Universidad de Buenos Aires
FCEyN, Depto de Matemática

Tesis de Licenciatura

ALGUNOS ASPECTOS MÉTRICOS DE LA GEOMETRÍA NO CONMUTATIVA

Director: Dr. Esteban Andruchow   Autor: Gabriel Larotonda

Julio de 1999

Contenidos

I
INTRODUCCION

Clásicamente, se conoce como "geometría algebraica" a la geometría de espacios que, al menos localmente, se comportan como el espacio topológico $spec(A)$, donde A es un anillo conmutativo y $spec(A)$ es el conjunto de los ideales primos de A con la topología Zariski.

Desde hace algunos años se viene planteando la pregunta de cual sería el contexto adecuado para hacer geometría sobre un anillo no necesariamente conmutativo. Esta pregunta no tiene una respuesta terminante, pero un candidato relativamente "natural" para reemplazar el anillo en cuestión sería un álgebra C^*.

Una de las motivaciones básicas para trabajar en este marco es el teorema de Gelfand, que nos dice que si el álgebra es abeliana, es representable por las funciones continuas a valores complejos sobre un cierto espacio topológico, y este espacio está caracterizado (salvo homeomorfismos) por el álgebra C^* en cuestión (salvo *-isomorfismos); más precisamente, existe un morfismo de categorías entre espacios topológicos localmente compactos y álgebras C^* abelianas.

Otra manera de pensar el teorema de Gelfand es pensar al espacio topológico X como canónicamente incluido en el espacio de estados del álgebra $C(X)$, con la topología débil-*. Por ende todas las propiedades topológicas de X se traducen en propiedades topológicas del espacio de estados de $C(X)$, y viceversa.

Un punto interesante a remarcar aquí es que vía esta inclusión, los puntos de X se corresponden con los **homomorfismos** (i.e. funcionales multiplicativas), y por ende, con el conjunto de todos los ideales maximales de $C(X)$, en notable semejanza con las construcciones de la geometría algebraica clásica, donde los puntos del espacio se corresponden con los ideales maximales del anillo de polinomios en varias variables sobre un cuerpo k.

La idea básica de este modelo sería entonces "traducir" las definiciones, la estructura y las propiedades de X al marco de la C^* álgebra de sus funciones continuas, y luego utilizar estas definiciones en el marco más general de las C^* álgebras no conmutativas, con la esperanza de que estas nos provean de resultados consistentes.

El caso que trataremos en este trabajo se basa en la siguiente discusión: si (X, d) es un espacio métrico, existe una seminorma natural en $C(X)$ asociada a la métrica, que es la seminorma Lipschitz dada por

$$\|f\|_L = \sup\left\{\frac{|\ f(x) - f(y)\ |}{d(x,y)} : x \neq y\right\}$$

Esta seminorma puede tomar el valor $+\infty$; a la clase de funciones que tienen seminorma Lipschitz finita la denotaremos con $Lip(X)$, las funciones **lipschitzianas** sobre X. El conjunto $Lip(X)$ resulta una subálgebra de $C(X)$ claramente involutiva, pero si X tiene una estructura diferenciable, resulta claramente **densa** (pues contiene a las funciones infinitamente diferenciables).

Notemos que si $\|f\|_L \leq 1$, entonces $| f(p) - f(q) | \leq d(p,q)$, y luego

$$\sup\{| f(p) - f(q) | : \|f\|_L \leq 1\} \leq d(p,q)$$

Pero tomando $f_p(x) = d(x,p)$ se obtiene

$$| f_p(x) - f_p(y) | = | d(x,p) - d(y,p) | \leq d(x,y)$$

lo que prueba que $\|f_p\|_L \leq 1$, pero además

$$| f_p(p) - f_p(q) | = d(p,q)$$

lo que prueba la clásica fórmula

$$d(p,q) = \sup\{| f(p) - f(q) | : \|f\|_L \leq 1\}$$

Esto nos dice que toda la información métrica del espacio topológico X está codificada en una cierta subálgebra involutiva (en la mayoría de los casos densa) de $C(X)$, i.e. $Lip(X)$ acarrea toda la información métrica de $C(X)$.

Si queremos pasar ahora al contexo no conmutativo, dada una C^* álgebra A, necesitaremos encontrar entonces una cierta subálgebra involutiva densa $\mathcal{A}$ que será la portadora de la información "métrica" de este espacio no conmutativo.

Veremos que una aproximación a este problema está dada por la acción del álgebra C^* en cuestión en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, con un cierto operador D (autoadjunto y no acotado) marcado en $\mathcal{H}$ (sección II.3.1). La subálgebra densa $\mathcal{A}$ será el conjunto de elementos de A tales que el conmutador con D es un operador **acotado**. Este triple $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ nos permitirá introducir una métrica en el espacio de estados de A, y por restricción, en el espacio de estados puros. Veremos asimismo que bajo ciertas condiciones, esta topología coincidirá con la topología débil-* del espacio de estados de A (sección III.1).

Nos concentraremos primero en mostrar en detalle como para una variedad diferenciable M, es posible introducir este triple en forma natural utilizando la estructura del fibrado vectorial de Clifford sobre M (el espacio de L^2 spinores), y D será el operador de Dirac de la variedad. Veremos como la subálgebra densa inducida por este par $(\mathcal{H}, D)$ coincide en efecto con las funciones lipschitzianas sobre M, y por ende la métrica inducida coincidirá con la métrica de M, i.e. con la distancia geodésica. Para ello necesitaremos un revisión más o menos extensiva a las álgebras de Clifford (sección II.1), y una introducción a los fibrados y operadores de Dirac sobre una variedad diferenciable (sección II.2).

Reformularemos luego estos resultados para concluir que la topología inducida por esta métrica en el espacio de estados (y por ende en los estados puros) coincide con la topología débil-*.

Luego veremos como introducir un triple $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ en forma natural sobre el álgebra reducida de un grupo topológico discreto (sección III.2), mediante una función de longitud (nuestro prototipo de función de longitud será la longitud de las palabras en los generadores del grupo). Un resultado notable de esta sección es que toda la información métrica esta contenida en el grupo, vía la representación regular a izquierda.

Por último daremos una breve introducción a los sistemas dinámicos topológicos para presentar al **toro no conmutativo**, también conocido como "álgebra de rotación irracional", y veremos que sobre estas álgebras también es posible introducir en forma natural un triple $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ (sección III.3). Es un resultado conocido (cf [Rieffel]) que la métrica construida en el espacio de estados mediante este triple devuelve la topología débil-*, y es por eso que este ejemplo es tan relevante en la teoría que estamos apenas rozando aquí .

Hemos intentado que este trabajo sea autocontenido en la medida de lo posible, citando solamente los resultados que consideramos "más conocidos", en forma precisa (i.e. [libro][página]), para evitar inútiles ambulaciones por la bibliografía. Las referencias a los resultados contenidos en el trabajo son específicas (i.e. Teorema III.4) y las referencias a ecuaciones o fórmulas que aparecen centradas están entre paréntesis, para diferenciarlas de las referencias a capítulos, secciones y subsecciones.

II
MOTIVACION

II.1 Preliminares algebraicos

A lo largo de toda esta sección daremos las definiciones necesarias para poder manipular con comodidad el álgebra de Clifford "general" de un espacio vectorial cualquiera. Afinaremos luego la puntería para tratar en detalle las álgebras de Clifford canónicas sobre $\mathbb{R}^n$, y veremos como es posible dar una presentación manejable del revestimiento universal del grupo SO_n mediante un cierto subgrupo del álgebra de Clifford canónica (el grupo de spin). Concluimos con una breve (pero completa) clasificación de las álgebras de Clifford canónicas (reales y complejas).

II.1.1 El álgebra de Clifford

Definición II.1 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo k, y sea q una forma cuadrática en V.*

El **álgebra de Clifford** $C\ell(V,q)$ asociada a V y q es un álgebra asociativa y con unidad que se define como sigue:

Sea

$$\mathcal{I}(V) = \sum_{r=0}^{\infty} \otimes^r V$$

el álgebra tensorial de V, y definimos $I_q(V)$ como el ideal en $\mathcal{I}(V)$ generado por los elementos de la forma $v \otimes v + q(v)1$ para $v \in V$. Entonces el álgebra de Clifford es el álgebra cociente, i.e.

$$C\ell(V,q) \equiv \mathcal{I}(V)/I_q(V)$$

Denotaremos el producto tensorial en el cociente con el símbolo " $\cdot$ ", el **producto de Clifford**.

Hay una inclusión natural

$$V \hookrightarrow C\ell(V,q)$$

dada por la imagen de $V = \otimes^1 V$ por la proyección al cociente

$$\pi_q : \mathcal{I}(V) \to C\ell(V,q)$$

Para ver que $\pi_q\mid_V$ es inyectiva, notemos que todo elemento de $\mathcal{I}(V)$ se escribe como una suma de elementos de **grado puro**, es decir como una suma de elementos $\phi \in \otimes^r V$. Supongamos entonces que $\psi \in I_q(V) \cap V$. Podemos escribir a ψ como $\sum_{i\in I} a_i \otimes (v_i \otimes v_i + q(v_i)1) \otimes b_i$, y podemos suponer que los a_i, b_i son de grado puro. Tomemos el conjunto finito de índices $F \subset I$ tal que $grado(a_f) + grado(b_f)$ es máximo. Si tomamos la suma $\sum_{f\in F} a_f \otimes (v_f \otimes v_f + q(v_f)1) \otimes b_f$

y recordamos que $\psi \in V$, debe valer que $\sum_{f\in F} a_f \otimes v_f \otimes v_f \otimes b_f = 0$. Ahora pasando al cociente se obtiene

$$\sum_{f\in F} q(v_f) a_f \cdot b_f = 0$$

y como la suma de los grados era maximal, debe ser $q(v_f) = 0$ para todo $f \in F$. Pero entonces toda la suma $\sum_{f\in F} a_f \otimes (v_f \otimes v_f + q(v_f)1) \otimes b_f$ es nula. Procediendo inductivamente, llegamos a que $\psi = 0$.

El álgebra $C\ell(V,q)$ es álgebra generada por el conjunto $\{1, v\}_{v\in V}$ sobre el cuerpo k, sujeta a la relación

$$v \cdot v = -q(v)1$$

Si la característica de k no es 2, se tiene

$$v \cdot w + w \cdot v = -2q(v,w)1 \tag{II.1}$$

donde $2q(v,w) \equiv q(v+w) - q(v) - q(w)$ es la polarización de q.

Se tiene la siguiente caracterización universal de las álgebras de Clifford:

Teorema II.2 *Sea $f : V \to \mathcal{A}$ una función lineal de un k-espacio vectorial V en una k-álgebra asociativa $\mathcal{A}$ con unidad, tal que*

$$f(v) \cdot f(v) = -q(v)1 \tag{II.2}$$

para todo $v \in V$. Entonces f se extiende en forma única a un homomorfismo de k-álgebras $\tilde{f} : C\ell(V,q) \to \mathcal{A}$.

Además $C\ell(V,q)$ es la única k-álgebra asociativa con esta propiedad.

Demostración:

Toda f lineal se extiende en forma única a un homomorfismo $\overline{f} : \mathcal{I}(V) \to \mathcal{A}$. La propiedad (II.2) nos asegura que $\overline{f}$ pasa bien al cociente, induciendo el homomorfismo $\tilde{f}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{S}$ es una k-álgebra asociativa con unidad y que $i : V \hookrightarrow \mathcal{S}$ es una inclusión con la propiedad de que toda aplicación lineal $f : V \to \mathcal{A}$ con la propiedad (II.2) se extiende en forma única a un homomorfismo de k-álgebras $\tilde{f} : \mathcal{S} \to \mathcal{A}$. Entonces el isomorfismo de $V \subset C\ell(V,q)$ en $i(V) \subset \mathcal{S}$ induce un isomorfismo de k-álgebras $C\ell(V,q) \simeq \mathcal{S}$. $\square$

Notemos que cuando $q \equiv 0$, lo que obtenemos es $\Lambda^*(V)$, el álgebra exterior de V. La filtración natural $\widetilde{\mathcal{F}}^r = \sum_{i=0}^{r} \otimes^i V$ del álgebra tensorial pasa al cociente, convirtiendo al álgebra de Clifford en un álgebra con filtración $\mathcal{F}^r$. Lo mismo vale para el álgebra exterior, con filtración $\Lambda^r V$. Se tiene

Proposición II.3 *Si k tiene característica cero, entonces existe un isomorfismo canónico de espacios vectoriales*

$$\Lambda^* V \to C\ell(V,q)$$

compatible con las filtraciones.

Demostración:

Saliendo del producto de r copias de V definimos una aplicación multilineal alternada $f : V \times \cdots \times V \to C\ell(V,q)$ de la siguiente manera

$$f(v_1, ..., v_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} sg(\sigma) v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(r)}$$

Claramente f se extiende a una aplicación $\tilde{f} : \Lambda^r V \to C\ell(V,q)$, cuya imagen cae en $\mathcal{F}^r$. Utilizando un argumento similar al que dimos para probar que hay una inclusión de V en $C\ell(V,q)$, no es difícil probar que $\tilde{f}$ es inyectiva. La suma directa de estas aplicaciones es el isomorfismo deseado. $\square$

Por supuesto, este no es un isomorfismo de álgebras a menos que $q = 0$.

Se deduce de la proposición que si $dim_k(V) = n$, entonces la dimensión de $C\ell(V,q)$ como k-espacio vectorial es 2^n.

Consideremos la aplicación $\phi : V \to C\ell(V,q)$ dada por $\phi(v) = -v$. Por el Teorema II.2, esta aplicación se extiende en forma única a una homomorfismo $\alpha : C\ell(V,q) \to C\ell(V,q)$. Como $\alpha^2 = Id$, existe una descomposición

$$C\ell(V,q) = C\ell^0(V,q) \oplus C\ell^1(V,q) \tag{II.3}$$

dada por los autoespacios de α. Como $\alpha(\phi_1 \cdot \phi_2) = \alpha(\phi_1) \cdot \alpha(\phi_2)$, la descomposición de arriba es de $\mathbb{Z}_2$-álgebra graduada, i.e.

$$C\ell^i(V,q) \cdot C\ell^j(V,q) \subset C\ell^{i+j}(V,q)$$

donde los índices se toman módulo 2. Los elementos de cada subéspacio se denominan **pares** e **impares** respectivamente.

La caracterización universal de las álgebras de Clifford tiene una interesante conscuencia funtorial: si $f : (V,q) \to (V',q')$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales que preserva las formas cuadráticas, i.e. $f^*q' = q$ entonces por el Teorema II.2 hay un homomorfismo inducido $\tilde{f} : C\ell(V,q) \to C\ell(V',q')$. Ademas, dado otro morfismo $g : (V',q') \to (V'',q'')$ se ve por la unicidad del Teorema II.2 que $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$.

Un caso particular de la situación general descripta arriba es la de los grupos $O(V,q) \equiv \{f \in GL(V) : f^*q = q\}$ y $SO(V,q) \equiv \{f \in O(V,q) : det(f) = 1\}$. Por lo recién observado, se tiene una inclusión (más precisamente una representación) natural de estos espacios en el grupo $Aut(C\ell(V,q))$.

De aquí en adelante supondremos que la característica de k no es 2.

Consideremos el grupo (multiplicativo) de unidades en un álgebra de Clifford, que denotaremos con $C\ell^\times(V,q)$. Este grupo contiene a todos los elementos de v tales que $q(v) \neq 0$, ya que $v^{-1} = -v/q(v)$. Cuando $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y $dim_k(V) = n < \infty$, este es un grupo de Lie de dimensión 2^n. Su álgebra de Lie coincide con el álgebra de Clifford, es decir, $\mathbf{cl}^\times(V,q) = C\ell(V,q)$, con corchete de Lie dado por el conmutador usual, i.e.

$$[x,y] = x \cdot y - y \cdot x$$

El grupo de unidades actúa naturalmente como automorfismos del álgebra, mediante la representación adjunta, es decir, se tiene una aplicación

$$Ad : C\ell^{\times}(V,q) \to Aut(C\ell(V,q))$$

definida por

$$Ad_{\phi}(x) = \alpha(\phi)x\phi^{-1}$$

Esta aplicación es diferenciable, y se obtiene una diferencial (que es un homomorfismo en cada punto) dado por

$$ad : \mathbf{cl}^{\times}(V,q) \to Der(C\ell(V,q))$$

cuya expresión es

$$ad_y(x) = [x,y]$$

Proposición II.4 *Sea $v \in V \subset C\ell(V,q)$ un vector con $q(v) \neq 0$. Entonces $Ad_v(V) = V$. De hecho, se tiene la siguiente expresión:*

$$Ad_v(w) = w - 2\frac{q(v,w)}{q(v)}v$$

DEMOSTRACIÓN:

Como $v^{-1} = -v/q(v)$, se tiene de (II.1) que

$$\begin{aligned} -q(v)Ad_v(w) &= -q(v)(-v)wv^{-1} \\ &= q(v)vw(-v/q(v)) = -vwv \\ &= v^2w + 2q(v,w)v \\ &= -q(v)w + 2q(v,w)v \quad \square \end{aligned}$$

Lema II.5 *Si $v \in V$, la transformación adjunta preserva la forma cuadrática, i.e.*

$$Ad_v^*q(w) \equiv q(Ad_v(w)) = q(w)$$

para todo $w \in V$

DEMOSTRACIÓN:

Recordemos que por la bilinearidad de la polarización, se tiene $q(a-b) = q(a) + q(b) - 2q(a,b)$ para todo $a,b \in V$. Aplicando la identidad de la proposición previa, se obtiene

$$\begin{aligned} q(Ad_v(w)) &= q(w - 2\tfrac{q(v,w)}{q(v)}v) \\ &= q(w) + q(2\tfrac{q(v,w)}{q(v)}v) - 2q(w, 2\tfrac{q(v,w)}{q(v)}v) \\ &= q(w) + \left(2\tfrac{q(v,w)}{q(v)}\right)^2 q(v) - 2\left(2\tfrac{q(v,w)}{q(v)}\right) q(w,v) \\ &= q(w) + 4\tfrac{q(v,w)^2}{q(v)} - 4\tfrac{q(v,w)^2}{q(v)} = q(w) \quad \square \end{aligned}$$

Definición II.6 *Definimos el* **grupo de spin** *como el siguiente subconjunto*

$$Spin(V,q) = \{v_1 \cdots v_r \in C\ell(V,q) : v_j \in V,\ r \textit{ es par y } q(v_j) = \pm 1\}$$

Llamemos

$$\rho_v(w) = w - 2\frac{q(v,w)}{q(v)}v$$

De la definición es evidente que

$$Ad_{v_1\cdots v_r} = \rho_{v_1} \circ \cdots \circ \rho_{v_r}$$

con lo cual, si $\psi \in Spin(V,q)$, entonces $Ad_\psi(V) = V$. Ahora también es inmediato que

$$\begin{aligned} q\left(Ad_{v_1\cdots v_r}(w)\right) &= q\left(\rho_{v_1} \circ \rho_{v_2} \circ \cdots \circ \rho_{v_r}(w)\right) \\ &= q\left(\rho_{v_1}\left(\rho_{v_2} \circ \cdots \circ \rho_{v_r}(w)\right)\right) \\ &= q\left(\rho_{v_2} \circ \cdots \circ \rho_{v_r}(w)\right) = \cdots \\ &= q(w) \end{aligned}$$

con lo cual, Ad_ψ preserva la forma cuadrática para todo $\psi \in Spin(V,q)$.

Notemos que la aplicación lineal ρ_v es simplemente la reflección a través del hiperplano $v^\perp$. Ahora dado $v \in V$, tomemos una base $\{v, v_2, \cdots, v_n\}$ de V tal que $q(v, v_j) = 0$ para $j \geq 2$. Se tiene que $\rho_v(v) = -v$ y $\rho_{v_j} = v_j$, con lo cual $det(\rho_v) = -1$ para todo $v \in V$.

