*$|A|$*)* $= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$.

Demostración:

Como $A \in S_1$, $|A|^2 \in S_1$, por lo tanto tr$(|A|^2)$=$\sum_{n=1}^{\infty} \|A\varphi_n\|^2 < \infty$ para toda base ortonormal $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ .Sea $\psi \in [\varphi_1,...,\varphi_N]^{\perp}$ y $\|\psi\| = 1$ entonces tenemos que $\|A\psi\|^2 \leq$ tr$(|A|^2)$ - $\sum_{n=1}^{N} \|A\varphi_n\|^2$ pues $\{\varphi_{1,...,}\varphi_N, \psi\}$ puede extenderse para ser una base ortonormal.Por lo tanto $\sup\left\{ \|A\psi\| \ : \ \psi \in [\varphi_1,...,\varphi_N]^{\perp} \ \ \|\psi\| = 1 \right\} \to 0$ cuando $N \to \infty$.Así, la sucesión de operadores de rango finito $\sum_{n=1}^{\infty} \langle\ .,\varphi_n\rangle\, A\varphi_n$ converge en norma a A, y por lo tanto A es compacto.

De la forma canónica de los operadores compactos sabemos que existen sistemas ortonormales $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}, \{\psi_n\}_{n=1}^{N}$ y números reales positivos $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$ con $\lambda_n \to 0$ tal que $A = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle\ .\ ,\psi_n\rangle\, \varphi_n$. La suma que puede ser finita o infinita, converge en norma.Los números $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$ son los autovalores de $|A|$. Precisamente, $|A| = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle\ .\ ,\psi_n\rangle\, \psi_n$ donde esta suma también converge en norma.De esta última escritura se ve claramente que $\mathrm{tr}(|A|) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$. $\square$

Corolario IX.30 *Los operadores de rango finito son* $\|\quad\|_1 -$ *densos en* S_1.

IX.4 Operadores de Hilbert-Schmidt (2):

Definición IX.31 *Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador de Hilbert-Schmidt o nuclear si tr $T^*T < \infty$. La familia de operadores de Hilbert-Schmidt se nota S_2.*

Teorema IX.32 *(a) S_2 es un *-ideal.*

(b) S_2 Si A,B son operadores nucleares, entonces para toda base ortonormal $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \langle A^*B\varphi_n, \varphi_n\rangle$ converge absolutamente y su límite es independiente de la base ortonormal elegida.

(c) S_2 con el producto interno $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle_2$ definido como el límite de la serie de (b) es un espacio de Hilbert.

(d) Si $\|A\|_2 = (\langle A,A\rangle_2)^{1/2} = (\mathrm{tr}(A^*A))^{1/2}$, entonces $\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1$ y $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$.

(e) Todo operador nuclear es compacto y un operador compacto es nuclear si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$, donde λ_n son sus valores singulares.

(f) Los operadores de rango finito son $\|\ .\ \|_2 -$ densos en S_2.

(g) $A \in S_2$ si y sólo si $\{\|A\varphi_n\|\} \in l_2$ para alguna base ortonormal $\{\varphi_n\}$.

(h) $A \in S_1$ si y sólo si A=BC con B,C en S_2.

Demostración:

Con argumentos muy parecidos a los usados anteriormente para operadores traza, se prueban los ítems anteriores. La vuelta en (h) se deduce de la escritura $A = U\,|A|^{1/2}\,|A|^{1/2}$. $\square$

Teorema IX.33 *Si A es un operador traza y $\{\varphi_n\}$ cualquier base ortonormal,entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n, \varphi_n\rangle$ converge absolutamente y su límite es independiente de la elección de la base.*

Demostración:

Escribimos A=$U\,|A|^{1/2}\,|A|^{1/2}$. Entonces

$|\langle A\varphi_n, \varphi_n\rangle| \leq \left\||A|^{1/2U*}\,\varphi_n\right\| \left\||A|^{1/2}\,\varphi_n\right\|$. Por lo tanto

$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle A\varphi_n, \varphi_n\rangle| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} \left\||A|^{1/2U*}\,\varphi_n\right\|^2)^{1/2}(\sum_{n=1}^{\infty} \left\||A|^{1/2}\,\varphi_n\right\|^2)^{1/2}$. Como $|A|^{1/2U*}$ y $|A|^{1/2}$ son operadores nucleares, la suma converge.La demostración de la independencia de base es idéntica a la del caso $A \geq 0$. $\square$

Definición IX.34 *La función tr : $S_1 \to C$ definida tr $A = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle$ donde $\{\varphi_n\}$ es cualquier base ortonormal es llamada la* **traza.**

Observación IX.35 *No es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle| < \infty$ para alguna base ortonormal implique que A sea un operador traza. Para que $A \in S_1$ la suma debe ser finita para toda base ortonormal.*

Teorema IX.36 *(a) tr(.) es lineal.*

(b) tr $A^*=\overline{\text{tr}A}$.

(c) tr $AB =$ tr BA si $A \in S_1$, y $B \in L(\mathcal{H})$.

DEMOSTRACIÓN:

(a) y (b) son obvios de la definición de traza.Para probar (c) basta probarlo para el caso que B es un operador unitario ya que todo operador continuo es combinación lineal de cuatro operadores unitarios.En este caso tr $AB = \sum_{n=1}^{\infty} \langle AB\varphi_n, \varphi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A\psi_n, B^*\psi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle BA\psi_n, \psi_n \rangle =$ tr BA donde $\psi_n = B\varphi_n$. □

Si A es un operador traza, la función $B \to$ tr AB es una funcional de $L(\mathcal{H})$.No todas las funcionales de $L(\mathcal{H})$ son de esta forma, lo que sí vale es que toda funcional de Com$(\mathcal{H})$ es de esta forma.Si fijamos $B \in L(\mathcal{H})$, tenemos una funcional de S_1. El conjunto de éstas funcionales es el dual de S_1 con la topología de la norma. Ahora, lo dejamos enunciado en forma de teorema:

Teorema IX.37 *(a) S_1 = [Com($\mathcal{H}$)]*.Es decir, la función $A \to$ tr(A .) es un isomorfismo isométrico de S_1 a [Com($\mathcal{H}$)]*.*

(b) $L(\mathcal{H}) = S_1^*$.(i.e. la función $B \to$ tr(B .) es un isomorfismo isométrico de $L(\mathcal{H})$ a S_1^*.)

DEMOSTRACIÓN:

Ejercicio 4.□

IX.4.1 Ejercicios

1. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T \in L(\mathcal{H})$.

(a) $\|T\text{x}\| = \||T|\,\text{x}\|$ y ker$|T|$ =ker$T$.

(b) R(T) es cerrado si y sólo si R$(|T|)$ es cerrado.

2.(a) Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert.Sea A un operador tal que

$$\sup_{\substack{\psi \in [\phi_1,\ldots,\phi_n]^{\perp} \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\| \to 0 \text{ si n} \to \infty.$$

Entonces A es compacto.

(b) Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y sea A un operador compacto.Probar que

$$\sup_{\substack{\psi \in [\phi_1,\ldots,\phi_n]^{\perp} \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\| \to 0 \text{ si n} \to \infty.$$

3. (a) Sea $A \geq 0$ y compacto.Probar que $A^{1/2}$ también es compacto (Sugerencia: ejercicio 1)

(b) Sea $0 \leq A \leq B$. Si B es compacto, A también. (Sug: Probar que $A^{1/2}$ es compacto usando el ejercicio 1 y la parte (a).)

4. (a) Sea f una funcional lineal acotada en Com($\mathcal{H}$).Sea $\langle\ .\ ,\psi\rangle\, \phi$ el operador en $\mathcal{H}$ que manda η en $\langle\eta,\psi\rangle\, \phi$.Probar que existe un único operador lineal B tal que

$\langle B\psi, \phi\rangle = \mathrm{f}[\langle\ .\ ,\psi\rangle\, \phi]$.

(b) Usando el hecho que

$\sum_{n=1}^{N} \langle |B|\, \phi_n, \phi_n\rangle = \mathrm{f}\Big[\sum_{n=1}^{N} \langle\ .\ ,U\phi_n\rangle\, \phi_n\Big]$

probar que $B \in S_1$ y $\|B\|_1 \leq \|\ \mathrm{f}\ \|_{[Com(\mathcal{H})]^*}$.