Recordemos por un instante la definición del grupo ortonormal

$$SO(V,q) = \{f \in Gl(V) : f^*q = q, det(f) = 1\}$$

Las observaciones previas nos dicen que se tiene la siguiente aplicación

$$Ad : Spin(V,q) \to SO(V,q)$$

Veamos ahora como se comporta

Lema II.7 *Si V tiene dimensión finita y q es no degenerada, entonces $\mathcal{K}er(Ad) \subset k^\times$*

Demostración:

Supongamos que $\psi \in Spin(V,q)$ está en el núcleo de Ad. Escribamos $\psi = \psi_0 + \psi_1$ mediante la descomposición (II.3). Elijamos una base $\{w_1, \cdots, w_n\}$ de V tal que $q(w_i) \neq 0$ y $q(w_i, w_j) = 0$ para $i \neq j$. Como $Ad_\psi(v) = 1$, se tiene $\alpha(\psi)v = v\psi$ para todo $v \in V$. Observemos que, igualando elementos de igual grado se tiene

$$\begin{aligned} v\psi_0 &= \psi_0 v \\ -v\psi_1 &= \psi_1 v \end{aligned} \tag{II.4}$$

para todo $v \in V$. Sucesivas aplicaciones de la ecuación (II.1) a los pares w_i, w_j muestan que ψ_0 puede ser expresado como $\psi_0 = a_0 + w_1 a_1$ donde a_0 y a_1 son expresiones polinomiales en $w_2, \cdots, w_n$. Al aplicar α se ve que a_0 es par y a_1 impar. Poniendo $v = w_1$ en (II.4), vemos que

$$\begin{aligned} w_1 a_0 + w_1^2 a_1 &= a_0 w_1 + w_1 a_1 w_1 \\ &= w_1 a_0 - w_1^2 a_1 \end{aligned}$$

En consecuencia, $w_1^2 a_1 = -q(w_1) a_1 = 0$, y por ende $a_1 = 0$. Esto muestra que ψ_0 no involucra w_1. Procediendo inductivamente, vemos que ψ_0 no involucra ningún w_i, y por ende $\psi_0 = t \cdot 1$ con $t \in k$.

Con un argumento análogo se prueba que ψ_1 no involucra nigún w_i, y como ψ_1 tiene grado impar, debe ser $\psi_1 = 0$. Con esto se tiene $\psi = \psi_0 + \psi_1 = t \cdot 1$, y como $\psi \neq 0$, debe ser $\psi \in k^\times$. $\square$

Definición II.8 *Notese que el algebra tensorial posee una involución*

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \mapsto v_r \otimes \cdots \otimes v_1$$

la cual preserva el ideal $I_q(V)$ y por ende desciende a una aplicación

$$(\ )^t : C\ell(V,q) \to C\ell(V,q)$$

denominada **traspuesta**. *Nótese que es un antiautomorfismo, i.e. $(\psi\phi)^t = \phi^t \psi^t$. Definimos la* **norma** *$N : C\ell(V,q) \to C\ell(V,q)$ como la aplicación*

$$N(\psi) \equiv \psi \cdot \alpha(\psi^t)$$

Notemos que $N(v) = q(v)$ para $v \in V$ y $N(t) = t^2$ para $t \in k$.

Proposición II.9 *Supongamos que V tiene dimensión finita y q es no degenerada. Entonces la restricción de N al grupo de Spin da un homomorfismo*

$$N : Spin(V,q) \to k^\times$$

donde se sobreentiende que $k^\times = k^\times \cdot 1 \subset C\ell(V,q)$.

Demostración:

Veamos primero que $N(Spin(V,q)) \subset k^\times$. Tomemos $\psi \in Spin(V,q)$, y recordemos que para todo $v \in V$, $Ad_\psi(v) = \alpha(\psi) v \psi^{-1} \in V$. Ahora observemos que la traspuesta de un vector es el vector mismo (i.e. $w^t = w$ para todo $w \in V$) y aplicando esto a $Ad_\psi(v)$, se tiene

$$\alpha(\psi) v \psi^{-1} = (\psi^t)^{-1} v \alpha(\psi^t)$$

Por ende,

$$\begin{aligned} \psi^t \alpha(\psi) v \psi^{-1} (\alpha(\psi^t))^{-1} &= \alpha\left(\alpha(\psi^t)\psi\right) v \left(\alpha(\psi^t)\psi\right)^{-1} \\ &= Ad_{\alpha(\psi^t)\psi}(v) = v \end{aligned}$$

para todo $v \in V$. En consecuencia, $\alpha(\psi^t)\psi \in \mathcal{K}er(Ad)$, y por el Lema II.7, $\alpha(\psi^t)\psi \in k^\times$. Aplicando α obtenemos $\psi^t\alpha(\psi) = N(\psi^t) \in k^\times$. Como la traspuesta preserva el grupo de spin, concluimos que $N(\psi) \in k^\times$ para todo $\psi \in Spin(V, q)$.

Ahora observamos que si $\psi, \xi \in Spin(V, q)$ entonces

$$N(\psi\xi) = \psi\xi\alpha((\psi\xi)^t) = \psi\xi\alpha(\xi^t)\alpha(\psi^t) = \psi N(\xi)\alpha(\psi^t) = \psi\alpha(\psi^t)N(\xi) = N(\psi)N(\xi) \quad \square$$

Ahora vamos a establecer la suryectividad de la aplicación adjunta en algunos casos; para ello necesitamos el siguiente resultado clásico:

Teorema II.10 *(Cartan-Dieudonné) Sea q una forma quadrática no degenerada en un k-espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces todo elemento $g \in SO(V, q)$ puede ser escrito como el producto de r reflecciones (con r par)*

$$g = \rho_{v_1} \circ \cdots \rho_{v_r}$$

donde $r \leq dim_k(V)$.

DEMOSTRACIÓN:

Ver el libro de Artin [Artin][p 104]. $\square$

Diremos que un cuerpo k de característica distinta de 2 es **spin** cuando

$$k^\times = (k^\times)^2 \cup -(k^\times)^2,$$

i.e. cuando por lo menos una de las dos ecuaciones $t^2 = a$ o $t^2 = -a$ puede resolverse en k para todo elemento no nulo a de k. Los cuerpos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Z}_p$ con p primo y $p \equiv 3$ $(mod\ 4)$, son spin.

Teorema II.11 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo spin k, y supongamos que q es una forma cuadrática no degenerada sobre V. Entonces hay una sucesión exacta corta*

$$0 \to F \longrightarrow Spin(V, q) \longrightarrow SO(V, q) \to 1$$

donde la tercera flecha es la aplicación adjunta y

$$F = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\} & si\ \sqrt{-1} \notin k \\ \mathbb{Z}_4 = \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\} & \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN:

Por el Lema II.7, si $\psi \in \mathcal{K}er(Ad)$ entonces $\psi \in k^\times$. Ahora si $\psi = v_1 \cdots v_r$ entonces $\psi^2 = N(\psi) = N(v_1) \cdots N(v_r) = \pm 1$, lo que establece el núcleo de Ad.

La suryectividad de Ad se deduce de que como k es spin, es posible renormalizar todo $v \neq 0$ para obtener $q(v) = 1$, y ahora si $g \in SO(V, q)$ por el teorema de Cartan-Dieudonné existen $v_1, \cdots, v_r$ (con r par) tal que $g = \rho_{v_1} \circ \cdots \rho_{v_2}$. Renormalizando estos vectores, obtenemos un elemento $\psi = v_1 \cdots v_r$ del grupo de spin tal que $Ad_\psi = g$. $\square$

II.1.2 Las álgebras de Clifford canónicas

Nos concentraremos a partir de este momento en el caso concreto en que $V = \mathbb{R}^n$ y

$$q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_i x_i^2.$$

Denotaremos con $C\ell_n$ a ésta álgebra de Clifford. Notemos que si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ es una base ortonormal (con respecto al producto escalar usual) entonces el álgebra $C\ell_n$ tiene una base de 2^n vectores de la forma

$$e_{i_1} \cdots e_{i_r}$$

donde $0 \leq r \leq n$, $i_j < i_{j+1}$, y los elementos e_i están sujetos a la relación

$$e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = -2\delta_{ij}$$

Esto nos sugiere otra presentación del álgebra $C\ell_n$.

Definición II.12 *El enésimo* **grupo de Clifford** F_n *es el grupo presentado por generadores* $e_1, \cdots, e_n, -1$ *sujetos a las siguientes relaciones:*

$$-1 \textit{ es central, } \ (-1)^2 = 1, \ e_i^2 = -1 \ \ e_i e_j = (-1) e_j e_i \textit{ para } i \neq j$$

Nótese el isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$C\ell_n \simeq \mathbb{R}F_n / \mathbb{R} \cdot \{(-1) + 1\}$$

donde $\mathbb{R}F_n$ es el álgebra de grupo de F_n, i.e. el álgebra sobre $\mathbb{R}$ generada por F_n.

Recuérdese la descomposición canónica dada por el automorfimo α, que en este caso notaremos como

$$C\ell_n = C\ell_n^0 \oplus C\ell_n^1$$

Lema II.13 *Existe un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras*

$$C\ell_n \simeq C\ell_{n+1}^0$$

para todo n.

DEMOSTRACIÓN:

Elijamos una base ortonormal $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Identifiquemos $\mathbb{R}^n$ con $< e_1, \cdots, e_n >_{\mathbb{R}}$, y definamos una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to C\ell_{n+1}^0$ como

$$f(e_i) = e_{n+1} \cdot e_i \text{ para } i \neq n+1$$

y extendiendo linealmente. Para $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ se tiene

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(x) &= \textstyle\sum_{i,j} x_i x_j e_{n+1} \cdot e_i \cdot e_{n+1} \cdot e_j \\ &= \textstyle\sum_{i,j} x_i x_j e_i e_j \\ &= x \cdot x = -\|x\|^2 \cdot 1 \end{aligned}$$

Se desprende de la propiedad universal del álgebra de Clifford (Teorema II.2) que f se extiende a un homomorfismo de $I\!R$-álgebras

$$\widetilde{f} : C\ell_n \to C\ell^0_{n+1}$$

Chequeando sobre una base se ve que $\widetilde{f}$ es un isomorfismo. □

El problema de la clasificación

Demos un breve vistazo a la clasificación de las álgebras $C\ell_n$. Se ve fácilmente que $C\ell_1 = \mathbb{C}$ y $C\ell_2 = I\!H$ (el cuerpo de cuaterniones). Mediante el isomorfismo que acabamos de demostrar y un isomorfismo de periodicidad 2 ([L-M][p 25]) se construye la siguiente tabla ($K(n)$ denota a las matrices de $n \times n$ con coeficientes en K)

n	$\mathbf{C\ell_n}$
1	$\mathbb{C}$
2	$I\!H$
3	$I\!H \oplus I\!H$
4	$I\!H(2)$
5	$\mathbb{C}(4)$
6	$I\!R(8)$
7	$I\!R(8) \oplus I\!R(8)$
8	$I\!R(16)$

la cual, junto con el isomorfismo

$$C\ell_{n+8} \simeq C\ell_n \otimes C\ell_8$$

(ver [L-M][p 27]) nos da una clasificación completa de las álgebras reales.

Pasemos por un momento al caso complejo, donde definimos la forma cuadrática canónica $q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$q_{\mathbb{C}}(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j^2$$

y a partir de ella definimos el álgebra de Clifford compleja como

$$\mathbb{C}\ell_n \equiv C\ell\,(\mathbb{C}^n, q_{\mathbb{C}})$$

Es inmediato de la caracterización universal de álgebras de Clifford y de la aplicación $f : \mathbb{C}^n \to C\ell_n \otimes_{I\!R} \mathbb{C}$ dada por

$$f(a_1 + ib_1, \cdots, a_n + ib_n) = \overline{a} \otimes 1 + \overline{b} \otimes i$$

(donde $\overline{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in I\!R^n$ y similarmente $\overline{b} = (b_1, \cdots, b_n)$) que existe un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras (y por ende de $I\!R$-álgebras)

$$\mathbb{C}\ell_n \simeq C\ell_n \otimes_{I\!R} \mathbb{C}$$

Se ve fácilmente que

$$\mathbb{C}\ell_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

y

$$\mathbb{C}\ell_2 = \mathbb{C}(2).$$

Esto junto con el isomorfismo

$$\mathbb{C}\ell_{n+2} \simeq \mathbb{C}\ell_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\ell_2$$

(ver [L-M][p 27]) nos da la clasificación completa de las álgebras de Clifford complejas.

II.1.3 El grupo de Spin como revestimiento universal

Es un resultado clásico que el grupo SO_n es conexo para todo n. Evidentemente, $SO_2 \simeq S^1$ y por ende $\pi_1(SO_2) = \mathbb{Z}$. Un poco más difícil de establecer es el resultado $\pi_1(SO_n) = \mathbb{Z}_2$ para $n \geq 3$ (ver [Hilton][p 59]). En consecuencia, el revestimiento universal de SO_n es finito, con 2 puntos en cada fibra (para $n \geq 3$). Podemos establecer que el grupo $Spin_n = Spin(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^2)$ es este revestimiento universal.

Teorema II.14 *La aplicación*

$$Ad : Spin_n \to SO_n$$

representa al revestimiento universal de SO_n para todo $n \geq 3$.

DEMOSTRACIÓN:

Por el Teorema II.11, se tiene una sucesión exacta

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin_n \to SO_n \to 1$$

donde la tercer flecha es la aplicación adjunta. Sólo resta probar que este revestimiento es simplemente conexo; como se trata de un revestimiento de dos hojas, basta probar que no se trata del revestimiento trivial $\mathbb{Z}_2 \times SO_n$. Pero entonces es evidente que lo único que hay que probar es que hay un arco continuo dentro de $Spin_n$ que une -1 con 1. El arco $\gamma : [0, \pi] \to Spin_n$ dado por

$$\gamma(t) = (e_1 \cos t + e_2 \sin t) \cdot (e_2 \sin t - e_1 \cos t)$$

es el requerido. $\square$

II.1.4 Representaciones

Definición II.15 *Sea $K \supset k$ una extensión de k. Una K-***representación** *de álgebra de Clifford $C\ell(V,q)$ es un homomorfismo de k-álgebras*

$$\rho : C\ell(V,q) \to Hom_K(W,W)$$

*donde W es un espacio vectorial de dimensión finita sobre K. Se dice que el espacio W es un $C\ell(V,q)$-***módulo** *sobre K. En general podemos omitir ρ y escribir $\rho(\psi)(w) \equiv \psi \cdot w$. El producto "$\cdot$" es la* **multiplicación de Clifford**.

Estaremos interesados principalmente en los casos $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$.

Teorema II.16 *Sea* $C\ell_n \to Hom_{I\!R}(W,W)$ *una representación real del álgebra de Clifford canónica. Entonces existe un producto interno* $< \cdot, \cdot >$ *en* W *tal que la multiplicación de Clifford por vectores unitarios de* $I\!R^n$ *es ortogonal, i.e.*

$$< e \cdot w, e \cdot w' >=< w, w' >$$

para todo $w, w' \in W$ *y todo* $e \in I\!R^n$ *tal que* $\|e\| = 1$.

Demostración:

Dado un producto escalar cualquiera $<,>_0$ en W, lo promediamos sobre el grupo finito F_n, i.e. definimos

$$< v, w >= \sum_{f \in F_n} < fv, fw >_0$$

Notemos que $< e_i w, e_i w >=< w, w >$, pues corresponde a una permutación de la suma. Si $i \neq j$, se tiene

$$\begin{aligned} < e_i w, e_j w > &= < e_j e_i w, e_j e_j w > \\ &= < e_j e_i w, -w > \\ &= < -e_i e_j w, -w > \\ &= < e_i e_j w, w > \\ &= < e_i e_i e_j w, e_i w > \\ &= < -e_j w, e_i w > \\ &= - < e_j w, e_i w >= - < e_i w, e_j w > \end{aligned}$$

y en consecuencia, si $i \neq j$, resulta $< e_i w, e_j w >= 0$. Ahora escribimos un vector de norma 1 como $e = \sum_j a_j e_j$, con $\sum_j a_j^2 = 1$, y entonces

$$< ew, ew >= \sum_j a_j^2 < e_j w, e_j w > + \sum i \neq j a_i a_j < e_i w, e_j w >=< w, w > \quad \square$$

Corolario II.17 *Con el producto escalar del teorema previo, el producto de Clifford por vectores de* $I\!R^n$ *es una transformación lineal antisimétrica, i.e.*

$$< v \cdot w, w' >= - < w, v \cdot w' >$$

para todo par $w, w' \in W$ *y todo* $v \in I\!R^n$.

Demostración:

Podemos suponer que $v \neq 0$. Entonces $< v \cdot w, w' >=< \frac{v}{\|v\|} \cdot v \cdot w, \frac{v}{\|v\|} \cdot w' >=$ $=< \frac{v^2}{\|v\|^2} \cdot w, v \cdot w' >= - < w, v \cdot w' >$. $\square$

II.2 Fibrados y operadores

En esta sección nos concentraremos en presentar los objetos esenciales para introducir un espacio de Hilbert sobre las secciones de un fibrado de una variedad diferenciable (el espacio de L^2 spinores), así como de un operador autoadjunto no acotado en este espacio (el operador de Dirac). Para ello haremos primero un breve repaso de los fibrados principales sobre una variedad, para luego pasar rápidamente al caso concreto que nos interesa (el fibrado de Dirac). Por último introduciremos el operador de Dirac en este fibrado utilizando coordenadas locales, y citaremos algunos resultados clásicos de la teoría de operadores elípticos para deducir propiedades del espectro de este operador que serán esenciales más adelante.

II.2.1 Fibrados

Definición II.18 *Sea M una variedad diferenciable, y G un grupo topológico. Un* **fibrado G-principal** *es un fibrado $\pi : P \to M$ junto con una acción a derecha, continua, de G en P que preserva las fibras y actúa simple y transitivamente sobre ellas. En consecuencia, las fibras son exactamente las órbitas de G. Además requerimos que para cada punto $p \in M$ exista un entorno U de p y un homeomorfismo $h_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ de la forma $h_U(x) = (\pi(x), \gamma(x))$ con la propiedad que $h(xg) = (\pi(x), \gamma(x)g)$ para todo $g \in G$.*

Ejemplo 1 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, y TM su fibrado tangente. Sobre el podemos considerar distintos fibrados de grupo.*

$P_{GL}(M) = P_{GL}(TM)$ es el **fibrado de bases** de TM, que en cada fibra sobre $p \in M$ es el conjunto de todas las bases del espacio vectorial T_pM. Este es un fibrado GL_n-principal. La acción de $GL_n = GL(n, \mathbb{R})$ sobre $P_{GL}(M)$ se define como sigue: fijemos una matriz $g = g_{ij} \in GL_n$. Entonces dada una base $b = (v_1, ..., v_n)$ de T_pM, ponemos $bg \equiv (v'_1, ..., v'_n)$ donde

$$v'_j = \sum_k v_k g_{kj}$$

para $j = 1...n$. Esta acción es claramente continua y es simple y transitiva sobre las fibras. La trivialización local se deduce de la trivialización local de TM.

Si M es orientable, podemos considerar el **fibrado de bases orientadas** $P_{GL^+}(M)$, que en cada fibra tiene todas las bases con la misma orientación (notar que una elección continua de este tipo sólo es posible merced a la orientación de M). Este es un fibrado GL_n^+-principal, donde $GL_n^+ = \{g \in GL_n : det(g) > 0\}$.

Si M es Riemanniana, podemos construir el fibrado $P_O(M)$ de **bases ortonormales**, el cual es evidentemente un fibrado O_n-principal. Si además M es orientable, podemos considerar el **fibrado de bases ortonormales orientadas** $P_{SO}(M)$, el cual resulta un fibrado SO_n-principal.

Definición II.19 *Si M es una variedad Riemanniana, el fibrado de Clifford de TM se define como un fibrado cociente:*

$$C\ell(M) = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \otimes^r TM \right) \Big/ I(TM)$$

donde $I(TM)$ es el fibrado de ideales cuya fibra en $p \in M$ es el ideal bilátero $I(T_pM)$ en $\sum_{r=0}^{\infty} \otimes^r T_pM$, generado por los elementos $v \otimes v + \|v\|^2$ para $v \in T_pM$. Este fibrado es un fibrado de álgebras de Clifford sobre M, con el producto en cada fibra dado por el producto de Clifford usual.

Similarmente, el fibrado de Clifford complejo sobre M se define como

$$\mathbb{C}\ell(M) = C\ell(M) \otimes \mathbb{C}$$

En este momento es preciso fijar un poco la notación. Para una variedad diferenciable M se tienen los siguientes espacios: (más adelante introduciremos otros)

$$\mathcal{C}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ es continua}\}$$

$$C(M) = \{f : M \to \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ es continua}\}$$

$$\mathcal{C}^{\infty}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ es diferenciable}\}$$

$$\mathcal{C}_c(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ es continua y tiene soporte compacto}\}$$

$$\mathcal{C}_c^{\infty}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ es diferenciable y tiene soporte compacto}\}$$

Asimismo, dado un fibrado E sobre M, denotaremos con (M, E) a las secciones del fibrado que sean de alguna de estas clases: así por ejemplo, $\mathcal{C}^{\infty}(M, E)$ son las secciones diferenciables del fibrado E.

Definición II.20 *Si M es una variedad Riemanniana, una* **derivada covariante** *en TM es una función lineal*

$$\nabla : \mathcal{C}^{\infty}(M, TM) \to \mathcal{C}^{\infty}(M, T^*M \otimes TM)$$

tal que

$$\nabla(fV) = df \otimes V + f\nabla V$$

para toda $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$ y todo $V \in \mathcal{C}^{\infty}(M, TM)$.

Identificando $T^*M \otimes TM$ con $Hom(TM, TM)$ en la forma canónica, se tiene que para todo campo diferenciable $X \in \mathcal{C}^{\infty}(M, TM)$ el operador ∇ define un operador

$$\nabla_X : \mathcal{C}^{\infty}(M, TM) \to \mathcal{C}^{\infty}(M, TM)$$

dado por

$$\nabla_X(V) = (\nabla V)(X)$$

Con esto, podemos pensar a ∇ como un operador

$$\nabla : \mathcal{C}^{\infty}(M, TM) \times \mathcal{C}^{\infty}(M, TM) \to \mathcal{C}^{\infty}(M, TM)$$

Este operador cumple las propiedades de una **conexión**, a saber

$$(a) \quad \nabla_{fX+gY}V = f\nabla_X V + g\nabla_Y V \qquad \text{para } f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$$

$$(b) \quad \nabla_X(aV + bW) = a\nabla_X V + b\nabla_X W \quad \text{para } a, b \in I\!R$$

$$(c) \quad \nabla_X(fV) = (Xf)V + f\nabla_X V \qquad \text{para } f \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

Diremos que la conexión es **compatible con la métrica** g de M cuando valga

$$X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >$$

para toda terna de campos $X, Y, Z \in \mathcal{C}^\infty(M, TM)$.

Diremos que una conexión es **simétrica** cuando su tensor de torsión se desvanezca en todos lados, i.e. cuando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X, Y]$$

Cabe preguntarse a esta altura sobre la existencia siquiera de una conexión no trivial sobre una variedad Riemanniana.

El siguiente teorema nos da la clave (su demostración puede verse en cualquier libro de geometría, como por ejemplo, en [Lee][p 68])

Teorema II.21 *(***Lema Fundamental de la Geometría Riemanniana)** *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Entonces existe una única conexión ∇ en M que es compatible con g y simétrica. Esta conexión se conoce comunmente con el nombre de* **conexión Riemanniana canónica** *o bien* **conexión de Levi-Civita**.

Definición II.22 *Definiremos un par de objetos a partir de esta conexión de Levi-Civita, que serán útiles más adelante.*

Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, definimos su **gradiente** como el único campo $\nabla f \in \mathcal{C}^\infty(M, TM)$ tal que

$$< \nabla f, X > \equiv Xf \qquad \text{para todo } X \in \mathcal{C}^\infty(M, TM)$$

En coordenadas locales, la expresión del gradiente es

$$\nabla f = \sum_i \left(\sum_j g^{ij} \partial_j f \right) \partial_i$$

donde g^{ij} es la inversa de la matriz $g_{ij} = < \partial_i, \partial_j >$.

Definimos la **divergencia** de un campo X como la traza de la aplicación $(Y \mapsto \nabla_Y X)$. En coordenadas locales, si $X = \sum_i X^i \partial_i$, entonces se tiene la expresión

$$divX = \sum_i (\nabla_{\partial_i} X)^i = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \partial_i \left(\sqrt{G} X^i \right)$$

donde $G = det(g_{ij})$.

II.2.2 Fibrados de Dirac

Puede probarse ([L-M][p 107]) que dada una conexión sobre TM, esta se extiende en forma única a una conexión ∇ sobre el fibrado $C\ell(M)$ con la propiedad de actuar como una derivación con respecto al producto de Clifford, i.e. se tiene para todo par $\psi, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(M, C\ell(M))$ que

$$\nabla(\psi \cdot \varphi) = \nabla(\psi) \cdot \varphi + \psi \cdot \nabla(\varphi)$$

Nosotros nos ocuparemos de un caso más general, que es el de las variedades M que admitan un fibrado vectorial S (real o complejo) tal que cada fibra sea un módulo a izquierda sobre el fibrado de Clifford (real o complejo respectivamente) de M. Requeriremos asimismo que este fibrado sea Riemanniano, es decir, que esté provisto de un producto escalar en cada fibra.

En vista de los resultados de la sección previa (Teorema II.16) vamos a agregar la hipótesis de que la multiplicación por vectores unitarios sea una transformación ortogonal, i.e.

$$< e \cdot \sigma_1, e \cdot \sigma_2 > = < \sigma_1, \sigma_2 > \tag{II.5}$$

y considerando que $e^2 = -1$, se deduce que esto es equivalente a

$$< e \cdot \sigma_1, \sigma_2 > + < \sigma_1, e \cdot \sigma_2 > = 0 \tag{II.6}$$

De aquí se obtiene que la multiplicación por vectores de TM es una transformación lineal antismétrica, i.e

$$< v \cdot \sigma_1, \sigma_2 > = - < \sigma_1, v \cdot \sigma_2 >$$

para todo $v \in TM$. También es evidente que para todo $v \in TM$ se tiene

$$< v \cdot \sigma_1, v \cdot \sigma_2 > = \|v\|^2 < \sigma_1, \sigma_2 >$$

Notando que para cada $p \in M$ se tiene para un producto escalar arbitrario

$$\|a_p \cdot b_p\| \leq c(p)\|a_p\|\|b_p\|$$

requeriremos que el producto cumpla

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\|\|b\| \tag{II.7}$$

lo cual puede lograrse partiendo de cualquier métrica si suponemos que la función $c(p)$ tiene un comportamiento no demasiado descontrolado, tomando una $f \geq 1$ diferenciable tal que $f \geq c$ y efectuando el siguiente cambio conforme en la métrica: $< a, b >_0 = f^2 < a, b >$. (De hecho, para nuestros propósitos basta que $f(p) \geq c(p)$ salvo un conjunto medida nula).

En vista del resultado para el fibrado de Clifford requeriremos que la conexión de Levi-Civita inducida por esta métrica sea una derivación de módulos, i.e.

$$\nabla(\varphi \cdot \sigma) = \nabla(\varphi) \cdot \sigma + \varphi \cdot \nabla(\sigma) \tag{II.8}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M, C\ell(M))$ y todo $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M, S)$.

Definición II.23 *Un* **fibrado de Dirac** *real sobre una n-variedad Riemanniana M es un fibrado vectorial real S de $C\ell(M)$-módulos a izquierda junto con una métrica Riemanniana y una conexión Riemanniana canónica ∇ en S con las propiedades adicionales (II.5), (II.7) y (II.8). Un fibrado de Dirac complejo se define similarmente, comenzando con un fibrado vectorial complejo S y reemplazando $C\ell(M)$ por $\mathbb{C}\,\ell(M)$ (por supuesto, la métrica es una forma sesquilineal).*

II.2.3 El operador de Dirac

Definición II.24 *Sea S un fibrado de Dirac sobre una variedad diferenciable M de dimensión n. Tomemos una carta (U,ϕ). Dado $\sigma \in C^{\infty}(M,S)$ y $p \in U$ definimos*

$$(D\sigma)_p = \sum_{i,j} g^{ij}(p) \frac{\partial}{\partial \phi^i} \mid_p \cdot \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi^j}} \sigma \right)_p$$

donde g^{ij} es la inversa de la matriz del tensor métrico en este sistema de coordenadas, es decir $g_{ij}(p) =< \frac{\partial}{\partial \phi^i}, \frac{\partial}{\partial \phi^j} >_p$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. El punto denota multiplicación de Clifford en S.

No es difiícil ver que esta definición es compatible con los cambios de coordenadas, y por ende define un elemento $D\sigma \in C^{\infty}(M,S)$.

El operador D se denomina **operador de Dirac** *del fibrado S.*

El operador D^2 se denomina **Laplaciano de Dirac**.

Observación II.25 *El operador D restringido a $C^{\infty}(M)$ coincide con el gradiente usual de funciones.*

En efecto, sea $p \in M$, y tomemos $(x_1, ...x_n)$ un sistema de coordenadas normales Riemannianas centrado en p. De esta manera, llamando $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ se tiene que $\{e_1(p), ..., e_n(p)\}$ es una base ortonormal de T_pM.

En este sistema de coordenadas se tiene $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, y en consecuencia

$$(D\sigma)(p) \equiv \sum_{j=1}^{n} e_j(p) \cdot (\nabla_{e_j}\sigma)_p$$

de donde es evidente que para $f \in C^{\infty}(M)$ se tiene $Df = \nabla f$. □

Definición II.26 *Dada una carta (U,ϕ) en M, para $f : U \to \mathbb{C}$ definimos*

$$\int_U f(p)d\mu(p) = \int_{\phi(U)} f \circ \phi^{-1}(x)\sqrt{G \circ \phi^{-1}(x)}dx$$

donde $G : U \to \mathbb{R}$ es el determinante de la matriz del tensor métrico, i.e

$$g_{ij} =< \frac{\partial}{\partial \phi^i}, \frac{\partial}{\partial \phi^j} >$$

y $G = det\,(g_{ij})$. Por el teorema de cambio de variable sobre $\mathbb{R}^n$, esta integral está bien definida y **no depende** *de ϕ.*

Tomando un cubrimiento localmente finito (U_i, ϕ_i) de M por cartas, construimos una partición de la unidad $\{\rho_i\}$ subordinada a U_i y escribimos $f = \sum_i f_i$ (donde $f_i = f\rho_i$) para toda $f : M \to \mathbb{C}$. Definimos

$$\int_M f(p)d\mu(p) \equiv \sum_i \int_{U_i} f_i(p)d\mu(p)$$

Se verifica trivialmente (cf [Sakai][p 62]) que esta definición no depende de la elección de la partición de la unidad, y por ende define una medida de Radón positiva sobre M, la **medida inducida por la métrica**. *De aquí en adelante nos referiremos siempre a esta medida como* **la** *medida sobre M.*

Definición II.27 *Consideremos el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(M,S)$ con el producto escalar*

$$(\sigma_1, \sigma_2) = \int_M <\sigma_1, \sigma_2>_p d\mu(p)$$

La completación de este espacio con respecto a la norma inducida por este producto escalar lo denominaremos $L^2(M,S)$, el espacio de L^2 spinores sobre la variedad M.

Proposición II.28 *El operador de Dirac de cualquier fibrado de Dirac es un operador lineal simétrico sobre $\mathcal{C}_c^\infty(M,S)$, es decir*

$$(D\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1, D\sigma_2)$$

DEMOSTRACIÓN:

Que es un operador lineal es evidente. Veamos que es simétrico.

Fijemos $p \in M$ y elijamos sistema de coordenadas $\{e_1, ...e_n\}$ ortonormales en p y tales que $(\nabla_{e_i} e_j)_p = 0$ para todo i, j (esto es simplemente pedir que los símbolos de Cristoffel se desvanezcan en p, lo que se logra mediante coordenadas normales Riemannianas, ver [Lee][p 78]). Ahora dados σ_1, σ_2 definimos un campo vectorial V como

$$<V, W> = - <\sigma_1, W \cdot \sigma_2>$$

Notemos que

$$\begin{aligned} div(V)_p &= \textstyle\sum_i <\nabla_{e_i} V, e_i>_p \\ &= \textstyle\sum_i \{e_i <V, e_i> - <V, \nabla_{e_i} e_i>\}_p \\ &= \textstyle\sum_i \{e_i <V, e_i>\}_p \\ &= -\textstyle\sum_i \{e_i <\sigma_1, e_i \cdot \sigma_2>\}_p \end{aligned}$$

Usando las propiedades (II.6) y (II.8) obtenemos

$$<D\sigma_1, \sigma_2>_p = \sum_i <e_i \nabla_{e_i} \sigma_1, \sigma_2>_p = - <\nabla_{e_i} \sigma_1, e_i \sigma_2>_p$$

$$\begin{aligned} &= -\textstyle\sum_i \{e_i <\sigma_1, e_i\sigma_2> - <\sigma_1, (\nabla_{e_i} e_i)\sigma_2> - <\sigma_1, e_i \nabla_{e_i} \sigma_2>\}_p \\ &= -\textstyle\sum_i \{e_i <\sigma_1, e_i\sigma_2>\}_p + <\sigma_1, D\sigma_2>_p \\ &= div(V)_p + <\sigma_1, D\sigma_2>_p \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene la igualdad

$$< D\sigma_1, \sigma_2 >= div(V) + < \sigma_1, D\sigma_2 >$$

Integrando a ambos lados, y utilizando que $\int_M div(V) d\mu = 0$ (ver [Sakai][p 71]), se obtiene la simetría del operador de Dirac. $\square$

Recordemos que la **clausura** de un operador T en un espacio de Hilbert es el minimo operador que extiende a T y que tiene gráfico cerrado. Esta clausura no siempre existe, es decir, un operador no acotado puede no tener ninguna extensión cerrada. Sin embargo, si el operador es simétrico, siempre es clausurable (ver [Simon][p 255]). En este caso se tiene $\mathcal{D}om(T) \subset \mathcal{D}om(T^*)$. Se dice que un operador simétrico es autoadjunto cuando vale la otra inclusión, es decir, cuando $\mathcal{D}om(T) \subset \mathcal{D}om(T^*)$. Notemos que un operador simétrico cerrado puede no ser autoadjunto, y puede admitir infinitas extensiones autoadjuntas (ver el ejemplo de [Simon][p 116]). Sin embargo, si consideramos el operador de Dirac definido sobre $\mathcal{C}_C^\infty(M,S)$, y tomamos su clausura con respecto a este conjunto, obtenemos un operador simétrico D no acotado en $L^2(M,S)$ cuyo dominio es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}om(D) &= \{\sigma \in L^2(M,S) \text{ tal que existen } \{\phi_n\} \subset \mathcal{C}_C^\infty(M,S),\ \psi \in L^2(M,S), \\ &\quad \text{tales que } \phi_n \to \sigma \text{ y } D\phi_n \to \psi\} \end{aligned}$$

donde la convergencia es en $L^2(M,S)$. Para este operador vale el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [L-M][p 117]:

Teorema II.29 *Sea M una variedad Riemanniana geodésicamente completa, S un fibrado de Dirac sobre M y D la extensión del operador de Dirac dada arriba. Entonces D es un operador autoadjunto en $L^2(M,S)$.*

Notemos que si a es una función (a valores reales o complejos) sobre un fibrado de Dirac (real o complejo respectivamente) entonces si $a \in \mathcal{D}om(D)$, el gradiente ∇a existe pp y está en $L^2(M,S)$. Sin embargo, podemos decir algo más sobre a; necesitamos primero un par de definiciones:

Definición II.30 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Dada $u \in L^2(U)$, diremos que una función v_i es la* ***i-ésima derivada distribucional*** *de u si para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ se tiene*

$$\int_U u \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx = -\int_U v_i \phi dx \tag{II.9}$$

Notemos que si u es derivable, la derivada parcial de u cumple el papel de v_i en la ecuación (II.9), ya que

$$\int_U \frac{\partial (u\phi)}{\partial x^i} dx = 0$$

por tener ϕ soporte compacto. Cabe mencionar (cf [Evans][p 243]) que si existe la derivada distribucional, esta función esta únicamente determinada (salvo por un conjunto de medida cero).

Definición II.31 *Definimos el* **espacio de Sobolev** $W^{1,p}$ *como el siguiente subconjunto de* $L^p(U)$*:*

$$W^{1,p}(U) = \{u \in L^p(U) : \textit{existen todas las derivadas distribucionales, y están en } L^p(U)\}$$

Definición II.32 *Sea M una variedad diferenciable. Definimos el espacio de Sobolev $W^{1,p}(M)$ como el conjunto de todas las funciones $u : M \to I\!R$ tales que para toda carta (U, φ), la función $u \circ \varphi^{-1} \in W^{1,p}(U)$.*

No es difícil ver que basta con tomar un cubrimiento de M por cartas y chequear para este cubrimiento, ya que dadas dos cartas cualesquiera (U_1, φ_1), (U_2, φ_2), la aplicación $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ induce un isomorfismo entre los respectivos espacios de Sobolev $W^{1,p}(\varphi_i(U_1 \cap U_2))$ (cf [Hormander][p 27]). En particular, si M es compacta, basta chequearlo para finitas cartas.

Teorema II.33 *Sea D el operador de Dirac de un fibrado sobre una variedad compacta M. Si $u \in \mathcal{D}om(D)$, entonces $u \in W^{1,2}(M)$*

Demostración:

Dado $p \in M$, tomemos una carta (V, ψ) centrada en p tal que $\psi(V) = B(0, 2) \subset I\!R^n$. Llamando $B = B(0, 1)$, consideremos la carta (U, φ) centrada en p dada por $U = \psi^{-1}(B)$, $\varphi = \psi\mid_U$. Cubramos M con estas cartas, y extraigamos un subcubrimiento finito. Dada $u \in \mathcal{D}om(D)$, chequearemos que $u \circ \varphi^{-1} \in W^{1,2}(B)$ para cada una de estas cartas.

Fijemos un poco la notación. Como siempre, $g_{ij}(p) =< \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\mid_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\mid_p >$ para $p \in U$. LLamaremos $G(p) = det\,(g_{ij}(p))$. Utilizaremos μ_g para notar la medida sobre la variedad inducida por la métrica.

Como el tensor métrico es definido positivo, las funciones g_{ii} y G son siempre positivas. Lo mismo puede afirmarse de $\sqrt{G}$. Ahora notemos que por la elección de la carta, las funciones $g_{ii} \circ \varphi^{-1}(x)$ y $\sqrt{G \circ \varphi^{-1}(x)}$ definidas en B, se extienden en forma diferenciable a $B(0, 2)$. En particular, se extienden en forma continua a $\overline{B}$. Como este es un conjunto compacto, y estas funciones son positivas, se deduce que existen constantes tales que

$$\begin{aligned} 0 < \epsilon &\leq g_{ii} \circ \varphi^{-1}(x) \leq C \\ 0 < \delta &\leq \sqrt{G \circ \varphi^{-1}(x)} \leq K \end{aligned} \tag{II.10}$$

para todo $x \in B$, o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} 0 < \epsilon &\leq g_{ii}(p) \leq C \\ 0 < \delta &\leq \sqrt{G}(p) \leq K \end{aligned} \tag{II.11}$$

para todo $p \in U$.

Ahora si $u \in \mathcal{D}om(D)$, en particular $u \in L^(M)$, y por consiguiente

$$\begin{aligned}
\int_B \mid u \circ \varphi^{-1}(x) \mid^2 dx &= \int_B \mid u \circ \varphi^{-1}(x) \mid^2 \tfrac{\sqrt{G \circ \varphi^{-1}(x)}}{\sqrt{G \circ \varphi^{-1}(x)}} dx \\
&= \int_U \mid u \mid^2 \tfrac{1}{\sqrt{G}} d\mu_g \\
&\leq \tfrac{1}{\delta} \int_U \mid u \mid^2 d\mu_g \\
&\leq \tfrac{1}{\delta} \int_M \mid u \mid^2 d\mu_g < \infty
\end{aligned}$$

lo que prueba que $u \circ \varphi^{-1} \in L^2(B)$.