(c) Probar que $A \mapsto \mathrm{tr}(BA)$ es una funcional lineal acotada en Com($\mathcal{H}$) que de hecho es igual a f(.).

(d) Probar que $\|B\|_1 = \|\ \mathrm{f}\ \|_{[Com(\mathcal{H})]^*}$.

(e) Sea g una funcional lineal acotada en S_1. Probar que existe un único operador lineal B tal que

$\langle B\psi, \phi\rangle = \mathrm{g}[\langle\ .\ ,\psi\rangle\, \phi]$.

(f) Probar que $A \mapsto \mathrm{tr}(BA)$ es una funcional lineal acotada en S_1 que coincide con g y tal que $\|\ \mathrm{g}\ \|_{S_1^*} = \|B\|$.

X
APÉNDICE B: TOPOLOGíA

Definición X.1 *Sea T un conjunto no vacío.Una topología sobre T es una familia $A = \{A_i\}$ de subconjuntos de T que cumple las siguientes condiciones:*

(a) $\emptyset$ y T $\in A$
(b) La intersección de un número finito de conjuntos de A pertenece a A.
(c) La unión arbitraria de conjuntos de A pertenece a A.

Un conjunto T sobre el que se ha definido una topología A se llama un espacio topológico, y se nota (T,A). Los conjuntos de la familia A se llaman abiertos.

Definición X.2 *Se llama entorno de un punto $x \in T$ a todo abierto A tal que $x \in A$. Una familia $\mathcal{V}_x$ de entornos de x se dice una familia de entornos básicos de x si dado un entorno A de x, existe un $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \subseteq A$. Si para cada $x \in T$, es $\mathcal{V}_x$ una familia de entornos básicos de x, la familia $B = \bigcup_{x\in T} \mathcal{V}_x$ se llama una base de entornos de la topología A.*

Los espacios topológicos son una generalización de los espacios métricos. Más precisamente, en el contexto de los espacios métricos se definen nociones como convergencia, funciones continuas, conjuntos compactos, a partir de la función distancia, pero que dependen de...otra cosa. Por ejemplo, una sucesión en ($\mathbb{R}^2$,d_2) converge si y sólo si converge en ($\mathbb{R}^2$,d_∞).

Dado un espacio métrico (X, d), consideramos los conjuntos
$B_d(x, \varepsilon) := \{y : d(x, y) < \varepsilon\}$. La familia formada por los conjuntos $B_d(x, \varepsilon)$, para x en X, $\varepsilon > 0$, es una base de entornos de la topología en X llamada la topología métrica inducida por d.

Definición X.3 *Una familia B de subconjuntos de T se llama una subbase de la topología A si sus elementos son abiertos y todo abierto de A se puede escribir como una unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos de B.*

Definición X.4 *Dado un conjunto T y una familia S de subconjuntos de T tal que la unión de elementos de S es T, la topología generada por la subbase S es la familia de conjuntos que son unión de intersecciones finitas de elementos de S.*

Definición X.5 *Sea (T,A) un espacio topológico tal que $\forall\ x \neq y \in T$ existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$, $y \in V$. Entonces (T,A) es un espacio Hausdorff ó T_2.*

Ejemplo 94 *El conjunto $\{a, b, c\}$ provisto de la topología discreta $A = \{\emptyset, A\}$ no es Hausdorff.*

X.1 Redes

Definición X.6 *Un conjunto parcialmente ordenado $D = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ se dice dirigido si dados $\alpha, \beta \in D$ existe un $\gamma \in D$ tal que $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$.*

Ejemplo 95 *Un conjunto totalmente ordenado es dirigido. En particular, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ son dirigidos.*

Definición X.7 *Una red en un espacio topológico es una función $f\!:\!D \rightarrow T$ donde D es un conjunto dirigido, y la notamos $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$, donde $x_\alpha = f(\alpha)$.*

Ejemplo 96 *Una sucesión es una red.*

Definición X.8 *Dado D un conjunto dirigido, un subconjuntoD' se dice cofinal de D si para todo $\alpha \in D$ existe $\beta \in D'$ tal que $\alpha \leq \beta$.*