Por otra parte, existen $u_n \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\xi \in L^2(M, S)$ tales que $u_n \to u$, $Du_n \to \xi$ en $L^2(M, S)$. Por ende, para toda carta (U, φ) se tiene

$$u_n \mid_U \to u \mid_U$$

en $L^2(U)$ y similarmente

$$Du_n \mid_U \to \xi \mid_U$$

en $L^2(U, S)$. Claramente, $\xi \mid_U \in L^2(U, S)$. Además, se tiene la expresión local

$$\xi \mid_U = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

y afirmamos que cada $\xi_i \in L^2(U)$. De lo contrario, se tendría $\int_U \xi_i^2 d\mu_g = +\infty$. Pero entonces también

$$\int_U \xi_i^2 g_{ii} d\mu_g \geq \epsilon \int_U \xi_i^2 d\mu_g = +\infty$$

lo que contradice el hecho de que $\xi \mid_U \in L^2(U, S)$, ya que

$$\|\xi \mid_U \|^2 = \sum_{r \neq s} \xi_r \xi_s g_r s + \sum_i \xi_i^2 g_{ii}$$

Ahora la expresión local de Du_n es

$$Du_n \mid_U = \sum_i \left(\sum_j g^{ij} \frac{\partial u_n}{\partial \varphi^j} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

Ahora hacemos uso del hecho de que existe una trivialización del fibrado para el abierto U, y entonces es evidente que para cada coordenada hay convergencia en $L^2(U)$, i.e.

$$\sum_j g^{ij} \frac{\partial u_n}{\partial \varphi^j} \to \xi_i \tag{II.12}$$

en $L^2(U)$.

Multiplicando por g_{ki} y sumando sobre i en (II.12) obtenemos

$$\frac{\partial u_n}{\partial \varphi^k} \to \sum_i g_{ki}\xi_i = v_k$$

en $L^2(U)$. Claramente, cada v_k está en $L^2(U)$ pues los coeficientes son acotados y cada ξ_i está.

Notemos que como $u_n\mid_U \to u\mid_U$ en $L^2(U)$, para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mid \textstyle\int_U \phi u_n d\mu_g - \int_U \phi u d\mu_g \mid &\leq \textstyle\int_U \mid \phi(u_n - u) \mid d\mu_g \\ &\leq \textstyle\int_U \mid \phi \mid^2 d\mu_g \int_U \mid u_n - u \mid^2 d\mu_g \to 0 \end{aligned}$$

es decir

$$\int_U \phi u_n d\mu_g \to \int_U \phi u d\mu_g$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$.

Con un razonamiento similar, se obtiene

$$\int_U \frac{\partial u_n}{\partial \varphi^k}\phi d\mu_g \to \int_U v_k \phi d\mu_g$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$.

Ahora veamos que las derivadas distribucionales de $u \circ \varphi^{-1}$ existen. Sea $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(B)$. Entonces las funciones

$$\frac{\partial \psi \circ \varphi}{\partial \varphi^k}\frac{1}{\sqrt{G}} \quad y \quad \frac{\psi \circ \varphi}{\sqrt{G}}$$

están claramente en $\mathcal{C}_c^\infty(U)$, y en consecuencia

$$\begin{aligned} \textstyle\int_B u \circ \varphi^{-1}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x^k}(x) dx &= \textstyle\int_B u \circ \varphi^{-1}(x) \frac{\partial \psi \circ \varphi \circ \varphi^{-1}}{\partial x^k}(x) \frac{1}{\sqrt{G \circ \varphi^{-1}(x)}} \sqrt{G \circ \varphi^{-1}(x)} dx \\ &= \textstyle\int_U u \left(\frac{\partial \psi \circ \varphi}{\partial \varphi^k} \frac{1}{\sqrt{G}} \right) d\mu_g \\ &= \textstyle\lim_n \int_U u_n \left(\frac{\partial \psi \circ \varphi}{\partial \varphi^k} \frac{1}{\sqrt{G}} \right) d\mu_g \\ &= \textstyle\lim_n \int_B u_n \circ \varphi^{-1}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x^k}(x) dx \\ &= \textstyle -\lim_n \int_B \frac{\partial (u_n \circ \varphi^{-1})}{\partial x^k}(x) \psi(x) dx \\ &= \textstyle -\lim_n \int_B \frac{\partial (u_n \circ \varphi^{-1})}{\partial x^k}(x) \frac{\psi \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(x)}{\sqrt{G \circ \varphi^{-1}(x)}} \sqrt{G \circ \varphi^{-1}(x)} dx \\ &= \textstyle -\lim_n \int_U \frac{\partial u_n}{\partial \varphi^k} \left(\frac{\psi \circ \varphi}{\sqrt{G}} \right) d\mu_g \\ &= \textstyle -\int_U v_k \left(\frac{\psi \circ \varphi}{\sqrt{G}} \right) d\mu_g \\ &= \textstyle -\int_B v_k \circ \varphi^{-1}(x) \psi(x) dx \end{aligned}$$

lo que prueba que las funciones $v_k \circ \varphi^{-1}$ son las derivadas distribucionales de u. Resta ver que están en $L^2(B)$:

$$\begin{aligned}
\int_B \mid v_k \circ \varphi^{-1}(x) \mid^2 dx &= \int_B \mid v_k \circ \varphi^{-1}(x) \mid^2 \tfrac{1}{\sqrt{G\circ\varphi^{-1}(x)}} \sqrt{G \circ \varphi^{-1}(x)} dx \\
&= \int_U \mid v_k \mid^2 \tfrac{1}{\sqrt{G}} d\mu_g \\
&\leq \tfrac{1}{\delta} \int_U \mid v_k \mid^2 d\mu_g < \infty \quad \square
\end{aligned}$$

Observación II.34 *Sea S un fibrado de Dirac y D su operador de Dirac. Si $\sigma \in \mathcal{D}om(D)$ y $f \in C_c(M)$ es tal que existe ∇f y es acotado, entonces $f\sigma \in \mathcal{D}om(D)$ y se tiene*

$$D(f\sigma) = fD\sigma + \nabla f \cdot \sigma$$

En efecto, consideremos primero el caso en que el fibrado es real, y notemos que todos los productos están en $L^2(M, S)$ por ser f y ∇f acotados, y ahora tomando una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de T_pM calculemos

$$\begin{aligned}
(Df\sigma)_p &= \textstyle\sum_i e_i \cdot (\nabla_{e_i} f\sigma)_p \\
&= \textstyle\sum_i e_i \cdot f(p)(\nabla_{e_i}\sigma)_p + \sum_i e_i \cdot (\nabla_{e_i} f)_p \sigma_p \\
&= f(p) \textstyle\sum_i e_i \cdot (\nabla_{e_i}\sigma)_p + (\sum_i (\nabla_{e_i} f)_p e_i) \cdot \sigma_p \\
&= f(p)(D\sigma)_p + (\nabla f)_p \cdot \sigma_p
\end{aligned}$$

El resultado para fibrados complejos se deduce de la linealidad de D y de la definición $\nabla f = \nabla u + i\nabla v$ si $f = u + iv$. $\square$

Sea M una n-variedad diferenciable, con fibrado de Dirac S. Si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, es un multi-índice con $\alpha_i \in I\!N$, denotaremos con $\mid \alpha \mid = \sum_i \alpha_i$, y similarmente

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} ... \partial x^{\alpha_n}}$$

Recordemos que la definición del **símbolo principal** de un operador diferencial $D : \mathcal{C}^\infty(M, S) \to \mathcal{C}^\infty(M, S)$ es una función que asocia a cada punto $p \in M$ y cada vector cotangente $\xi \in T_p^*M$ un operador lineal $\sigma_\xi(D) : S_p \to S_p$, que se define de la siguiente manera: si en coordenadas locales se tiene

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \quad \text{y} \quad \xi = \sum_k \xi_k dx_k$$

donde m es el orden de D, entonces

$$\sigma_\xi(D) = i^m \sum_{|\alpha| = m} A_\alpha(x) \xi^\alpha$$

donde $\xi^\alpha = \xi_{\alpha_1} ... \xi_{\alpha_n}$.

Este símbolo tiene una definición intrínseca (ver [M Taylor I][p 158]) que es la siguiente: si $f \in C^\infty(M)$ y $\xi = df$, entonces para toda $u \in \mathcal{D}om(D)$ se tiene

$$\sigma_\xi(D)u = \lim_{t\to\infty} t^{-m} e^{-itf} D(ue^{itf})$$

Con esta definición es sencillo probar que si $P, Q : C^\infty(M,S) \to C^\infty(M,S)$ son dos operadores diferenciales, entonces

$$\sigma_\xi(P \circ Q) = \sigma_\xi(P) \circ \sigma_\xi(Q)$$

Con estos datos probaremos el siguiente resultado (recordemos que un operador es **elíptico** cuando su símbolo principal es un isomorfismo para todo $\xi \neq 0$)

Proposición II.35 *Sea D el operador de Dirac de un fibrado de Dirac S. Entonces para todo $\xi \in T^*M$ se tiene*

$$\sigma_\xi(D) = i\xi\cdot$$

$$\sigma_\xi(D^2) = \|\xi\|^2$$

donde el punto denota multiplicación de Clifford.

En particular, D y D^2 son operadores elípticos.

Demostración:

Fijemos un $p \in M$ y un sistema de coordenadas $(x_1, ...x_n)$ centrado en p tal que $(\frac{\partial}{\partial x_i})_0$ se corresponda con una base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM (coordenadas normales Riemannianas). Mediante el producto escalar del fibrado identificaremos $e_i = (dx_i)_0$ para todo $i = 1..n$.

Ahora notemos que para cualquier trivialización de S en un entorno de p se tiene $\nabla_{e_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}+$ términos de orden cero. En consecuencia, en 0 se tiene $D = \sum_i e_i(\frac{\partial}{\partial x_i})_0+$ términos de orden cero. En consecuencia, para todo vector cotangente $\xi = \sum_i \xi_j(dx_i)_0$ en 0, por la definición del símbolo se tiene $\sigma_\xi(D) = i\sum_i e_i\xi_i = i\xi$.

Asimismo, $\sigma_\xi(D^2) = \sigma_\xi(D) \circ \sigma_\xi(D) = -\xi \cdot \xi = \|\xi\|^2$ $\square$

Notemos que como el operador D es autoadjunto i y $-i$ están en la resolvente de D, y en consecuencia $D^2 + 1 = (D+i)(D-i)$ tiene inversa acotada. El hecho de que D^2 sea elíptico nos permite afirmar algunas cosas más sobre el operador $T = (D^2+1)^{-1}$. Para ello necesitamos el siguiente resultado sobre operadores elípticos, cuya demostración puede hallarse en [L-M][p 198]:

Proposición II.36 *Sea $P : \mathcal{C}^\infty(M,S) \to \mathcal{C}^\infty(M,S)$ un operador diferencial eliptico positivo, autoadjunto de orden m sobre una n-variedad compacta M. Entonces existe una base ortonormal $\{u_k\}$ de $L^2(M)$ tal que*

$$Pu_k = \lambda_k u_k \qquad \textit{para todo } k \in \mathbb{N}$$

con $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \to \infty$, con cada autovalor de multiplicidad finita. Además existe una constante $c > 0$ tal que

$$\lambda_k \geq ck^{\frac{2m}{n(n+2m+2)}} \qquad \textit{para todo } k \in \mathbb{N}$$

Aplicando este resultado al operador D^2 obtenemos

Lema II.37 *Sea D el operador de Dirac de un fibrado de Dirac sobre una variedad compacta M. Entonces existe p con $1 < p < \infty$ tal que $T = (D^2 + 1)^{-1}$ es un operador de traza p, es decir, $\mid T \mid^p$ es un operador de traza.*

DEMOSTRACIÓN:

Por la proposición previa, se tiene que existe una base ortonormal $\{u_k\}$ de $L^2(M)$ tal que

$$D^2 u_k = \lambda_k u_k$$

De aquí se deduce que

$$(D^2 + 1)u_k = (\lambda_k + 1)u_k$$

Dividiendo por $\lambda_k + 1$ y multiplicando a ambos lados por T se obtiene

$$Tu_k = \frac{1}{1+\lambda_k} u_k = \beta_k u_k$$

para todo k. Notemos entonces que T es un operador autoadjunto positivo, y por ende $\mid T \mid = T$.

Ahora usamos la cota para los autovalores de D^2 de la proposición previa para concluir que

$$\beta_k \leq \frac{1}{1 + ck^r} \leq \frac{M}{k^r} \tag{II.13}$$

donde $r = \frac{4}{n(n+6)} < 1$.

Ahora si $p > 1/r$, $p.r = 1 + \epsilon$, con $\epsilon > 0$. En consecuencia

$$\sum_k \beta_k^p \leq M^p \sum_k \frac{1}{k^{1+\epsilon}} < \infty$$

lo que prueba que $\mid T \mid = T \in \mathcal{T}_p$. □

Corolario II.38 *Con las mismas hipótesis del lema previo, $T = (D^2 + 1)^{-1}$ es un operador compacto.*

DEMOSTRACIÓN:

De la ecuación (II.13) se deduce que los autovalores de T tienen multiplicidad finita y se acumulan sólo en cero. Si $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $\lambda \neq \beta_k$ para todo k, se tiene que $T - \lambda$ es una biyección, con inversa acotada dada de la siguiente forma: si $\psi = \sum a_k u_k$, entonces

$$(T - \lambda)^{-1}\psi = \sum \frac{a_k}{\beta_k - \lambda} u_k.$$

Por ende, $\sigma(T) = \{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$. Se deduce mediante el cálculo funcional (cf [Rudin][p 99]) que T es límite (en la norma de operadores) de una sucesión de operadores de rango finito, y por ende T es un operador compacto. □

El problema de existencia de un fibrado de Dirac

El problema de la construcción de un Fibrado de Dirac sobre una variedad diferenciable M está completamente resuelto (cf [L-M][Cap II]). Nos limitaremos a dar una idea de la misma.

Dada una variedad diferenciable M la sucesión exacta que probamos más arriba

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin_n \to SO_n \to 1$$

induce una sucesión exacta en cohomología de Cech

$$H^0(M, SO_n) \to H^1(M, \mathbb{Z}_2) \to H^1(M, Spin_n) \to H^1(M, SO_n) \to H^2(M, \mathbb{Z}_2)$$

Donde la anteúltima flecha es la Ad y la última flecha es el morfismo de coborde δ. Por otra parte, hay un isomorfismo natural entre las clases de equivalencia de fibrados G-principales y el primer grupo de cohomología de Cech, dado por la presentación de ambos objetos por cociclos y una condición de pegado. En particular,

$$Prin_{SO_n}(M) \equiv H^1(M, SO_n)$$

Cuando M es Riemanniana orientable, definimos entonces $w_2(M) = \delta\left(P_{SO}(M)\right)$ "la segunda clase de Steifel-Whitney" de M.

De aquí es evidente que $w_2(M) = 0$ si y sólo si $P_{SO}(M)$ es equivalente a un $\mathbb{Z}_2$-cociente de un fibrado $Spin_n$-principal en M que llamaremos $P_{Spin}(M)$. Decimos que una variedad es **spin** cuando es orientable y $w_2(M) = 0$.

Lo interesante del caso es que si una variedad es spin, uno puede considerar el fibrado

$$C\ell_{Spin}(M) = P_{Spin}(M) \times_\mu C\ell(\mathbb{R}^n)$$

donde $\mu : Spin_n \to Aut(C\ell(\mathbb{R}^n))$ es el producto de Clifford por elementos del grupo $Spin$ y $\times_\mu$ significa tomar el fibrado $P_{Spin}(M) \times C\ell(\mathbb{R}^n)$ e identificar las órbitas por la acción de $Spin_n$ dada por

$$\rho(g)\,(p, f) = \left(p \cdot g^{-1}, g \cdot f\right)$$

Hay una construcción idéntica con $\mathbb{C}\ell_n$ en la cual se obtiene un fibrado complejo.

Ahora bien: **estos fibrados tienen una estructura natural de fibrado de Dirac** (cf [L-M]), y por lo tanto toda variedad spin admite un fibrado y un operador de Dirac. Sin embargo, puede haber estructura de fibrado de Dirac sin necesidad de estructura de spin.

Por otra parte están calculados los w_2 para la mayoría de las variedades conocidas, y se tiene que todas las que siguen (y más) son spin:

Toda variedad orientable conexa con $\pi_2 = 0$. Las clases de homotopía de esferas, cualquier grupo de Lie, toda variedad cuyo fibrado tangente sea establemente paralelizable, como por ejemplo la preimagen de cualquier valor regular de una función $f : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$. Toda variedad orientable de dimensión menor o igual a 3.

Asi que como se ve, ejemplos hay muchos.

II.3 Métricas en variedades

Ahora estamos en condiciones de definir una geometría en un espacio no conmutativo como una C^* álgebra arbitraria; para ello utilizaremos la parafernalia de la secciónes previas para ver que bajo ciertas condiciones, esta geometría (más precisamente la métrica) es equivalente a la métrica del espacio topológico subyacente (el espacio de caracteres).

Lo primero que haremos será introducir los módulos de Fredholm no acotados, que proveen a un álgebra C^* dada A de una cierta álgebra involutiva densa, la cual cumplirá el rol de la funciones lipschitzianas en el caso conmutativo, codificando toda la información métrica del espacio topológico subyacente.

Luego veremos que en el caso de una variedad difererenciable M, esta información es la correcta, i.e. el álgebra involutiva de $C(M)$ **es** el álgebra de funciones lipschitzianas sobre M, y por ende recuperamos la distancia geodésica mediante una fórmula (fórmula (II.19) que es en esencia "dual" a la fórmula usual de distancia entre p y q, la cual es el ínfimo de la longitud de todas las curvas que **suben** a M y unen p con q. Nuestra fórmula no sólo involucra un supremo en vez de un ínfimo, sino que se calcula sobre una familia de funciones que **bajan** de la variedad M.

Esto es relevante desde dos puntos de vista: el primero es que en un espacio altamente disconexo, la noción geodésica de distancia pierde sentido, pues puede haber pocas o ninguna curva que una dos puntos, y sin embargo siempre habrá una cantidad apreciable de funciones que salen del espacio en cuestión.

El segundo involucra la física cuántica: desde el punto de vista de la mecánica clásica, las geodésicas representan soluciones de la ecuación diferencial de Newton, "trayectorias" de partículas en el espacio de fases del sistema físico (la variedad diferenciable). Sin embargo, para distancias pequeñas (a nivel atómico) es sabido que no existe tal cosa como la "trayectoria" de una partícula, y que una partícula en el sentido cuántico está representada por una función $f_t : M \to \mathbb{C}$, la "distribución de probabilidad" de la partícula a tiempo t. Esto hace que la noción de distancia geodésica pierda sentido a nivel cuántico, pero nuestra fórmula seguirá teniendo perfecto sentido en estas condiciones.

II.3.1 Módulos de Fredholm

La definición fundamental de esta sección es la siguiente:

Definición II.39 *Sea A un álgebra C^* con unidad. Un* **módulo de Fredholm no acotado sobre** *A es un par $(\mathcal{H}, D)$ tal que*

1. *$\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert que es un A-módulo a izquierda (en otras palabras, una *-representación π de A en $\mathcal{H}$ está dada).*
2. *D es un operador no acotado autoadjunto en $\mathcal{H}$ tal que*
   (a) *El conjunto $\mathcal{A} = \{a \in A : [D, a] \text{ es acotado}\}$ es denso en A (con la topología fuerte dada por la norma de A).*
   (b) *$(D - \lambda)^{-1}$ es compacto para todo $\lambda \in \rho(D)$.*

Observación II.40 *La hipótesis de que D tenga resolvente compacta puede ser reemplazada por 2.(b') El operador $(D^2 + 1)^{-1}$ es compacto.*

Cabe observar que esta hipótesis es razonable ya que la inversa de D^2+1 está siempre bien definida y es un operador acotado, ya que al ser D un operador autoadjunto, i y $-i$ están en la resolvente de D, y $D^2+1=(D+i)(D-i)$.

Supongamos que la resolvente de D es compacta. Como D es autoadjunto, i y $-i$ están en la resolvente de D, y en consecuencia las inversas de $D+i$ y de $D-i$ son compactas. De aquí se deduce entonces que el operador $(D^2+1)^{-1}$ es compacto, ya que $D^2+1=(D+i)(D-i)$.

Veamos que en realidad ambas hipótesis son equivalentes. Llamando $R_\lambda(D)=(D-\lambda)^{-1}$, entonces de la siguiente fórmula, válida para todo par $\lambda,\mu\in\rho(D)$

$$R_\lambda(D)-R_\mu(D)=(\mu-\lambda)R_\mu(D)R_\lambda(D) \qquad \text{(II.14)}$$

se deduce que basta que uno de ellos sea compacto, puesto que si S es acotado y T es compacto entonces ST es compacto, y la suma dos operadores compactos es otro operador compacto. Una demostración de la fórmula (II.14) puede hallarse en cualquier libro de análisis funcional, como por ejemplo [Simon][p 190,254] o bien [Taylor][p 257].

Ahora bien, $N=R_i(D)$ es un operador normal tal que N^*N es compacto (ya que $N^*N=T=(D^2+1)^{-1}$), y es un hecho que un operador de estas características es siempre compacto, ya que si x_n es una sucesión acotada en $\mathcal{H}$, entonces por la compacidad de T existe una subsucesión x_{n_i} tal que Tx_{n_i} es convergente (y por ende de Cauchy), y ahora de la desigualdad

$$\begin{aligned}
\|Nx_{n_i}-Nx_{n_j}\|^2 &= \|N(x_{n_i}-x_{n_j})\|^2 \\
&= <N(x_{n_i}-x_{n_j}),N(x_{n_i}-x_{n_j})> \\
&= <N^*N(x_{n_i}-x_{n_j}),(x_{n_i}-x_{n_j})> \\
&\leq \|Tx_{n_i}-Tx_{n_j}\|2M
\end{aligned}$$

se deduce que la sucesión Nx_{n_i} es de Cauchy, y por ende convergente.

Observación II.41 *La hipótesis* 2.(b') *también nos asegura que* $dim(\mathcal{K}er(D))<\infty$*. Para probarlo, recordemos que* $T=(D^2+1)^{-1}$ *es un operador compacto, y por ende* $dim(\mathcal{K}er(T-1))<\infty$ *(este es el teorema de Riesz-Schauder, ver [Simon][p 203] para una demostración). Ahora si* $x\in\mathcal{K}er(D)$*, entonces* $x\in\mathcal{D}om(D^2+1)$*, y además* $(D^2+1)x=x$*; aplicando* T *a ambos lados de la igualdad se obtiene* $Tx=x$*, lo que prueba la inclusión* $\mathcal{K}er(D)\subset\mathcal{K}er(T-1)$*. Este resultado se generaliza con el próximo lema*

Lema II.42 *El conjunto de autovalores de D es un subconjunto* **discreto** *de la recta real. La dimensión de cada uno de los correspondientes autoespacios es finita.*

DEMOSTRACIÓN:

El caso $\mu=0$ lo hemos cubierto en la observación previa. Tomemos ahora $\mu\in\mathbb{R}$ tal que existe $x\in\mathcal{H}$ con $(D-\mu)x=0$. Entonces se tiene $Dx=\mu x$, o lo que es lo mismo, $(D-i)x=(\mu-i)x$. Recordemos ahora que $D-i$ es inversible, con inversa compacta, que denotaremos con S. Multiplicando a ambos lados por S se obtiene $x=S(\mu-i)x$, o lo que es lo mismo

$$\left(S-\frac{1}{\mu-i}\right)x=0$$

Lo que prueba que $\frac{1}{\mu-i} \in \sigma(S)$. Pero este conjunto es discreto por ser S compacto, lo que prueba que el conjunto $\{\frac{1}{\mu-i}\}$ con μ recorriendo los autovalores de D, es un conjunto discreto. Como la aplicación $f(z) = \frac{1}{z-i}$ es un homeomorfismo fuera de un entorno de i, se deduce que el conjunto μ de autovalores de D es discreto. La segunda parte es trivial ya que la cuenta que acabamos de hacer prueba la inclusión $\mathcal{K}er(D-\mu) \subset \mathcal{K}er\left(S - \frac{1}{\mu-i}\right)$, que como S es compacto, tiene dimensión finita. □

Observación II.43 *Notemos también que el conjunto $\mathcal{A}$ de la hipótesis 2.(a) es siempre una *-subálgebra de A; que es un subespacio se deduce de la linealidad del conmutador, que es una subálgebra se deduce de la identidad*

$$[D, ab] = Dab - abD = Dab - aDb + aDb - abD = [D, a]b + a[D, b]$$

y finalmente que es involutiva se deduce de

$$[D, a^*] = Da^* - a^*D = (aD - Da)^* = -[D, a]^* .$$

II.3.2 La geometría de una variedad

Nuestro ejemplo más relevante (en el sentido clásico de geometría métrica) de módulo de Fredholm no acotado estará dado por una variedad diferenciable conexa M, compacta, que supondremos admite un fibrado de Dirac complejo. Aquí $A = C(M)$ es el álgebra C^* de las funciones continuas a valores complejos sobre la variedad con la norma supremo, actuando mediante los operadores de multiplicación ($a \mapsto M_a$) en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(M, S)$ de spinores, y D es el operador de Dirac de la variedad (que por el Corolario II.38 y la observación previa, tiene resolvente compacta).

Para ver cual es el álgebra involutiva densa de A, necesitamos un par de resultados previos.

Lema II.44 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera suave, y $f : U \to \mathbb{R}$. Entonces si $f \in W^{1,\infty}(U)$, se tiene*

$$|\, f(x) - f(y)\, |\, \| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty(U)} \|x - y\|$$

para todo $x, y \in U$. En particular, f es Lipschitz.

Demostración:

Ver [Evans][p 279]□

Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Notaremos con $Lip(M)$ al espacio de las funciones Lipschitz sobre M.

Lema II.45 *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Sea $a \in C(M)$.*

1. *Si $a \in Lip(M)$ entonces su gradiente está definido pp y es una función acotada (en casi todo punto).*

2. *Si $a = u + iv$, y $u, v \in W^{1,\infty}(M)$, entonces $a \in Lip(M)$ y su seminorma Lipschitz coincide con la norma infinito del gradiente, es decir*

$$\|\nabla a\|_\infty = \|a\|_L = sup_{p,q \in M} \frac{| a(p) - a(q) |}{d(p, q)}$$

DEMOSTRACIÓN:

1. Supongamos primero que $a \in Lip(M)$. Recordemos que a es Lipschitz cuando existe una constante K tal que

$$| a(p) - a(q) | \leq K d(p, q)$$

Necesitaremos el siguiente resultado en $I\!R^n$, cuya demostración puede verse en el libro de Ziemer [Ziemer][p 49]:

Si $f : U \subset I\!R^n \to I\!R$ es Lipschitz, entonces para casi todo $x \in I\!R^n$, f es diferenciable, es decir, para casi todo x_0 se tiene

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - < (\nabla f)_{x_0}, x - x_0 >}{\|x - x_0\|} = 0 \qquad \text{(II.15)}$$

Notemos primero que si $a = u + iv$

$$\begin{aligned} | u(p) - u(q) |^2 &\leq | u(p) - u(q) |^2 + | v(p) - v(q) |^2 \\ &= | a(p) - a(q) |^2 \\ &\leq \|a\|_L^2 d(p, q)^2 \end{aligned}$$

lo que prueba que u es Lipschitz.

Para todo $p \in M$ existe una carta (U, ϕ) tal que $\phi(p) = 0$ y si $q \in U$ entonces $d(q, p) = \|\phi(q)\|$. Esta carta se construye considerando la inversa de la aplicación exponencial de T_pM en M -en un entorno adecuado de p- compuesta con un isomorfismo de T_pM con $I\!R^n$ (este sistema de coordenadas es el **sistema de coordenadas normales Riemannianas**, que ya hemos utilizado en repetidas ocasiones, ver [Lee][p 77,p 106]).

Todo punto de M posee un entorno $\mathcal{W}$ **uniformemente normal** (cf [Lee][p 78]). Esto quiere decir que para este entorno existe un $\delta > 0$ tal que $\mathcal{W}$ está contenido en una bola geodésica de radio δ alrededor de cada uno de sus puntos, i.e. para todo $p \in \mathcal{W}$ se tiene que existe una carta normal Riemanniana (U_p, ϕ_p) centrada en p cuya imagen es la bola $B(0, \delta) \subset T_pM$, y además $\mathcal{W} \subset U_p$.

Tomemos una carta $(\mathcal{U}, \psi)$ con $\mathcal{U}$ uniformemente normal. Restrinjamos esta carta a una carta $(\mathcal{W}, \phi)$, tal que $\mathcal{W}$ es uniformemente normal y $\overline{W} \subset \mathcal{U}$ sea compacto. Notemos que la aplicación ϕ^{-1} se extiende en forma continua al compacto $\phi(\overline{W})$. Achicando nuevamente de ser necesario, supondremos que $\phi(\mathcal{W})$ es convexo. Probaremos que la función $u \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{W}) \to I\!R$ es Lipschitz.

Dados $x, y \in \phi(\mathcal{W})$, llamemos $p = \phi^{-1}(x)$ y $q = \phi^{-1}(y)$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\mid u \circ \phi^{-1}(x) - u \circ \phi^{-1}(y) \mid &= \mid u(p) - u(q) \mid \\
&\leq \|u\|_L d(p,q) \\
&= \|u\|_L d\left(\phi_p^{-1}(0), \phi_q^{-1}(0)\right) \\
&= \|u\|_L \|\phi_p(q)\| = \|u\|_L \|\phi_p\left(\phi^{-1}(y)\right)\| \\
&= \|u\|_L \|\phi_p\left(\phi^{-1}(y)\right) - \phi_p(p)\| \\
&= \|u\|_L \|\phi_p\left(\phi^{-1}(y)\right) - \phi_p\left(\phi^{-1}(x)\right)\| \\
&= \|u\|_L \|\phi_p \circ \phi^{-1}(y) - \phi_p \circ \phi^{-1}(x)\| \\
&\leq \|u\|_L \|D(\phi_p \circ \phi^{-1})_\xi\| \|(x-y)\|
\end{aligned}$$

donde ξ es un punto intermedio del segmento $[x, y]$.

Ahora tenemos que notar que la función $f : \mathcal{U} \times \psi(\mathcal{U}) \to TM$ dada por

$$f(r, z) = \left(r, \psi_r \circ \psi^{-1}(z)\right) = (r, \exp_r^{-1} \circ \psi^{-1}(z))$$

es diferenciable (ver [Lee][p 79]), y por ende lo mismo se puede afirmar de su diferencial con respecto a z, i.e.

$$g(r, z) = (r, D(\psi_r \circ \psi^{-1})_z)$$

es una función diferenciable; en particular es continua restringida al compacto $\overline{\mathcal{W}} \times \psi(\overline{\mathcal{W}})$ y por ende es acotada (en particular la segunda coordenada es acotada) sobre $\mathcal{W} \times \phi(W)$. En consecuencia se tiene

$$\mid u \circ \phi^{-1}(x) - u \circ \phi^{-1}(y) \mid \leq \|u\|_L C \|x - y\|$$

lo que prueba que esta función es Lipschitz en $\phi(\mathcal{W})$.

Ahora $\nabla(u \circ \phi^{-1})$ existe en casi todo punto de $\phi(\mathcal{W})$ por el lema previo, y en particular existen todas las derivadas direccionales en casi todo punto. Por ende,

$$\nabla u = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial \phi^i} \frac{\partial}{\partial \phi^j}$$

existe en casi todo punto de $\mathcal{W}$. Tomando un cubrimiento de M por finitas de estas cartas, se ve que ∇u existe pp. Similarmente, ∇v existe pp, y sacando los dos conjuntos de medida nula donde no existen los gradientes, se obtiene que $\nabla a = \nabla u + i \nabla v$ existe pp.

Dado $p \in M$, tomando una carta normal Riemanniana (U, ϕ) centrada en p se tiene que si $q \in U$ entonces $d(q, p) = \|\phi(q)\|$.

Sea $p \in M$ tal que existe el gradiente de a. Tomando una carta (U, ϕ) centrada en p, notemos primero que

$$d\left(\phi^{-1}\left(\frac{(\nabla(a\circ\phi^{-1}))_0 t}{\|(\nabla(a\circ\phi^{-1}))_0\|}\right), p\right) = \mid t \mid$$

Notemos que el producto escalar entre el gradiente y la dirección del gradiente es la derivada direccional, en la dirección del gradiente. Además notemos que las derivades direccionales en p forman una base ortonormal en este particular sistema de coordenadas, i.e. $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ (ver [Lee][p 78]), con lo cual se tiene

$$\|(\nabla u)_p\|^2 = \sum_i \|\partial_i u(p)\|^2 = \sum_i \|\frac{\partial u \circ \phi^{-1}(0)}{\partial \phi^i}\|^2 = \|(\nabla u \circ \phi^{-1})_0\|^2$$

Juntando esta información, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|(\nabla a)_p\|^2 &= \|(\nabla u)_p\|^2 + \|(\nabla v)_p\|^2 \\
&= \|(\nabla u\circ\phi^{-1})_0\|^2 + \|(\nabla v\circ\phi^{-1})_0\|^2 \\
&= <(\nabla(u\circ\phi^{-1}))_0, \frac{\left(\nabla(u\circ\phi^{-1})\right)_0}{\|(\nabla(u\circ\phi^{-1}))_0\|}>^2 + <(\nabla(v\circ\phi^{-1}))_0, \frac{\left(\nabla(v\circ\phi^{-1})\right)_0}{\|(\nabla(v\circ\phi^{-1}))_0\|}>^2 \\
&= lim_{t\to 0}\frac{\left|u\circ\phi^{-1}\left(\frac{\left(\nabla(u\circ\phi^{-1})\right)_0 t}{\|(\nabla(u\circ\phi^{-1}))_0\|}\right) - u\circ\phi^{-1}(0)\right|^2}{|t|^2} + lim_{t\to 0}\frac{\left|v\circ\phi^{-1}\left(\frac{\left(\nabla(v\circ\phi^{-1})\right)_0 t}{\|(\nabla(v\circ\phi^{-1}))_0\|}\right) - v\circ\phi^{-1}(0)\right|^2}{|t|^2} \\
&= lim_{t\to 0}\frac{\left|a\circ\phi^{-1}\left(\frac{\left(\nabla(a\circ\phi^{-1})\right)_0 t}{\|(\nabla(a\circ\phi^{-1}))_0\|}\right) - a\circ\phi^{-1}(0)\right|^2}{|t|^2} \\
&= lim_{t\to 0}\frac{\left|a\left(\phi^{-1}\left(\frac{\left(\nabla(a\circ\phi^{-1})\right)_0 t}{\|(\nabla(a\circ\phi^{-1}))_0\|}\right)\right) - a(p)\right|^2}{d\left(\phi^{-1}\left(\frac{(\nabla(a\circ\phi^{-1}))_0 t}{\|(\nabla(a\circ\phi^{-1}))_0\|}\right), p\right)^2} \le \|a\|_L^2
\end{aligned}$$

Recordando que el conjunto de puntos donde el gradiente no está definido tiene medida nula, se obtiene

$$\|\nabla a\|_\infty \le \|a\|_L \tag{II.16}$$

lo que concluye la primera parte del lema.

2. Supongamos ahora que $a = u + iv$, con $u, v \in W^{1,\infty}(M)$. Dado $p \in M$, tomemos una carta normal Riemanniana (U, ϕ) centrada en p tal que $\phi(U) = B(0,1) \subset I\!R^n$. Por definición, se tiene que $u \circ \phi^{-1} \in W^{1,\infty}(B)$. Por el Lema II.44, se tiene que si $q \in U$, entonces

$$\begin{aligned}
\mid u(q) - u(p) \mid &= \mid u\circ\phi^{-1}(\phi(q)) - u\circ\phi^{-1}(0) \mid \\
&\le \|\nabla(u\circ\phi^{-1})\|_{L^\infty(B)}\|\phi(q)\| \\
&\le \|\nabla u\|_\infty d(q,p)
\end{aligned}$$

Aplicando un argumento similar a v, elevando al cuadrado y sumando, se obtiene que si q está en un entorno convenientemente pequeño de p, vale

$$| a(q) - a(p) | \leq \|\nabla a\|_\infty d(q,p)$$

Ahora tomemos p, q arbitrarios en M. Como M es compacta, es geodésicamente completa con cualquier métrica Riemanniana (ver [Sakai][p 84]). Tomemos entonces $\gamma : I \to M$ una geodésica tal que $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Consideremos el conjunto

$$N = \{t \in I :| a(\gamma(t)) - a(p) | \leq \|\nabla a\|_\infty d(\gamma(t), p)\}$$

En primer lugar, notemos que N es no vacío, ya que $0 \in N$. En segundo lugar, notemos que si $t_0 \in N$, $t_0 \neq 1$, entonces tomando una carta como en el párrafo previo (U, ϕ) centrada en $\gamma(t_0)$, resulta $\gamma^{-1}(U)$ un entorno abierto de t_0, y como $t_0 \neq 1$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $\gamma([t_0, t_0 + \epsilon)) \subset U$; si s es tal que $t_0 \leq s < t_0 + \epsilon$, entonces por el argumento de párrafo previo,

$$| a(\gamma(s)) - a(\gamma(t_0)) | \leq \|\nabla a\|_\infty d(\gamma(s), \gamma(t_0))$$

y entonces, como $\gamma(t_0)$, $\gamma(s)$ y p están en la misma geodésica, resulta $d(\gamma(t_0), p) + d(\gamma(s), \gamma(t_0)) = d(\gamma(s), p)$, lo que nos asegura que $s \in N$, ya que

$$\begin{aligned} | a(\gamma(s)) - a(p) | &\leq | a(\gamma(s)) - a(\gamma(t_0)) | + | a(\gamma(t_0)) - a(p) | \\ &\leq \|\nabla a\|_\infty d(\gamma(s), \gamma(t_0)) + \|\nabla a\|_\infty d(\gamma(t_0), p) \\ &= \|\nabla a\|_\infty d(\gamma(s), p) \end{aligned}$$

En tercer lugar, aplicamos el razonamiento previo a $t_0 = 0$ para concluir que existe un entorno abierto $[0, r) \subset N$. Si N no es todo el intervalo $[0, 1]$, entonces existe entonces un entorno abierto maximal $[0, t_0)$ incluido en N. Ahora tomando una sucesión $\{t_n\} \subset N$ tal que $t_n \to t_0$, y tomando límite en

$$| a(\gamma(t_n)) - a(p)) | \leq \|\nabla a\|_\infty d(\gamma(t_n), p)$$

se concluye que $t_0 \in N$. Notemos que $t_0 \neq 1$, porque estamos suponiendo que $N \neq I$. Pero por el razonamiento inicial, existe $\epsilon > 0$ tal que $[0, t_0 + \epsilon) \subset N$, contradiciendo la maximalidad de $[0, t_0)$. En consecuencia, debe ser $N = I$, con lo cual $1 \in N$, lo que se traduce exactamente en

$$| a(q) - a(p) | \leq \|\nabla a\|_\infty d(q,p) \tag{II.17}$$

que es lo que queríamos probar.

De aquí también se deduce que $\|a\|_L \leq \|\nabla a\|_\infty$. Como a es Lipschitz, podemos usar el item previo, y de la ecuación (II.16) se deduce la igualdad

$$\|a\|_L = \|\nabla a\|_\infty \quad \square$$

Proposición II.46 *El par $(L^2(M, S), D)$ es un módulo de Fredholm no acotado sobre $C(M)$ con subálgebra involutiva densa $\mathcal{A} = Lip(M)$*

Demostración:

Como ya señalamos, D tiene resolvente compacta.

Si $a \in Lip(M)$, entonces por el Lema II.45 $\|(\nabla a)_p\|$ está definido pp, y acotado y si $\sigma \in L^2(M,S)$ entonces se tiene (por la observación II.34)

$$[D,a]\sigma = D(a\sigma) - aD\sigma = \nabla a \cdot \sigma$$

con lo cual (llamando μ a la medida de masa finita inducida por la métrica) se tiene

$$\begin{aligned}
\|[D,a]\sigma\|_2^2 &= \int_M \|([D,a]\sigma)_p\|^2 d\mu(p) \\
&= \int_M \|(\nabla a)_p \cdot \sigma_p\|^2 d\mu(p) \\
&\leq \int_M \|(\nabla a)_p\|^2 \|\sigma_p\|^2 d\mu(p) \qquad \text{(II.18)} \\
&\leq \|\nabla a\|_\infty^2 \int_M \|\sigma_p\|^2 d\mu(p) \\
&= \|\nabla a\|_\infty^2 \|\sigma\|_2^2 < \infty
\end{aligned}$$

lo que prueba que $Lip(M) \subset \mathcal{A}$.