Proposición X.9 *D' es también dirigido.*

Definición X.10 *Dada una red $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ se llama subred a cualquier red $(x_\beta)_{\beta \in D'}$ tal que $x_\beta \in (x_\alpha)_{\alpha \in D}$ y D' sea cofinal en D.*

Definición X.11 *Dada (x_α) red de (T,A) se dice que $x \in T$ es el límite de (x_α) si para todo entorno A de x existe $\alpha_0 \in D$ tal que $x_\alpha \in A\ \forall \alpha \geq \alpha_0$.*

Proposición X.12 *Si (T,A) es un espacio Hausdorff entonces una red no puede converger a más de un elemento.*

Proposición X.13 *Si $x_\alpha \rightarrow x$, entonces $x_\beta \rightarrow x$ para toda subred (x_β) de (x_α).*

X.2 Cerrados

Definición X.14 *Un subconjunto F de un espacio topológico T es cerrado si $T \backslash F$ es abierto.*

Lema X.15 *Sea T un espacio topológico. Entonces*
(a) $\emptyset$ y T son cerrados.
(b) Intersección arbitraria de cerrados es cerrado.
(c) Unión finita de cerrados es cerrado.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\emptyset$ y T son cerrados pues son complementos de los abiertos T y $\emptyset$ respectivamente.

(2) Dada una colección de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$, aplicamos la ley de DeMorgan a $(\bigcap\limits_{\alpha \in J} U_\alpha)^c$ y tenemos $(\bigcap\limits_{\alpha \in J} U_\alpha)^c = \bigcup\limits_{\alpha \in J} (U_\alpha)^c$. Los conjuntos $(U_\alpha)^c$ son abiertos por definición, y unión arbitraria de abiertos es abierto. Por lo tanto $\bigcap\limits_{\alpha \in J} U_\alpha$ es cerrado.

(3) Nuevamente, $(\bigcup_{i=1}^n U_i)^c = \bigcap_{i=1}^n (U_i)^c$, e intersección finita de abiertos es abierto.

Definición X.16 *Dado un subconjunto B de un espacio topológico (T,A), el interior de B es la unión de todos los abiertos contenidos por B y se nota $\overset{o}{B}$. La clausura de B es la intersección de los cerrados contenidos en B, y se nota $\overline{B}$.*

$\overset{o}{\mathrm{B}}$ es abierto y $\overline{\mathrm{B}}$ cerrado.

Proposición X.17 *Sea $B \in$ (T,A). Entonces $x \in \overline{B}$ si y solo si existe una red $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ que converge a x.*

DEMOSTRACIÓN:

Ejercicio para el lector. Para probar la ida, tomar como conjunto dirigido al conjunto de entornos de x, ordenado por la inclusión al revés.

X.3 Funciones continuas

Definición X.18 *Sean (T,A), (T',A') espacios topológicos. Una función f: $T \to T'$ es continua si para todo abierto U perteneciente a A', el conjunto $f^{-1}(A')$ es un abierto de A.*

Para probar la continuidad de una función es suficiente mostrar que la preimagen de todo elemento de una subbase dada es abierto.

Teorema X.19 *Sean (T,A), (T',A') espacios topológicos, y f: $T \to T'$ una función. Son equivalentes:*

(a) f es continua.

(b) Para todo cerrado B en T', el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en T.

DEMOSTRACIÓN:

Se deduce de la igualdad de conjuntos $f^{-1}(B^c)=(\ f^{-1}(B)\ )^c$. □

Ejercicio: Una función f: $T \to T'$ es continua si y solo si para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ $\in$ T convergente a x, la red $(f(x_\alpha))_{\alpha\in J}$ converge a f(x).

Definición X.20 *Sea f: $T \to T'$ una función entre dos espacios topológicos. Si es continua, biyectiva y su inversa también es continua se dice que f es un homeomorfismo.*

Un ejemplo de función continua y biyectiva que no es homeomorfismo es la identidad

I : $(\mathbb{R},A) \to (\mathbb{R},A')$

donde A es la topología usual de $\mathbb{R}$ y $A' = \{\emptyset,\mathbb{R}\}$ es la topología discreta.