Por otro lado, si $[D,a]$ es un operador acotado, tomando $\sigma = 1$ (que está claramente en $L^2(M,S)$) se tiene que

$$[D,a]\sigma = D(a\sigma) - aD\sigma = Da$$

y entonces $a = u + iv$ debe estar en $\mathcal{D}om(D)$, lo que equivale a decir que $u, v \in \mathcal{D}om(D)$. Por el Teorema II.33, $u, v \in W^{1,2}(M)$. Entonces $\nabla u, \nabla v$ existen pp, y coinciden (pp) con su gradiente distribucional (ver [Evans][p 280]). Luego $\nabla a = \nabla u + i\nabla v$ existe pp, pero como $a \in \mathcal{D}om(D)$, se tiene que $\nabla a \in L^2(M,S)$.

Si suponemos que ∇a no está en $L^\infty(M,S)$, entonces para todo $K > 0$ existe un conjunto E de medida positiva tal que $\|(\nabla a)_p\| > K$ si $p \in E$. Sea χ_E la función característica de E, y sea $\sigma = \frac{\chi_E}{\mu(E)^{\frac{1}{2}}}$. Entonces $\sigma \in L^2(M,S)$, y además $\|\sigma\|_2 = 1$. Por otra parte se tiene

$$\begin{aligned}
\|[D,a]\sigma\|_2^2 &= \int_M \|(\nabla a)_p \cdot \sigma_p\|^2 d\mu(p) \\
&= \int_M \|(\nabla a)_p\|^2 \frac{\chi_E(p)}{\mu(E)} d\mu(p) \\
&= \frac{1}{\mu(E)} \int_E \|(\nabla a)_p\|^2 d\mu(p) \geq K^2
\end{aligned}$$

lo cual contradice el hecho de que $[D,a]$ es un operador acotado.

En consecuencia $\nabla a \in L^\infty(M,S)$: se deduce que $u, v \in W^{1,\infty}(M)$, y por el Lema II.45 se tiene que $a \in Lip(M)$

Por último que $\mathcal{A}$ es densa se deduce de la inclusión $C^\infty(M) \subset Lip(M)$. □

Teorema II.47 *Sea M una variedad Riemanniana conexa y compacta, con un fibrado de Dirac complejo S. Sean $A = C(M)$, $\mathcal{H} = L^2(M,S)$ y D el operador de Dirac de S. Entonces la distancia geodésica entre dos puntos p y q de M está dada por*

$$d(p,q) = sup\{\mid a(p) - a(q) \mid;\ a \in A,\ \|[D,a]\|_2 \leq 1\} \tag{II.19}$$

Demostración:

La desigualdad (II.18) prueba asimismo que $\|[D,a]\|_2 \leq \|\nabla a\|_\infty$. Veamos que vale la otra desigualdad. Para ello, notemos que dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto $E \subset M$ de medida positiva tal que si $p \in E$, entonces $\|(\nabla a)_p\| > \|\nabla a\|_\infty - \epsilon$. Si χ_E es la función característica de E, sea $\sigma = \frac{\chi_E}{\mu(E)^{\frac{1}{2}}}$. Entonces nuevamente $\sigma \in L^2(M,S)$, y además $\|\sigma\|_2 = 1$. Ahora se tiene

$$\begin{aligned}
\|[D,a]\sigma\|_2^2 &= \int_M \|(\nabla a)_p \cdot \sigma_p\|^2 d\mu(p) \\
&= \int_M \|(\nabla a)_p\|^2 \tfrac{\chi_E(p)}{\mu(E)} d\mu(p) \\
&= \tfrac{1}{\mu(E)} \int_E \|(\nabla a)_p\|^2 d\mu(p) \\
&\geq \tfrac{1}{\mu(E)} (\|\nabla a\|_\infty - \epsilon)^2 \int_E d\mu(p) \\
&= (\|\nabla a\|_\infty - \epsilon)^2
\end{aligned}$$

lo que prueba que $\|[D,a]\|_2 \geq \|\nabla a\|_\infty - \epsilon$, y como ϵ era arbitrario, se deduce $\|[D,a]\|_2 \geq \|\nabla a\|_\infty$.

Ahora si $\|[D,a]\|_2 \leq 1$, en particular el conmutador es un operador acotado, y por la demostración de la proposición previa, si $a = u + iv$ entonces $u, v \in W^{1,\infty}(M)$, y entonces por el Lema II.45 se tiene la igualdad $\|a\|_L = \|\nabla a\|_\infty$. Juntando esta igualdad con la que acabamos de probar obtenemos

$$sup_{p,q \in M} \frac{\mid a(p) - a(q) \mid}{d(p,q)} = \|a\|_L = \|\nabla a\|_\infty = \|[D,a]\|_2 \leq 1$$

de donde se deduce que

$$\mid a(p) - a(q) \mid \leq d(p,q) \quad \forall a \text{ tal que } \ \|[D,a]\|_2 \leq 1$$

y por ende se tiene la desigualdad

$$sup\{\mid a(p) - a(q) \mid;\ a \in A,\ \|[D,a]\|_2 \leq 1\} \leq d(p,q)$$

Dados $p, q \in M$ fijos, si definimos $a(x) = d(x,q)$ resulta

$$\mid a(x) - a(y) \mid = \mid d(x,q) - d(y,q) \mid \leq d(x,y)$$

con lo cual a es Lipschitz con $\|a\|_L \leq 1$ (de hecho, tomando $x = p,\ y = q$ se ve que $\|a\|_L = 1$).

Ahora se tiene $\|[D,a]\|_2 = \|\nabla a\|_\infty = \|a\|_L = 1$; es con esta función que se alcanza la igualdad, ya que evidentemente,

$$\mid a(p) - a(q) \mid = d(p,q) \ \ \square$$

III
CONSTRUCCION

A esta altura estamos en condiciones de generalizar los resultados del capítulo previo.

Comenzaremos recordando algunas definiciones y resultados básicos de álgebras C^*:

Definición III.1 *El* **espacio de estados** $\mathcal{S}(A)$ *de un álgebra* C^* A *es el conjunto de funcionales positivas tales que* $\rho(1) = 1$ *si* A *es unitaria, y en el caso de que el álgebra no tenga uno, requerimos que para una aproximación de la identidad* $\{e_\alpha\}$ *(y por ende para cualquiera) se tenga* $lim_\alpha \rho(e_\alpha) = 1$.

$S(A)$ *es un conjunto convexo, y débil-* compacto, y por el teorema de Krein-Milman (ver [Rudin][p 70]) tiene puntos extremales. Los puntos extremales se denominan* **estados puros**. *El conjuntos de puntos extremales se denomina* $\mathcal{P}(A)$*, y no es necesariamente débil-* cerrado. Su clausura se denomina* $\mathcal{P}(A)^-$*, el* **espacio de estados puros**. *Notar que esto quiere decir que puede haber en este conjunto elementos que no sean estados puros.*

En el caso de que el álgebra sea conmutativa y unitaria, la situación es más simple (ver [K-R 1][p 269]): El conjunto $\mathcal{P}(A)$ *de estados puros es cerrado en* $\mathcal{S}(A)$*, y por ende un espacio topológico compacto y Hausdorff. Este conjunto se denomina alternativamente con* $Sp(A)$*, el* **espectro** *de* A*. Además el conjunto de estados puros coincide con el de las funcionales multiplicativas. La* **transformada de Gelfand** *es el mapa* $\hat{}\ : A \to C\left(\mathcal{P}(A)\right)$ *definido por* $\hat{a}(\rho) = \rho(a)$*. Esta aplicación es un *-isomorfismo, y por ende un homeomorfismo. Esto nos dice que toda* C^* *álgebra abeliana se realiza como el conjunto de funciones continuas a valores complejos sobre un espacio compacto.*

Recíprocamente, dado un espacio compacto M*, se tiene que* $C(M)$ *es un álgebra* C^* *cuyos estados puros (funcionales multiplicativas) son las evaluaciones en los puntos de* M*.*

Si el álgebra A *es abeliana pero no unitaria, se deduce que existe un espacio topológico* X *localmente compacto tal que* A *es *-isomorfa al conjunto* $C_0(X)$ *de funciones continuas a valores complejos que se anulan en infinito. (Esta construcción se hace agregando el* 1 *en la forma canónica, obteniendo así un álgebra unitaria* $\mathcal{A}$*, *-isomorfa a* $C(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$*, en la cual* A *es un hiperplano. No es difícil probar que la funcional* ρ *cuyo núcleo es el hiperplano* A *es un estado puro. En consecuencia, la imagen de* A *vía la transformada de Gelfand es el conjunto de funciones que se anulan sobre este punto, y removiéndolo de* $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ *se obtiene un espacio localmente compacto, que es el requerido).*

Con estos resultados, podemos reformular el Teorema II.47 en el contexto de álgebras C^*, de la siguiente manera:

Teorema III.2 *Sea M una variedad Riemanniana conexa y compacta, con fibrado de Dirac complejo S y operador de Dirac D. Sea A el álgebra C^* de funciones continuas a valores complejos sobre M. Entonces la topología débil-* de $\mathcal{P}(A)$ es métrica. Dados dos puntos $\rho, \tau \in \mathcal{P}(A)$, su distancia está dada por*

$$d(\rho, \tau) = sup\{| \rho(a) - \tau(a) |; \ a \in A, \ \|[D, a]\| \leq 1\}$$

Veremos como extender esta métrica al espacio de estados de $C(M)$ más adelante, en el Teorema III.10.

III.1 Métricas en el espacio de estados

Veremos a lo largo de esta sección que la métrica introducida en la sección previa se extiende a una métrica (que toma posiblemente el valor $+\infty$) en todo el espacio de estados. Analizaremos a continuación bajo que condiciones la métrica en cuestión es acotada, y cuales son las hipótesis necesarias y suficientes para que la topología inducida por esta métrica coincidad con la topología débil-* del espacio de estados. El resultado fundamental de esta sección está resumido en el Teorema III.9.

Luego veremos que en nuestro ejemplo de variedad diferenciable M, esta extensión de la métrica al espacio de estados nos devuelve la topología débil-*.

Proposición III.3 *Sea X un espacio topológico, y $A = C(X)$. Supongamos que $(\mathcal{H}, D)$ es un módulo de Fredholm no acotado sobre A. Dados $\rho, \tau \in \mathcal{P}(A)$ definimos*

$$d(\rho, \tau) = sup\{\mid \rho(a) - \tau(a) \mid : a \in A, \|[D, a]\| \leq 1\}$$

Entonces:

1. $d(\rho, \tau) = d(\tau, \rho)$
2. $d(\rho, \psi) \leq d(\rho, \tau) + d(\tau, \psi)$ *para toda terna* $\rho, \tau, \psi \in P(A)$
3. $d(\rho, \tau) = 0 \Rightarrow \rho = \tau$
4. *Si* $\{a : \|[D, a]\| \leq 1\}/\mathbb{C}1$ *es acotado, entonces* $d(\rho, \tau) < \infty$ *para todo* ρ, τ.

Demostración:

1. Es obvio
2. Se deduce de la desigualdad triangular del módulo, y del hecho de que el supremo de una suma es menor o igual a la suma de los supremos.
3. Se tiene
$$\rho(a) = \tau(a)$$
para todo a en el conjunto $\mathcal{B} = \{a : \|[D, a]\| \leq 1\}$. Ahora si $f \in \mathcal{A} = \{a \in A : [D, a] \text{ es un operador acotado}\}$, entonces tomando $b = \frac{f}{\|[D,f]\|}$ se tiene que $b \in B$, y por ende
$$\rho(b) = \tau(b)$$
Por la linealidad de ρ y τ, se tiene
$$\rho(f) = \tau(f)$$
y esto nos asegura que ambas funcionales coinciden sobre el conjunto denso $\mathcal{A}$. Como son continuas, se deduce el resultado.

4. Veamos que quiere decir la hipótesis: sea $\mathcal{B}$ el conjunto del ítem previo. Se supone que el espacio cociente es acotado; usando $[\cdot]$ para denotar clase en el cociente, se tiene que existe M tal que $\|[b]\| \leq M$ para todo $b \in \mathcal{B}$. Por la definición de la norma en el cociente, esto es equivalente a decir que
$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|b + \lambda\| \leq M$$
para todo $b \in \mathcal{B}$.

   Ahora recordemos que si ρ y τ son estados, tienen norma 1, y además se tiene $\rho(1) = \tau(1) = 1$. Por ende, para todo $b \in B$, y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ vale la siguiente desigualdad
$$\begin{aligned} \mid \rho(b) - \tau(b) \mid &= \mid \rho(b+\lambda) - \rho(\lambda) - \tau(b+\lambda) + \tau(\lambda) \mid \\ &= \mid \rho(b+\lambda) - \tau(b+\lambda) - \lambda\rho(1) + \lambda\tau(1) \mid \\ &= \mid \rho(b+\lambda) - \tau(b+\lambda) \mid \\ &\leq \|b+\lambda\| 2 \end{aligned}$$
   Como λ es cualquiera, se tiene
$$\mid \rho(b) - \tau(b) \mid \leq \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|b+\lambda\| 2$$
   y en consecuencia
$$\mid \rho(b) - \tau(b) \mid \leq 2M$$
   para todo $b \in \mathcal{B}$. Tomando supremo, se deduce el resultado. □

Pasando ahora a un álgebra C^* arbitraria, dejamos de concentrarnos en los estados puros y tenemos el siguiente resultado, con demostración similar a la de la proposición previa

Proposición III.4 *Sea A una C^* álgebra, y sea $(\mathcal{H}, D)$ un módulo de Fredholm no acotado sobre A. Supongamos que el conjunto $\{a : \|[D,a]\| \leq 1\}/\mathbb{C}1$ es acotado. Entonces la siguiente fórmula define una métrica acotada en $\mathcal{S}(A)$, el espacio de estados de A:*
$$d(\varphi, \psi) = Sup\{\mid \varphi(a) - \psi(a) \mid : a \in A, \|[D,a]\| \leq 1\} \tag{III.1}$$

Nótese que en un principio, hemos agregado (tal vez en forma arbitraria) una hipótesis (la acotación de $\mathcal{B}/\mathbb{C}1$, donde $\mathcal{B} = \{a : \|[D,a]\| \leq 1\}$) para obtener así una métrica en el espacio de estados. Sin embargo, esta hipótesis es más fuerte en el sentido de que no sólo la distancia entre dos puntos es un número real (y no infinito) sino que además la distancia entre cualquier par de puntos está acotada por una misma constante. El siguiente resultado nos dice que esta condición no sólo es suficiente, sino **necesaria** para obtener una métrica acotada en $\mathcal{S}(A)$:

Proposición III.5 *Si la fórmula (III.1) define una métrica acotada en $\mathcal{S}(A)$, entonces el conjunto $\mathcal{B}/\mathbb{C}1$ es acotado.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $d(\rho,\tau) \leq M$ sobre $\mathcal{S}(A)$.

Sea $a \in \mathcal{B}$. Supongamos primero que a es autoadjunto. Fijemos $\mu_0 \in \mathcal{S}(A)$. Entonces para todo $\mu \in \mathcal{S}(A)$ se tiene

$$M \geq d(\mu,\mu_0) \geq \mid \mu(a) - \mu_0(a) \mid = \mid \mu\,(a - v_0(a)1) \mid$$

Como el elemento $f = a - \mu_0(a)1$ es autoadjunto, se tiene que

$$\|f\| = \sup_{\mu \in \mathcal{S}(A)} \mid \mu(f) \mid$$

(cf [K-R 1][p 258]). En consecuencia, se tiene $\|a - \mu_0(a)1\| \leq M$, lo que prueba que $\|[a]\| \leq M$. Ahora si $a \in \mathcal{B}$ no es autoadjunto, se tiene que $a = h + ik$ con h, k autoadjuntos. Tenemos

$$\begin{aligned} \mid \mu\,(h - v_0(h)1) \mid^2 &\leq \mid \mu\,(h - v_0(h)1) \mid^2 + \mid \mu\,(k - v_0(k)1) \mid^2 \\ &= \mid \mu\,(h - v_0(h)1) + i\mu\,(k - v_0(k)1) \mid^2 \\ &= \mid \mu\,(h + ik - v_0(h + ik)1) \mid^2 \\ &= \mid \mu\,(a - v_0(a)1) \mid^2 \leq M^2 \end{aligned}$$

lo que prueba que $\|[h]\| \leq M$ y similarmente $\|[k]\| \leq M$, y en consecuencia

$$\|[a]\| = \|[h + ik]\| \leq \|[h]\| + \|[k]\| \leq 2M \quad \square$$

Hemos propuesto una métrica en el espacio de estados de A, dado el caso de que exista un módulo de Fredholm no acotado sobre A, sin preocuparnos de si la topología inducida por esta métrica tiene alguna relación con alguna de las topologías ”naturales” de este espacio. El siguiente resultado resuelve esta situación

Teorema III.6 *Sea d la métrica de la Proposición III.4. Supongamos además que el conjunto $\{a \in A : \|[D,a]\| \leq 1\}/\mathbb{C}1$ es totalmente acotado. Entonces la topología inducida por esta métrica en $\mathcal{S}(A)$ coincide con la topología débil-*.*

DEMOSTRACIÓN:

Veamos primero que la topología inducida por la métrica es más fina que la débil-*. Esto es inmediato, ya que si $\{\mu_k\} \subset \mathcal{S}(A)$ es una sucesión que converje a $\mu \in \mathcal{S}(A)$ con respecto a la métrica d, entonces es obvio que $\{\mu_k(a)\}$ converge a $\{\mu(a)\}$ para todo $a \in \mathcal{B}$ (donde $\mathcal{B} = \{a \in A : \|[D,a]\| \leq 1\}$, como siempre). Si $a \in \mathcal{A}$, entonces como siempre $f = \frac{a}{\|[D,a]\|} \in \mathcal{B}$, y por ende $\mu_k(f) \to \mu(f)$; por la linealidad de las μ_k y de μ, se desprende que $\mu_k(a) \to \mu(a)$. Como $\mathcal{A}$ es densa en A, se deduce la convergencia en la topología débil-*.

Ahora veamos la otra inclusión. Dados $\mu \in \mathcal{S}(A)$, y $\epsilon > 0$, basta probar que la bola métrica $B(\mu,\epsilon)$ contiene un entorno débil-* de μ. Como $\mathcal{B}/\mathbb{C}1$ es totalmente acotado, existe una $\epsilon/4$-red finita $[b_1], \cdots, [b_n]$ que lo cubre. Demostraremos que el siguiente entorno débil-* de μ

$$\mathcal{O} = \{\tau \in \mathcal{S}(A) : \mid (\tau - \mu)(b_j) \mid < \epsilon/3, \;\; 1 \leq j \leq n\}$$

está contenido en $B(\mu,\epsilon)$. Para todo $a\in\mathcal{B}$ existe un j tal que

$$\|[a]-[b_j]\|<\epsilon/4$$

es decir, existe j tal que

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\|a-b_j-\lambda\|<\epsilon/4$$

Por ende, existe $\lambda_a\in\mathbb{C}$ (dependiendo de a) tal que

$$\|a-b_j-\lambda_a\|<\epsilon/3$$

Ahora para todo $\tau\in\mathcal{O}$ tenemos

$$\begin{aligned} \mid\mu(a)-\tau(a)\mid &\leq \mid\mu(a)-\mu(b_j+\lambda_a)\mid+\mid\mu(b_j+\lambda_a)-\tau(b_j+\lambda_a)\mid+\mid\tau(b_j+\lambda_a)-\tau(a)\mid \\ &\leq \|a-b_j-\lambda_a\|+\mid\mu(b_j)-\tau(b_j)\mid+\|a-b_j-\lambda_a\| \\ &< \epsilon/3+\mid(\mu-\tau)(b_j)\mid+\epsilon/3<\epsilon \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre $a\in\mathcal{B}$, se tiene $d(\mu,\tau)<\epsilon$. En consecuencia, $\mathcal{O}\subset B(\mu,\epsilon)$. □

Observación III.7 *Como se desprende de la demostración del teorema previo, si relajamos la hipótesis sobre $\mathcal{B}/\mathbb{C}1$, y pedimos sólo que sea acotado (lo cual es suficiente para tener una métrica acotada), entonces la topología métrica es siempre más fina que la débil-*.*

Nuevamente cabe examinar la naturalidad de la hipótesis sobre la acotación total del conjunto $\mathcal{B}/\mathbb{C}1$, la cual es evidente a partir del siguiente resultado

Lema III.8 *Sea d la métrica de la Proposición III.4. Supongamos además que la topología inducida por esta métrica coincide con la topología débil-* en $\mathcal{S}(A)$. Entonces el conjunto $\mathcal{B}/\mathbb{C}1$ es totalmente acotado.*

DEMOSTRACIÓN:

Notemos primero que si $\pi:\mathcal{B}_0\to M$ es una aplicación sobreyectiva, lineal y acotada, y $\mathcal{B}_0$ es totalmente acotado, entonces M es totalmente acotado (dado $\epsilon>0$ basta tomar una $\epsilon/\|\pi\|$-red en $\mathcal{B}_0$ y se obtiene vía π una ϵ-red en M).