X.4 Topología de subespacio, topología producto

Definición X.21 *Sea T un espacio topológico con topología A. Si T' es un subconjunto de T, el conjunto $A_T = \{\ T\cap U : U \in A\ \}$ es una topología de T', llamada topología de subespacio. Con esta topología, T' es llamado un subespacio de T.*

Ejercicio : Verificar que A_T es una topología.

Dada una familia de espacios topológicos $\{(T_\alpha,A_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ nos interesa definir una topología en el espacio producto $\prod_{\alpha\in J} T_\alpha$. La topología más usual en $\prod_{\alpha\in J} T_\alpha$ es la llamada topología producto.

Definición X.22 *Sean las funciones* $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} T_\alpha \to T_\alpha, \pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in J}) = x_\beta$*, llamadas proyecciones, definimos* $S_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U) : U$ *abierto en* $T_\beta\}$*, y* $S = \bigcup_{\beta\in I} S_\beta$*. La topología generada por la subbase* S *es la topología producto de* $\prod_{\alpha\in J} T_\alpha$.

Con esta topología, las proyecciones π_β resultan continuas.

Tomemos la base B generada por S, es decir las intersecciones finitas de elementos de S. Los elementos de B son de la forma $\prod_{\alpha\in I} H_\alpha$ donde hay finitos H_α abiertos distintos de T_α.

Teorema X.23 *Sea f:* $T \to \prod_{\alpha\in J} T_\alpha$ *definida por f(a)=*$(f_\alpha(a))_{\alpha\in J}$ *donde* $f_\alpha : T \to T_\alpha$ *para cada* α*. Entonces la función f es continua si y sólo si cada* f_α *es continua.*

Demostración:

Supongamos que f es continua. Sean π_β las proyecciones definidas anteriormente. Como $\mathrm{f}_\beta = \pi_\beta \circ \mathrm{f}$ y π_β, f son funciones continuas, f_β también lo es.

Recíprocamente, supongamos que cada f_β es continua. Para probar que f es continua basta ver que la preimagen de cada elemento de alguna subbase de $\prod_{\alpha\in J} \mathrm{T}_\alpha$ es un abierto de T. Los elementos de la subbase S son de la forma $\pi_\beta^{-1}(U)$ para algún $\beta \in J, U$ abierto de T_β. Pero $\mathrm{f}^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U))=\mathrm{f}_\beta^{-1}(U)$ pues $\mathrm{f}_\beta = \pi_\beta \circ \mathrm{f}$. □

X.5 Conjuntos compactos

Definición X.24 *Una familia* $\{V_i\}_{i\in I}$ *de conjuntos se dice un cubrimiento del conjunto X si* $X \subseteq \bigcup V_i$*. Dado un cubrimiento* $\{V_i\}_{i\in I}$ *de X, se llama subcubrimiento a todo cubrimiento* $\{V_j\}_{j\in J}$ *tal que* $J \subseteq I$*. Si J es finito, el subcubrimiento se dice finito. Finalmente, el cubrimiento se dice abierto si todos los conjuntos* V_i *son abiertos.*

Definición X.25 *Un conjunto K de un espacio topológico (T,A) se dice compacto si de todo cubrimiento abierto* $\{A_i\}_{i\in I}$ *de K se puede extraer un subcubrimiento finito.*

Proposición X.26 *Sea K un compacto de T. Si F es cerrado y F⊆K, entonces F es compacto.*

Demostración:

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de F, y sea A =F^c. A es abierto y K$\subseteq A\cup \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Como K es compacto existe un número finito de índices i$_1$,..,i$_n$ tal que K$\subseteq A\cup \bigcup\limits_{s\in[1,n]} A_{i_s}$. Como F$\subseteq$K y F$\cap A=\emptyset$, F$\subseteq \bigcup\limits_{s\in[1,n]} A_{i_s}$.

Proposición X.27 *Todo conjunto compacto K de un espacio topológico Hausdorff T es cerrado.*

Demostración:

Vamos a probar que K^c es abierto. Sea x $\in$K^c, para cada y $\in$ K existen abiertos disjuntos U$_y$ y V$_y$ tales que x $\in$U$_y$, y $\in$V$_y$ (el espacio es Hausdorff). Como K es compacto, existe un número finito de puntos y$_i$ $\in$K tales que K$\subseteq \bigcup\limits_{i\in[1,n]}$ V$_{y_i}$.. Sea A= $\bigcap\limits_{i\in[1,n]}$ U$_i$. A es un entorno de x pues es intersección finita de entornos de x, y como A$\cap$(V$_{y_1}\cup$..$\cup$V$_{y_n}$) = $\emptyset$,resulta que A$\cap$K=$\emptyset$. Luego A$\subseteq$K^c y K^c resulta abierto.

Definición X.28 *Una familia $F=\{X_i\}_{i\in I}$ de conjuntos tiene la propiedad de intersección finita {p.i.f.} si la intersección finita de conjuntos X_1,..,X_n de F es no vacía.*

Definición X.29 *Un conjunto X$\subseteq$T tiene la propiedad de Riesz si para toda familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de cerrados con la p.i.f. tal que $F_i\subseteq X$ $\forall i\in I$ se tiene que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i\neq\emptyset$.*

Proposición X.30 *Sea T un espacio Hausdorff. K$\subseteq$T es compacto si y solo si es cerrado y tiene la propiedad de Riesz.*

Demostración:

ejercicio para el lector.

Proposición X.31 *Sea f:T$\to$T$'$ una función continua. Si K es compacto de T, entonces f(K) es compacto de T$'$.*

Demostración:

Sea $\{$A$'_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de f(K); definimos A$_i$ =f^{-1}(A$'_i$). Por ser f continua, los A$_i$ son abiertos y vale que K$\subseteq \bigcup$A$_i$. Como K es compacto, existen A$_{i_1}$,...,A$_{i_n}$ tales que K$\subseteq$A$_{i_1}\cup$...$\cup$A$_{i_n}$ de donde resulta que f(K)$\subseteq$A'$_{i_1}\cup$...$\cup$A'$_{i_n}$ y f(K) es compacto.

Corolario X.32 *Sea f : T$\to$T$'$ una función continua y biyectiva. Si T es compacto entonces f es homeomorfismo.*

Demostración:

Si F es un cerrado de T, entonces F es compacto. De la proposición anterior sabemos que f(F) es compacto, y por lo tanto cerrado. Como f manda cerrados en cerrados, f^{-1} es continua.

Un resultado importante es el siguiente:

Teorema X.33 (Tychonoff) *Sea $\{K_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una colección de compactos. Entonces $\prod_{\alpha\in J} K_\alpha$ con la topología producto es compacto.*

DEMOSTRACIÓN:

1^{er} paso: Sea X un conjunto; sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X con la p.i.f. Existe una familia $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X tal que

(1) $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{D}$ tiene la p.i.f..

(3) Si $\mathcal{E} \supset \mathcal{D}$, entonces $\mathcal{E}$ no satisface la p.i.f..

Para probar esta afirmación vamos a usar la siguiente versión del lema de Zorn: si $\prec$ es un orden parcial estricto sobre A, y B es un subconjunto de A que es simplemente ordenado por $\prec$, entonces existe un subconjunto maximal simplemente ordenado C que contiene a B. Más precisamente, necesitamos el caso en que B es un subconjunto formado por un sólo elemento.

Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las familias de subconjuntos de X que satisfacen la p.i.f. Por lo tanto, $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$. Definimos un orden parcial estricto entre dos elementos de $\mathcal{F}$ como la inclusión estricta. Por caso particular del lema de Zorn citado antes, existe una familia simplemente ordenada maximal $\mathcal{C}$ en $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$.

Definimos $\mathcal{D}$ como la unión de elementos de $\mathcal{C}$;

$$\mathcal{D} = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$$

La familia $\mathcal{D}$ es la que buscamos. Las propiedades (1), (2) son inmediatas. Supongamos que $\mathcal{E} \supset \mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ satisface la p.i.f. Entonces podemos formar un nuevo conjunto $\mathcal{C}' := \mathcal{C} \cup \{\mathcal{E}\}$. Tenemos que $C \subset \mathcal{D}$ para todo $C \in \mathcal{C}$, y $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$. Por lo tanto cualesquiera dos elementos de $\mathcal{C}'$ son comparables bajo inclusión propia, y $\mathcal{C}'$ resulta simplemente ordenado, lo que contradice la maximalidad de $\mathcal{C}$.