Por la Proposición III.5, existe C tal que $\|[b]\|\leq C$ para todo $[b]\in\mathcal{B}/\mathbb{C}1$. Sea

$$\mathcal{B}_0=\{a\in A:\|[D,a]\|\leq 1,\ \|a\|\leq C+1\}$$

Probaremos primero que la imagen vía la proyección al cociente por $\mathbb{C}1$ de este conjunto coincide con la imagen de $\mathcal{B}$. Probaremos luego que $\mathcal{B}_0$ es totalmente acotado, con lo cual se obtiene el resultado deseado.

La primera afirmación se deduce del hecho de que dado $[b]\in\mathcal{B}/\mathbb{C}1$, se tiene

$$\|[b]\|=\inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\|b+\lambda\|\leq C$$

y por ende existe λ_b tal que $\|b+\lambda_b\| \leq C+1$. Tomando $b' = b + \lambda_b$ se tiene

$$[D, b']f = [D, b+\lambda_b]f = [D, b]f + [D, \lambda_b]f = [D, b]f + D\lambda_b f - \lambda_b D f = [D, b]f$$

lo que prueba que $\|[D, b']\| \leq 1$. Además $\|b'\| \leq C+1$, y por ende $b' \in \mathcal{B}_0$. Pero $[b'] = [b+\lambda_b] = [b]$.

Veamos ahora que $\mathcal{B}_0$ es totalmente acotado. Consideremos $\mathcal{S}(A)$ con la topología débil-*. Hay una inclusión natural i de $\mathcal{B}_0$ en $C(\mathcal{S}(A))$ dada por

$$i(b)(\mu) = \mu(b)$$

Sea $\Phi = i(\mathcal{B}_0) \subset C(\mathcal{S}(A))$. Notemos que

$$| \; i(b)(\mu) \; | = | \; \mu(b) \; | \leq \|b\| \leq C+1$$

lo que prueba que

$$sup\{| \; f(\mu) \; | : f \in \Phi\} < \infty$$

para todo $\mu \in \mathcal{S}(A)$. Esto prueba que la familia Φ es equiacotada. Ahora dado $\epsilon > 0$ y $\mu_0 \in \mathcal{S}(A)$, notemos que

$$| \; i(b)(\mu_0) - i(b)(\mu) \; | < \epsilon$$

para todo $\mu \in B(\mu_0, \epsilon)$ y para todo $b \in \mathcal{B}_0$. Como estamos suponiendo que la topología inducida por la métrica coincide con la topología débil-*, se deduce que la familia Φ es equicontinua. Por el teorema de Ascoli (ver [Rudin][p 369]), la familia Φ es totalmente acotada en $C(\mathcal{S}(A))$. Falta ver como se trasladan las ϵ-redes de Φ a B_0; dado $\epsilon > 0$, sea $i(b_1), \cdots, i(b_n)$ una $\epsilon/2$-red en Φ. Afirmamos que $b_1, \cdots, b_n$ es una ϵ-red en $\mathcal{B}_0$. Para ello, tomemos $b = h + ik$ en $\mathcal{B}_0$, con h, k autoadjuntos. Entonces existe j tal que

$$\|i(b) - i(b_j)\| = sup_{\mu \in \mathcal{S}(A)} \; | \; i(b)(\mu) - i(b_j)(\mu) \; | < \epsilon/2$$

Por ende $| \; \mu(b - b_j) \; | < \epsilon/2$ para todo $\mu \in \mathcal{S}(A)$. Escribamos $b_j = h_j + ik_j$, con h_j, k_j autoadjuntos. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} | \; \mu(h-h_j) \; |^2 &\leq | \; \mu(h-h_j) \; |^2 + | \; \mu(k-k_j) \; |^2 \\ &= | \; \mu(h-h_j) + i\mu(k-k_j) \; |^2 \\ &= | \; \mu(h+ik-(h_j+ik_j)) \; |^2 \\ &= | \; \mu(b-b_j) \; |^2 < \epsilon^2/4 \end{aligned}$$

lo que prueba que $| \; \mu(h - h_j) \; | < \epsilon/2$ para todo $\mu \in \mathcal{S}(A)$. Como $h - h_j$ es autoadjunto, tomando supremo se tiene $\|h - h_j\| < \epsilon/2$. Con un razonamiento idéntico, $\|k - k_j\| < \epsilon/2$. Ahora

$$\|b - b_j\| = \|h + ik - (h_j + ik_j)\| = \|h - h_j + i(k - k_j)\| \leq \|h - h_j\| + \|k - k_j\| < \epsilon \quad \square$$

Podemos resumir los resultados de la presente sección en el siguiente enunciado

Teorema III.9 *Sea A una C^* álgebra, y sea $(\mathcal{H}, D)$ un módulo de Fredholm no acotado sobre A. Sea $\mathcal{B} = \{a : \|[D,a]\| \leq 1\}$. Entonces la siguiente fórmula*

$$d(\varphi, \psi) = Sup\{\mid \varphi(a) - \psi(a) \mid: a \in \mathcal{B}\}$$

define una métrica acotada sobre $\mathcal{S}(A)$ si y sólo si el conjunto $\mathcal{B}/\mathbb{C}1$ es acotado.

La topología inducida por esta métrica es siempre más fina que la topología débil-.*

Ambas topologías coinciden si y sólo si el conjunto $\mathcal{B}/\mathbb{C}1$ es totalmente acotado.

III.1.1 Una revisión del operador de Dirac

Retomemos nuestro ejemplo de variedad Riemanniana con fibrado de Dirac complejo y módulo de Fredholm no acotado sobre $C(M)$ dado por el espacio de L^2 spinores y el operador de Dirac.

Notemos que en este caso, por los resultados del Teorema II.47, se tiene

$$\mathcal{B} = \{f \in Lip(M) : \|f\|_L \leq 1\}$$

En consecuencia, fijando un $p_0 \in M$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|[f]\| &= \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|f-\lambda\|_\infty \\ &\leq \|f - f(p_0)\|_\infty \\ &= \sup_{p\in M} \mid f(p) - f(p_0) \mid \\ &\leq \|f\|_L \sup_{p\in M} d(p,p_0) \leq K = diam(M) \end{aligned}$$

lo cual prueba que el conjunto $\mathcal{B}/\mathbb{C}$ es acotado.

Llamemos $\pi : C(M) \to C(M)/\mathbb{C}$ a la aplicación al cociente por el subespacio generado por la función 1.

Ahora sea $\mathcal{B}_0 = \{f \in Lip(M) : \|f\|_L \leq 1, \ \ \|f\|_\infty \leq K+1\} \subset C(M)$. Este conjunto es claramente equiacotado, pero además dado $\epsilon > 0$ y $p \in M$ se tiene

$$\mid f(q) - f(p) \mid \leq \|f\|_L d(q,p) \leq d(q,p) < \epsilon$$

para toda $f \in \mathcal{B}_0$, si $q \in B(p,\epsilon)$, lo que prueba que el conjunto es equicontinuo. Por el teorema de Ascoli (cf [Rudin][p 369]) $\mathcal{B}_0$ es totalmente acotado.

Dada $[f] \in \mathcal{B}/\mathbb{C}$, existe λ tal que $\|f+\lambda\|_\infty \leq K+1$ (ya que $\|[f]\| \leq K$). Pero $[f+\lambda] = [f]$, y $f+\lambda \in \mathcal{B}_0$, luego $\mathcal{B}/\mathbb{C} = \pi(\mathcal{B}_0)$, lo que prueba que $\mathcal{B}/\mathbb{C}$ es totalmente acotado, y por ende

Teorema III.10 *La topología débil-* del espacio de estados $\mathcal{S}(C(M))$ es metrizable, con una métrica dada por la fórmula*

$$d(\rho, \tau) = sup\{\mid \rho(f) - \tau(f) \mid: f \in C(M), \ \|f\|_L \leq 1\}.$$

III.2 Grupos discretos

Veremos en esta sección como se construye un módulo de Fredholm no acotado sobre el álgebra reducida de un grupo discreto cualquiera Γ, en el cual toda la información métrica está codificada en el grupo mismo, en el sentido de que la subálgebra involutiva densa de nuestro módulo de Fredholm no acotado coincide con la imagen de la representación regular a izquierda del grupo en $C_r^*(\Gamma)$.

Recordemos primero la definición del álgebra reducida

Definición III.11 *Sea Γ un grupo discreto. El espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma)$ se define como el conjunto de funciones $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ tales que*

$$\sum_{x\in\Gamma} \mid f(x) \mid^2 < \infty$$

Donde la convergencia de la suma debe entenderse en el sentido de la red de sumas sobre subconjuntos finitos de Γ, con el orden de la inclusión al revés (ver [K-R 1][p 25]). Se deduce que para que $f \in \ell^2(\Gamma)$, f debe ser nula salvo por una familia numerable de elementos de Γ.

El producto escalar entre $f, g \in \ell^2(\Gamma)$ está dado por

$$< f, g >= \sum_{x\in\Gamma} \mid f(x)g(x) \mid$$

Notaremos a la norma inducida por este producto escalar con $\| \cdot \|_2$.

La **representación regular a izquierda** $\lambda : \Gamma \to \ell^2(\Gamma)$ *está definida como*

$$(\lambda(x)f)(y) = f(x^{-1} \cdot y)$$

Nótese que esta es una representación unitaria, ya que

$$\|\lambda_x f\|_2 = \sum_{y\in\Gamma} \mid \lambda_x f(y) \mid^2 = \sum_{y\in\Gamma} \mid f(x^{-1} \cdot y) \mid^2 = \sum_{z\in\Gamma} \mid f(z) \mid^2 = \|f\|_2^2$$

El **álgebra reducida de grupo** *es el álgebra C^* dada por la clausura (en la norma de operadores de $\ell^2(\Gamma)$) de la imagen de Γ vía la representación regular a izquierda, i.e.*

$$C_r^*(\Gamma) = \overline{\lambda(\Gamma)}^{\| \, \|_{B(\ell^2(\Gamma))}}$$

Definición III.12 *Una* **función de longitud** *en Γ es una función $L : \Gamma \to I\!R_+$ tal que*

1. *$L(g \cdot h) \leq L(g) + L(h)$ para todo par $g, h \in \Gamma$*
2. *$L(g^{-1}) = L(g)$ para todo $g \in \Gamma$*
3. *L(e)=0*

Si el grupo Γ está presentado por generadores y relaciones, el prototipo de una función de longitud es la función que a cada palabra en los generadores le asigna la longitud de la palabra.

Diremos que L es **finita-a-uno** *si para cada $a \in \mathcal{R}an(L)$ existen sólo finitos $g \in \Gamma$ tales que $L(g) = a$.*

Notemos con δ_g a la función que vale 1 en g y 0 en el resto del grupo. Notando que toda f se escribe como el límite de una combinación lineal finita de estas δ, se deduce que $\{\delta_g\}_{g\in\Gamma}$ es una b.o.n. de $\ell^2(\Gamma)$.

Sobre este conjunto definimos D_L, el operador de multiplicación inducido por una longitud L, i.e.

$$D_L(\delta_g) = L(g)\delta_g$$

Este operador es claramente simétrico, pero además es autoadjunto ya que si escribimos $f = \sum_{g\in\Gamma} f(g)\delta_g$ (notando que salvo numerables g, $f(g) = 0$), entonces

$$0 = (D_L + i)f = \sum (L(g) + i)\, f(g)\delta_g$$

y por ende $(L(g)+i)f(g) = 0$ para todo $g \in \Gamma$. Como L toma valores reales, $L(g)+i$ no se anula nunca y por ende debe ser $f(g) = 0$ para todo $g \in \Gamma$, lo que prueba que $\mathcal{K}er(D_L+i) = 0$ con un argumento similar, $\mathcal{K}er(D_L - i) = 0$, y en consecuencia, D_L es autoadjunto (cf [Simon][p 257]).

Notemos que $C_r^*(\Gamma)$ actúa en forma natural sobre $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma)$, vía el producto usual de operadores. Entonces se tiene

Teorema III.13 *Sea Γ un grupo discreto numerable y L una función de longitud en Γ. Entonces $(\ell^2(\Gamma), D_L)$ es un módulo de Fredholm no acotado sobre $C_r^*(\Gamma)$ si y sólo si el rango de L es no acotado y discreto y L es finita-a-uno. En ese caso la subálgebra involutiva densa es $\lambda(\Gamma)$, la imagen del grupo en el álgebra reducida.*

Demostración:

Veamos primero la vuelta. Supongamos que $(\ell^2(\Gamma), D_L)$ es un módulo de Fredholm no acotado sobre $C_r^*(\Gamma)$. Notemos que como $D_L\delta_g = L(g)\delta_g$, y D_L es no acotado, se deduce que $\mathcal{R}an(L)$ es no acotado. Ahora supongamos que $a \in \mathcal{R}an(L)$. Entonces existe $g \in \Gamma$ tal que $L(g) = a$. En consecuencia se tiene

$$D_L\delta_g = L(g)\delta_g = a\delta_g$$

lo que prueba que a es autovalor de D_L. Como D_L tiene resolvente compacta, este conjunto es discreto (ver el Lema II.42). Por último, si $L(g) = a$ entonces $L(g) - a = 0$ y por ende $(D_L - a)\delta_g = 0$. Esto nos dice que $\delta_g \in \mathcal{K}er(D_L - a)$, y como este núcleo tiene dimensión finita (ver nuevamente el Lema II.42) se deduce que sólo existen finitos g con $L(g) = a$, i.e. L es finita-a-uno.

Supongamos ahora que L es no acotada, discreta y finita-a-uno. En el comentario previo al teorema vimos que D_L es siempre autoadjunto. Como L es no acotada, D_L es no acotado.

Ahora probaremos que el álgebra densa $\mathcal{A}$ es exactamente la imagen de Γ en $C_r^*(\Gamma)$. Para esto basta probar que para todo $g \in \Gamma$, $[D_L, \lambda_g]$ se extiende a un operador acotado. Probaremos algo más: la fórmula $\|[D_L, \lambda_g]\| = L(g)$ para todo $g \in \Gamma$.

Fijemos $g \in \Gamma$. Para todo $h \in \Gamma$ se tiene

$$(\lambda_{g^{-1}} D_L \lambda_g - D_L)\delta_h = (L(gh) - L(h))\, \delta_h$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}\|[D_L,\lambda_g]\| = \|\lambda_{g^{-1}}[D_L,\lambda_g]\| &= \|\lambda_{g^{-1}}D_L\lambda_g - D_L\| \\ &= sup_{h\in\Gamma}\|(\lambda_{g^{-1}}D_L\lambda_g - D_L)\delta_h\|_2 \\ &= sup_{h\in\Gamma}\|\,(L(gh)-L(h))\,\delta_h\|_2 \\ &= sup_{h\in\Gamma}\mid L(gh)-L(g)\mid\end{aligned}$$

Ahora probaremos que $\sup_{h\in\Gamma}\mid L(gh)-L(g)\mid = L(g)$. Primero notemos que

$$\mid L(ge)-L(e)\mid = L(g),$$

con lo cual

$$L(g)\leq \sup_{h\in\Gamma}\mid L(gh)-L(g)\mid$$

Para la otra desigualdad probaremos que para todo $h\in\Gamma$, $\mid L(gh)-L(h)\mid\leq L(g)$. Notemos que para todo h se tiene

$$L(gh)-L(h)\leq L(g)+L(h)-L(h)=L(g)$$

Por otro lado,

$$L(h)=L(g^{-1}gh)\leq L(g^{-1})+L(gh)=L(g)+L(gh)$$

lo que prueba que

$$-L(g)\leq L(gh)-L(h)$$

Juntando ambas desigualdades, se tiene el resultado.

Por último, probaremos que $T=(D_L^2+1)^{-1}$ es compacto. Para todo $g\in\Gamma$, se tiene $D_L\delta_g=L(g)\delta_g$, y por ende

$$(D_L^2+1)\delta_g = L(g)^2+1.$$

Multiplicando a ambos lados por T y dividiendo por $L(g)^2+1$ se tiene

$$T(\delta_g)=\frac{1}{L(g)^2+1}\delta_g=\beta_g\delta_g$$

Como Γ es numerable y L es no acotada, podemos numerar sus elementos de manera que $0\leq L(g_1)\leq L(g_2)\leq\cdots\to+\infty$. En consecuencia, $\beta_{g_i}\to 0$ cuando $i\to\infty$. Como L es finita-a-uno, cada β_i tiene multiplicidad finita como autovalor. Como L tiene rango discreto, el conjunto de autovalores es discreto, acumulándose únicamente en cero. Recordando que $\{\delta_{g_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una b.o.n., se obtiene la compacidad de T con una demostración idéntica a la del Corolario II.38. $\square$

III.3 Sistemas dinámicos

Estamos interesados en presentar una familia de álgebras C^* denominadas las "álgebras de rotación irracional", la cual se parametriza mediante un $\theta \in (0,1)$ irracional. Estas álgebras tiene diversas presentaciones; la más simple (el álgebra generada por dos unitarios) tiene la desventaja de que no está claro como se manipula ni cuales serán los subconjuntos densos a elejir. Por ello daremos una breve introducción a los sistemas dinámicos, mediante los cuales estas álgebras se construyen en forma natural, y en esta presentación será clara la elección de los subconjuntos densos para la construcción de un módulo de Fredholm no acotado sobre ellas.

Definición III.14 *Un* **sistema dinámico topológico** *es un par $\Sigma = (X, \sigma)$ donde X es un espacio topológico y σ es un homeomorfismo de X. Diremos que Σ es* **minimal** *si no existe ningún cerrado propio $C \subset X$ tal que $\sigma(C) \subset C$. Todo sistema dinámico induce un álgebra C^* canónica, que denominaremos A_Σ, la cual construiremos a continuación.*

Notemos que σ induce una acción de $\mathbb{Z}$ en el grupo de automorfismos del álgebra C^* de la funciones continuas a valores complejos sobre X, $C(X)$, de la siguiente manera:

$$\alpha_k(f)(x) = f\left(\sigma^k(x)\right)$$

para $k \in \mathbb{Z}$ y $f \in C(X)$, donde $\sigma^k = \sigma \circ \cdots \circ \sigma$, k veces. Consideremos el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to C(X)$ con soporte finito. Sobre ellas definimos una involución, un producto y una norma de la siguiente manera:

$$(f^*)_n = \alpha_n\left(\overline{f_{-n}}\right)$$

$$(f * g)_n = \sum_k f_k \alpha_k\left(g_{n-k}\right)$$

$$\|f\|_1 = \sum_k \|f_k\|_\infty$$

Tomando la completación con respecto a esta norma, se obtiene un álgebra de Banach involutiva, que denominaremos $L^1(\mathbb{Z}, C(X))$. Al álgebra C^* que se obtiene mediante la representación universal de esta álgebra involutiva (el álgebra envolvente) la denotaremos con A_Σ. Esta álgebra C^* se conoce también como el **C^*-producto cruzado** de $C(X)$ por $\mathbb{Z}$ con respecto a la acción α, y se denota con $C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

Notemos que cuando $X = \{*\}$, $C(X) \simeq \mathbb{C}$ y el producto cruzado es simplemente el álgebra envolvente de $\mathbb{Z}$, $C^*(\mathbb{Z}) \simeq C(S^1)$.

Definición III.15 *Una terna $(\pi, U, \mathcal{H})$ es una* **representación covariante** *del sistema dinámico Σ si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, $\pi : C(X) \to \mathcal{H}$ es una *-representación y $U : \mathbb{Z} \to \mathcal{H}$ es una representación unitaria tales que*

$$U(k)\pi(f)U(k)^* = \pi\left(\alpha_k(f)\right) \tag{III.2}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ y toda $f \in C(X)$.