2^{do} paso: Sea $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos de X que es maximal respecto de la p.i.f. Entonces

(a) Intersección finita de elementos de $\mathcal{D}$ pertenece a $\mathcal{D}$.

Sea B la intersección de una cantidad finita de elementos de $\mathcal{D}$. Definimos $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{\mathrm{B}\}$. Vamos a ver que $\mathcal{E}$ verifica la p.i.f.; entonces la maximalidad de $\mathcal{D}$ implica $\mathcal{E} = \mathcal{D}$ y por lo tanto B $\in \mathcal{D}$. Tomemos una cantidad finita de elementos de $\mathcal{E}$. Si ninguo de ellos es B, su itersección es no vacía pues $\mathcal{D}$ satisface la p.i.f. Si alguno de ellos es B, entonces su intersección es de la forma $\mathrm{D}_1 \cap ... \cap \mathrm{D}_n \cap$ B. Dado que B es también intersección finita de elementos de $\mathcal{D}$, entoces este conjunto tampoco es vacío.

(b) Si A es un subconjunto de X que interseca a todo elemento de $\mathcal{D}$, entonces A pertenece a $\mathcal{D}$.

Dado un tal A, definimos $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{\mathrm{A}\}$. Si probamos que $\mathcal{E}$ verifica la p.i.f. entonces A pertenece a $\mathcal{D}$. Dados finitos elementos de $\mathcal{E}$, si ninguno de ellos es A entonces la intersección es no vacía. Si alguno es A, la intersección es de la forma $\mathrm{D}_1 \cap ... \cap \mathrm{D}_n \cap \mathrm{A}$. Por (a) sabemos que $\mathrm{D}_1 \cap ... \cap \mathrm{D}_n$ pertenece a $\mathcal{D}$; por lo tanto esta intersección tampoco es vacía.

3^{er} paso: Vamos a probar el teorema. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de $\prod\limits_{\alpha \in J} \mathrm{K}_\alpha$ con la p.i.f., vamos a ver que la itersección $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$ es no vacía.

Aplicando el paso 1, tomamos una familia $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{A}$ y maximal respecto a la p.i.f. Basta ver que $\bigcap\limits_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$ es no vacía.

Dado $\alpha \in J$, sea $\pi_\alpha : \prod\limits_{\alpha \in J} \mathrm{K}_\alpha \rightarrow \mathrm{K}_\alpha$ la proyección sobre K_α. Sea la familia $\{\pi_\alpha(D) : D \in \mathcal{D}\}$ de subconjuntos de K_α. Esta familia satisface la p.i.f. pues $\mathcal{D}$ lo hace. Como los K_α son compactos, para cada α tomamos un punto x_α de K_α tal que

$$x_\alpha \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}$$

Sea x el punto $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ de $\prod\limits_{\alpha \in J} \mathrm{K}_\alpha$. Queremos ver que $x \in \overline{D}$ para todo $D \in \mathcal{D}$.

Sea $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ cualquier elemento de la subbase de la topología producto de $\prod\limits_{\alpha \in J} \mathrm{K}_\alpha$ que contiene a x, entonces $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ interseca a todo elemento de $\mathcal{D}$: el conjunto U_β es un entorno de x_β en K_β, y dado que $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)}$, U_β interseca a $\pi_\beta(D)$ en algún punto $\pi_\beta(\mathrm{y})$ donde $\mathrm{y} \in D$. Por lo tanto, $\mathrm{y} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap D$.

Del ítem (b) del paso 2 se sigue que todo elemento de la subbase que contenga a x pertenece a $\mathcal{D}$. Y del ítem (a) se sigue que todo elemento de la base que contenga a x pertenece a $\mathcal{D}$. Puesto que $\mathcal{D}$ tiene la p.i.f., todo elemento de la base que contenga a x interseca a cualquier elemento de $\mathcal{D}$; por lo que $x \in \overline{D}$ para todo $D \in \mathcal{D}$. $\square$

Referencias

[Ahlfors] AHLFORS, Lars V. - *Complex Analysis.*

[Barnsley] BARNSLEY, Michael F. - *Fractals Everywere* Segunda Edición, Academic Press, Cambridge, 1993.