Teorema III.16 *Toda representación covariante de Σ induce una representación de A_Σ.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $f : \mathbb{Z} \to C(X)$ una función con soporte finito. Dada $(\pi, U, \mathcal{H})$ una representación covariante definimos

$$\widetilde{\pi}(f) = \sum_n \pi(f_n) U(n)$$

Que $\widetilde{\pi}$ es un homomorfismo involutivo es una cuenta trivial, que queda a cargo del lector. Notemos además que

$$\|\widetilde{\pi}(f)\|_{\mathcal{H}} \leq \sum_n \|\pi(f_n)\|_{\mathcal{H}} \leq \sum_n \|f_n\| = \|f\|_1$$

puesto que $U(n)$ es unitario para todo n y π es involutivo. Esto prueba que $\widetilde{\pi}$ se extiende a una representación de $L^1(\mathbb{Z}, C(X))$, y en consecuencia a una representación de A_Σ. $\square$

Teorema III.17 *Sea Σ un sistena dinámico minimal, y supongamos que X tiene infinitos puntos. Sea $(\pi, U, \mathcal{H})$ representación covariante de Σ, con π fiel. Entonces la representación inducida en A_Σ es un *-isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN:

Ver [Tomiyama][p 116]. $\square$

III.3.1 Las álgebras de rotación irracional

Definición III.18 *Consideremos el sistema dinámico $\Sigma = \left(S^1, \sigma_\theta\right)$ donde σ_θ es una rotación rígida de la circunferencia*

$$\sigma_\theta(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i(t+\theta)}$$

Supongamos que θ es irracional. Llamaremos al álgebra A_Σ asociada a este sistema dinámico el **álgebra de rotación irracional***, y la denotaremos con A_θ. También se conoce a esta álgebra como el* **toro no conmutativo***.*

Teorema III.19 *Supongamos que $\mathcal{H}_0$ es un espacio de Hilbert y V, W son dos operadores unitarios en $\mathcal{H}_0$ tales que*

$$WV = e^{2\pi i\theta} VW$$

Entonces si θ es irracional la C^* álgebra generada por estos dos unitarios - $C^*(V, W)$ - coincide con el álgebra de rotación irracional A_θ.

DEMOSTRACIÓN:

Notemos que como θ es irracional, el sistema dinámico (S^1, σ_θ) es minimal (la órbita de cualquier punto es densa). Por el Teorema III.17, basta exhibir una representación covariante con π fiel cuya imagen sea $C^*(V, W)$.

Notemos primero que de la conocida propiedad para operadores acotados

$$\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$$

(cf [K-R 1][p 180]) se deduce que $\sigma(V) = \sigma(WVW^{-1})$ pues ambos son unitarios y entonces el espectro esta contenido en S^1, lo que excluye al 0. Ahora

$$\sigma(V) = \sigma(WVW^*) = \sigma(e^{2\pi i\theta}V) = e^{2\pi i\theta}\sigma(V)$$

y como θ es irracional y $\sigma(V)$ compacto se deduce que $\sigma(V) = S^1$.

Definimos $\pi : C(S^1) \to \mathcal{H}$ como el cálculo funcional asociado al operador V, i.e. $\pi(f) = f(V)$ para $f \in C(S^1)$. Esta representación es claramente involutiva y fiel.

Definimos $U : \mathbb{Z} \to \mathcal{H}$ como $U(k) = W^k$. Esta representación es claramente unitaria. Resta ver que la terna $(\pi, U, \mathcal{H}_0)$ es una representación covariante (i.e. que se cumple la ecuación III.2). Sea $f : S^1 \to \mathbb{C}$ la aplicación elevar a la ene, i.e. $(e^{2\pi it} \mapsto e^{2\pi itn})$. Llamando $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, se tiene

$$\begin{aligned}
U(k)\pi(f)U(k)^* &= W^kV^nW^{-k} \\
&= W^{k-1}WVV^{n-1}W^{-k} \\
&= \lambda W^{k-1}VWV^{n-1}W^{-k} = \cdots \\
\cdots &= \lambda^k VW^kV^{n-1}W^{-k} \\
&= \lambda^{kn}V^nW^kW^{-k} \\
&= \lambda^{kn}V^n \\
&= \lambda^{kn}\pi(f) \\
&= \pi\left(\lambda^{kn}f\right) \\
&= \pi\left(f \circ \sigma_\theta^k\right) \\
&= \pi\left(\alpha_k(f)\right)
\end{aligned}$$

Ahora por linealidad, la igualdad se extiende a todos los polinomios sobre S^1, y por densidad, se extiende a todas las funciones continuas sobre S^1, que es lo que queríamos probar. □

Nótese que A_θ puede pensarse como la clausura (en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_0}$) de la familia de sumas finitas

$$\sum_{\substack{|m|\geq m_0 \\ |n|\geq n_0}} a_{mn}V^mW^n.$$

Definición III.20 *Definimos un producto escalar en A_θ de manera que $\{V^m W^n\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ formen una base ortonormal. Completamos este espacio para obtener un espacio de Hilbert. Por lo que acabamos de comentar, todo elemento de este Hilbert se escribe como una suma infinita*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{mn} V^m W^n$$

con la condición de que $\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \mid a_{mn} \mid^2 < \infty$. Denotaremos este espacio con $L^2(A_\theta)$.

Definimos un operador no acotado en $L^2(A_\theta)$ por

$$\partial(V^m W^n) = 2\pi i(m + in) V^m W^n$$

Sea $\mathcal{H} = L^2(A_\theta) \oplus L^2(A_\theta)$. Entonces el operador

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial^* & 0 \end{pmatrix}$$

es claramente un operador no acotado autoadjunto en $\mathcal{H}$.

Hacemos actuar a A_θ en $\mathcal{H}$ mediante

$$X \cdot \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XY \\ XZ \end{pmatrix}$$

Veremos un poco más adelante que esta acción está bien definida.

Haciendo actuar D sobre la b.o.n. de $\mathcal{H}$ (que es simplemente considerar los pares $(V^m W^n, 0)\,;(0, V^k W^l))$, obtenemos que los autovalores de D son de la forma $\pm 2\pi\sqrt{m^2+n^2}$, con correspondiente autoespacio generado por los vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mp\sqrt{k^2+l^2} V^k W^l \\ (ik+l) V^k W^l \end{pmatrix} : k^2 + l^2 = m^2 + n^2 \right\}$$

Obtenemos así una expresión para $(D^2+1)^{-1}$ sobre la b.o.n. de $\mathcal{H}$, y como sus autovalores tienen la pinta

$$\frac{1}{4\pi^2(m^2+n^2)}$$

se deduce con el argumento standard la compacidad de $(D^2+1)^{-1}$.

Definición III.21 *El espacio $S(\mathbb{Z}^2)$ es el* **espacio de sucesiones de rápido decrecimiento sobre** $\mathbb{Z}^2$*, lo que quiere decir exactamente que*

$$\left(\mid n \mid^k + \mid m \mid^k\right) \mid a_{mn} \mid \ \textit{acotada para todo } k > 0$$

Notaremos al ínfimo de estas constantes que acotan con $C(a,k)$, i.e.

$$C(a,k) = \sup_{m,n} \left(| \ n \ |^k + | \ m \ |^k \right) | \ a_{mn} \ |$$

No es difícil verificar que el conjunto

$$\mathcal{A}_\theta = \left\{ \sum_{(m,n)\in \mathbb{Z}^2} a_{mn} V^m W^n : a \in S(\mathbb{Z}^2) \right\}$$

es una subálgebra involutiva de A_θ ya que en particular se tiene que existe una constante $C(a,4)$ tal que

$$\left(| \ n \ |^4 + | \ m \ |^4 \right) | \ a_{mn} \ | \leq C(a,4)$$

para todo m,n si $a \in S(\mathbb{Z}^2)$, con lo cual como V y W tienen norma uno se tiene

$$\| \sum_{\substack{|m|\geq m_0 \\ |n|\geq n_0}} a_{mn} V^m W^n \|_{\mathcal{H}_0} \leq \sum | \ a_{mn} \ | \leq \sum \frac{C(a,4)}{| \ n \ |^4 + | \ m \ |^4} < \epsilon$$

lo que prueba que las sumas parciales son de Cauchy en $\mathcal{H}_0$, y por ende convergentes a un elemento de $C^*(V,W) = A_\theta$.

Notemos ahora que la representación inducida por la representación covariante tiene la siguiente expresión para $f : \mathbb{Z} \to C(S^1)$ (ver el Teorema III.16)

$$\widetilde{\pi}(f) = \sum_m f_m(V) W^m$$

En particular, como f_m es continua tiene desarrollo de fourier para todo m, y podemos escribir $f_m(x) = \sum_n a_{nm} x^n$ donde $x = e^{2\pi i t}$. Aplicando la expresión de arriba obtenemos

$$\widetilde{\pi}(f) = \sum_{m,n} a_{nm} V^n W^m$$

Evidentemente, el hecho de que f_m esté en $L^2(S^1)$ es equivalente a que sus coeficientes de fourier deben estar en $\ell^2(\mathbb{Z})$, i.e. $\sum_n | \ a_{nm} \ |^2 < \infty$ para todo m. Pero para todo m se tiene $\|f_m\|_2 \leq c \|f_m\|_\infty$ con lo cual

$$\sum_m \|f_m\|_2 \leq c \sum_m \|f_m\|_\infty = c\|f\|_1 < \infty$$

lo que prueba que

$$\sum_{m,n} | \ a_{nm} \ |^2 < \infty$$

Esto último se traduce en que A_θ está canónicamente incluido en $L^2(A_\theta)$, lo que hace que la acción que definimos más arriba sobre $\mathcal{H}$ esté a su vez bien definida.

Por otra parte, si $a \in S(\mathbb{Z}^2)$, se tiene que cada f_m tiene un desarrollo de Fourier cuyos coeficientes cumplen

$$\left(| \ n \ |^k + | \ m \ |^k \right) | \ a_{mn} \ | \leq C(a,k)$$

para todo n, para cada m fijo y cada $k > 0$. Pero esto es equivalente a decir que cada f_m está en $\mathcal{C}^\infty(S^1)$ (cf [Treves][p 528]), el cual es obviamente denso en $C(S^1)$; de aquí se desprende la densidad de estas $f : \mathbb{Z} \to C(S^1)$ en $L^1(\mathbb{Z}, C(S^1))$, y por ende se obtiene que $\mathcal{A}_\theta$ es densa en A_θ.

Llamemos $\lambda = e^{2\pi i\theta}$. Un cálculo directo y formal muestra que si $a = \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}^2} a_{rs} V^r W^s$, entonces

$$[D, a](V^m W^n, 0) = 2\pi i \left(0, -\sum_{r,s} a_{rs} \overline{\lambda}^{sm}(r - is) V^{m+r} W^{s+n}\right)$$

con lo cual

$$\|[D, a](V^m W^n, 0)\|^2_{\mathcal{H}} = 4\pi^2 \left(\sum_{j,p} \mid a_{jp} \mid^2 (j^2 + p^2)\right) \tag{III.3}$$

Esto prueba que $\|[D, a]\|^2 \geq 4\pi^2 \sum_{r,s} \mid a_{rs} \mid^2 (r^2 + s^2)$, y nos da una condición necesaria para que este conmutador sea un operador acotado.

Por otra parte, si $v = \left(\sum_{m,n} b_{mn} V^m W^n, \sum_{k,l} c_{kl} V^k W^l\right)$, se tiene

$$[D, a]v = \begin{pmatrix} \partial\left(a. \sum_{k,l} c_{kl} V^k W^l\right) - a.\partial\left(\sum_{k,l} c_{kl} V^k W^l\right) \\ \partial^*\left(a. \sum_{m,n} b_{mn} V^n W^m\right) - a.\partial^*\left(\sum_{m,n} b_{mn} V^m W^n\right) \end{pmatrix}$$

donde el punto denota el producto de operadores en $\mathcal{H}_0$. Realizando los productos Cauchy pertinentes, se obtiene que la primer coordenada de este vector tiene la forma

$$\sum_r \sum_{k+j=r} \sum_l \sum_{f+g=l} 2\pi i c_{kf} a_{jg} \overline{\lambda}^{fj} (j + ig) V^{k+j} W^{f+g}$$

y la segunda una forma similar, que involucra a los b_{mn}.

Para obtener $\|[D, a]v\|^2_{\mathcal{H}}$, tenemos que calcular la norma (al cuadrado) de cada coordenada; se obtiene para la primer coordenada

$$4\pi^2 \sum_{r,l} \mid \sum_{k+j=r} \sum_{f+g=l} c_{kf} a_{jg} \overline{\lambda}^{fj} (j + ig) \mid^2$$

y una forma idéntica para la segunda.

Ahora utilizando la desigualdad $\mid a + b \mid^2 \leq (\mid a \mid + \mid b \mid)^2$ esta última expresión es menor o igual a

$$4\pi^2 \sum_{r,l} \left(\sum_{k+j=r} \sum_{f+g=l} \mid c_{kf} \mid\mid a_{jg} \mid\mid j + ig \mid\right)^2$$

Llamando $f(x, y) = \mid c_{xy} \mid$, $g(x, y) = \mid a_{xy} \mid\mid x + iy \mid$, lo que tenemos aquí es $4\pi^2 \|f * g\|_2^2$.

Aplicando la desigualdad de Young (i.e $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_1$, cf [Bourbaki][Chapitre VIII,p 166]) obtenemos que todo esto es menor o igual a

$$4\pi^2 \sum_{k,l} \mid c_{kl} \mid^2 . \left(\sum_{r,s} \mid a_{rs} \mid\mid r + is \mid\right)^2$$

Se obtiene una expresión idéntica para la segunda coordenada, que involucra a los b_{mn}. Notando que

$$\|v\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k,l} \mid c_{kl} \mid^2 + \sum_{m,n} \mid b_{mn} \mid^2$$

se tiene

$$\|[D,a]v\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 4\pi^2 \left(\sum_{r,s} \mid a_{rs} \mid\mid r + is \mid \right)^2 \|v\|_{\mathcal{H}}^2$$

De aquí es evidente que si $a \in \mathcal{A}_\theta$, entonces $[D,a]$ es un operador acotado, es más, se obtiene la desigualdad

$$\|[D,a]\| \leq 2\pi \left(\sum_{r,s} \mid a_{rs} \mid\mid r + is \mid \right)$$

Denominemos Lip_θ al conjunto de las $a \in A_\theta$ tales que $[D,a]$ es acotado. De la inclusión $\mathcal{A}_\theta \subset Lip_\theta$ se deduce la densidad de este último.

En consecuencia, tenemos el siguiente resultado:

Teorema III.22 *El par $(\mathcal{H}, D)$ es un módulo de Fredholm no acotado sobre A_θ, con subálgebra involutiva densa Lip_θ.*

REFERENCIAS

[Artin] ARTIN, E. - *Geometric Algebra*, Interscience, New York, 1957.

[Bourbaki] BOURBAKI, N. - *Éléments de Mathématique-Fascicule XXIX, Livre VI-Intégration*, Hermann, Paris, 1963.

[Cotlar-Cig] COTLAR, Mischa y CIGNOLI, Roberto - *Nociones de Espacios Normados*, Editorial Eudeba, Buenos Aires, Argentina, 1967.

[Connes 1] CONNES, Alain - *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London, 1994.

[Connes 2] CONNES, Alain - *Compact metric spaces, Fredholm modules and hyperfiniteness*, Ergod. Th. and Dynanm. Sys. (1989), 9, p 297-220.

[Connes-Lott] CONNES, Alain and LOTT, John - *The metric aspect of noncommutative geometry*, New symmetry principles in Quantum Field Theory, J. Frohlich et al., Plenum Press, New York, (1992), p 53-93.

[Conway] CONWAY, John B. - *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[Dixmier] DIXMIER, Jacques - *Les C^*-algèbras et leurs représentacions*, Gauthier-Villars & Cie., Paris, 1964.

[Davidson] DAVIDSON, Kenneth R. - *C^*-algebras by example*, AMS, Providence-Rhode Island, 1996.

[Evans] EVANS, Lawrence C. - *Partial Differential Equations*, AMS, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, Providence-Rhode Island, 1996.

[Fava-Zo] FAVA, Norberto y ZO, Felipe - *Medida e integral de Lebesgue*, Red Olímpica, Buenos Aires, Argentina, 1996.

[Halmos 1] HALMOS, Paul R. - *Measure theory*, D. Van Nostrand Company, New Jersey, 1959.

[Hilton] HILTON, P. J. - *An Introduction to Homotopy theory*, Cambridge University Press, London, 1953.

[Hormander] HORMANDER, Lars - *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[K-R 1] KADISON, Richard V. and RINGROSE, John R. - *Fundamentals of the theory of Operator Algebras, Vol 1: Elementary theory*, AMS-Graduate studies in mathematics, Vol 15, Providence-Rhode Island, 1997.

[K-R 2] KADISON, Richard V. and RINGROSE, John R. - *Fundamentals of the theory of Operator Algebras, Vol 2: Advanced theory*, AMS-Graduate studies in mathematics, Vol 16, Providence-Rhode Island, 1997.

[Kelley] KELLEY, John L. - *General Topology*, D. Van Nostrand Company, New Jersey, 1955.

[Kolmogorov] KOLMOGOROV, A.N. y FOMIN, S.V. - Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional Editorial MIR, Moscú, 1975.

[Larotonda] LAROTONDA, Ángel R. - *Álgebra lineal y geometría,* Ed. Eudeba, Buenos Aires, Argentina, 1973.

[L-M] LAWSON, H.L. and MICHELSOHN, M.L. - *Spin Geometry*, Princeton University Press, New Jersey, 1989.

[Lee] LEE, John M. - *Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[Munkres] MUNKRES, James - *TOPOLOGY: A First Course*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

[Park 1] PARK, Efton - *Isometries of Noncommutative Metric Spaces,* Proc of the AMS, Vol 123, No 1 (1995), p 97-105.

[Park 2] PARK, Efton - *Isometries of Unbounded Fredholm Modules over Reduced Group C^* algebras,* Proc of the AMS, Vol 123, No 6 (1995), p 1839-1843.

[Pavlovic] PAVLOVIC, Branka - *Defining metric spaces via operators from unital C^* algebras,* Pacific Journal of Mathematics, Vol 186, No 2 (1998), p 285-313.

[Rieffel] RIEFFEL, Marc A. - *Metrics on States from actions of Compact Groups,* Documenta MAthematica 3 (1998), p 215-229.

[Royden] ROYDEN, H. L. - *Real Analysis*, The Macmillan Company, New York, 1964.

[Rudin] RUDIN, Walter - *Functional Analysis,* McGraw-Hill, 1979.

[Rudin 2] RUDIN, Walter - *Real and Complex analysis,* McGraw-Hill, 1964.

[Sakai] SAKAI, Takashi - *Riemannian Geometry*, AMS-Translation of Mathematical Monographs, Vol 149, Providence-Rhode Island, 1996.

[Simon] REED, M. and SIMON, B. - *Methods of modern mathematical physics, Vol I : Functional Analysis,* Academic Press, London, 1980.

[Simon] REED, M. and SIMON, B. - *Methods of modern mathematical physics, Vol II : Fourier Analysis, Self-Adjointness,* Academic Press, London, 1980.

[Taylor] TAYLOR, Angus E. - *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1964.

[M Taylor I] TAYLOR, Michael E. - *Partial Differential Equations I, Basic Theory*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[M Taylor II] TAYLOR, Michael E. - *Partial Differential Equations II, Qualitative Studies of Linear Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[M Taylor III] TAYLOR, Michael E. - *Partial Differential Equations III, Nonlinear Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[Tomiyama] TOMIYAMA, Jun - *Invitation to C^*-algebras and topological dynamics*, World Scientific Advanced Series in Dynamical Systems, Vol 3, Singapore, 1987.

[Treves] TREVES, Francois - *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1967.

[Warner] WARNER, Frank W. - *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[Weaver] WEAVER, Nik - *Lipschitz Algebras and Derivations of Von Neumann Algebras*, Journal of Functional Analysis, Vol 139, No 2, August 1, 1996.

[Ziemer] ZIEMER, William P. - *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[Whe-Zyg] WHEEDEN,R. and ZYGMUND, A. - *Measure and Integral: An introduction to real analysis*, Marcel Dekker, New York, 1977.

Índice