[Cotlar-Cignoli] COTLAR, Mischa y CIGNOLI, Roberto - *Nociones de Espacios Normados [2 tomos]*, Editorial Eudeba, Buenos Aires, Argentina, 1967.

[Conway] CONWAY, John B. - *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[Davie] DAVIE, A. M. - *The Banach approximation problem*, Journal of Approximation Theory, Vol 13, p.392-394.

[Enflo] ENFLO, P. - *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Mathematica, Vol 130, p.309-317.

[Fava-Zo] FAVA, Norberto y ZO, Felipe - *Medida e integral de Lebesgue*, Red Olímpica, Bs. As., Argentina, 1996.

[Gentile] GENTILE, Enzo R. - *Estructuras Algebraicas I*, PRDCyT, OEA, Unión Panamericana, Washington D.C., 1977.

[Halmos1] HALMOS, Paul R. - *Measure theory*, D. Van Nostrand Company, New Jersey, 1959.

[Halmos2] HALMOS, Paul R. - *Naive Set Theory.*

[Halmos3] HALMOS, Paul R. - *A Hilbert Space Problems Book.*

[James1] JAMES, Robert C. - *Bases and Reflexivity of Banach Spaces*, Annals of Mathematics, Vol 52, No 3, p.518-527, November 1950.

[James2] JAMES, Robert C. - *Non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space,* Proceedings of the National Academy of Science, USA, Vol 37, p.174-177, December 1950.

[Jor-V Neumann] JORDAN, P. y VON NEUMANN, J. - *"On Inner Products in Linear, Metric Spaces",* Annals of Mathematics, Vol 36, p.719-723, 1935.

[J-VN-W] JORDAN, P. - VON NEUMANN y WIGNER, J. E. - *"mmmm ",* Annals of Mathematics, Vol 35, p.32, 1934.

[Kakutani] KAKUTANI - *Journal of Japanese Mathematics.*

[Kelley1] KELLEY, John L. - *General Topology*, D. Van Nostrand Company, New Jersey, 1955.

[Kelley2] KELLEY, John L. - *Topología general.*

[Kolmogorov] KOLMOGOROV, A.N. y FOMIN, S.V. - Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional Ed. MIR, Moscú, 1975.

[Larotonda] LAROTONDA, Ángel R. - *Álgebra lineal y geometría,* Ed. Eudeba, Buenos Aires, Argentina, 1973.

[Munkres] MUNKRES, James - *TOPOLOGY: A First Course*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

[Panzone] PANZONE, Rafael - *Lecciones preliminares de análisis funcional*, notas de álgebra y análisis N^o 11, INMABB-CONICET, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1983.

[Porta] PORTA, Horacio - *Temas de análisis funcional,* Cursos y seminarios de Matemática, Fascículo 35, Depto de Matemática de la FCEN, UBA, Buenos Aires, Argentina, 1989.

[Rey Pastor] REY PASTOR, Julio - PI CALLEJA, Pedro y TREJO, César A. - *Análisis Matemático 1.*

[Rey Pastor] REY PASTOR, Julio - PI CALLEJA, Pedro y TREJO, César A. - *Análisis Matemático 3.*

[Royden] ROYDEN, H. L. - *Real Analysis*, The Macmillan Company, New York, 1964.

[Rudin] Rudin, W. - *Real and Complex analysis,* McGraw-Hill, .

[Simon] REED, M. and SIMON, B. - *Methods of modern mathematical physics, Vol I : FUNCTIONAL ANALYSIS,* Academic Press, London, 1980.

[Taylor] TAYLOR, Angus E. - *Introduction to FUNCTIONAL ANALYSIS*, John Wiley & Sons, New York, 1964.

[Whe-Zygmund] WHEEDEN,R. and ZYGMUND, A. - *MEASURE AND INTEGRAL: An introduction to real analysis*, Marcel Dekker, New York, 1977.

Índice