I
REPRESENTACIONES DE GRUPOS

I.1 Grupos localmente compactos

Definición I.1 *Un* **grupo topológico** *es un grupo* $(G, \cdot, e)$ *provisto de una topología compatible con la estructura de grupo. Esto es, la operación de*
$G \times G \to G$

$$(s,t) \mapsto s \cdot t^{-1}$$

es continua.

Un grupo cualquiera provisto de la topología discreta es un grupo topológico localmente compacto Hausdorff. Se usará esta topología cuando no se indique otra.

Restringiremos nuestra atención a los grupos topológicos localmente compactos y Hausdorff (los ejemplos usuales son $\mathbb{R}^n, S^n$ *y cualquier grupo de Lie).*

Definición I.2 *Si* X *es un espacio topológico localmente compacto Hausdorff se definen* $C_0(X)$, $C_b(X)$, $C_c(X)$ *como subespacios localmente convexos de* $C(X)$ *(las funciones continuas sobre* X*) de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} C_c(X) &= \{f \in C(X) : Sop(f) \text{ es compacto } \} \\ C_0(X) &= \{f \in C(X) : \forall \epsilon\ \exists K \subset X \text{ compacto } / \mid f(X \setminus K) \mid < \epsilon\} \\ C_b(X) &= \{f \in C(X) : f \text{ es acotada } \} \end{aligned}$$

Está claro que $C_c(X) \subset C_0(X) \subset C_b(X) \subset C(X)$. *De las funciones de* $C_0(X)$ *se dice que "tienden a cero en infinito". Asimismo, se definen los siguientes espacios de medidas complejas como subespacios localmente convexos de* $M(X)$*, donde:*

$$\begin{aligned} M(X) &= \{ \text{ medidas de Borel regulares sobre } X\} \\ M^1(X) &= \{\mu \in M(X) : \mu \text{ es acotada } \} \\ M_c(X) &= \{\mu \in M(X) : Sop(\mu) \text{ es compacto } \}. \end{aligned}$$

Como espacios localmente convexos, valen las siguientes dualidades:
$C_0(X)^* = C_c(X)^* \simeq M^1(X)$, $C(X)^* \simeq M_c(X)$.

Observación I.3 *Si G es localmente compacto y $f \in C_0(G)$ (las funciones continuas que tienden a cero en infinito), entonces f es uniformemente continua, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $U \subset G$ entorno abierto de la identidad tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ cada vez que $x \cdot y^{-1} \in U$.*

Tomando $V \subset U$ tal que $V \cdot V \subset U$ y $W = V \cap V^{-1}$, se tiene $W = W^{-1}$ y además $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ cada vez que $x \cdot y^{-1} \in W$ o bien $x^{-1} \cdot y \in W$.

Definición I.4 *Sea X un espacio topológico localmente compacto. Una medida μ se dice que es de Borel regular si está definida en la σ–álgebra Σ generada por los subconjuntos compactos de X, y verfica además que*

$$\mu(E) = inf\,\{\mu(U) : E \subset U, U \in \Sigma \text{ abierto }\}$$
$$\mu(E) = sup\,\{\mu(K) : E \supset K, K \in \Sigma \text{ compacto }\}$$

para cualquier $E \in \Sigma$. Además,

$$\mu(K) < \infty \text{ si } K \text{ es compacto}$$

Definición I.5 *Sea $\mu \in M(G)$ (las medidas de Borel sobre G a valores complejos). μ se dice* **invariante a izquierda** *(resp.* **a derecha***) si $\mu(s \cdot E) = \mu(E)$ para todo $s \in G$, y todo boreliano $E \subset G$ (resp. si $\mu(E \cdot s) = \mu(E)$).*

Teorema I.6 (Haar) *Si G es un grupo topológico localmente compacto Hausdorff, entonces existe una medida de Borel regular positiva invariante a izquierda (resp. a derecha) que verifica $\mu(U) > 0$ si U es abierto no vacío. Esta medida es única salvo múltiplos escalares positivos. En cada caso eligiremos una medida de Haar arbitraria y la denotaremos μ_H.*

Demostración:

Ver [Halmos1][p. 254]. □

Definición I.7 *Dado un conjunto boreliano E con $0 < \mu_H(E) < \infty$, se define la* **función modular** $\Delta : G \to I\!R_+$ *por*

$$\Delta(s) = \frac{\mu_H(E)}{\mu_H(Es)}.$$

Si $\Delta \equiv 1$ se dice que G es un **grupo unimodular**.

Esta definición no depende del conjunto E, puesto que $\nu_s(A) = \mu_H(As)$ es una medida de borel regular invariante a izquierda y esto implica que $\nu_s = \Delta(s)\mu_H$ por la unicidad de μ_H.

Claramente, $\Delta : G \to (\mathbb{R}_+, .)$ es un homomorfismo de grupos. Probaremos que Δ resulta continuo en e y en consecuencia continuo. Sea $\epsilon > 0$ y K compacto tal que $\mu_H(K) > 0$. Por la regularidad de μ_H resulta que existe $U \supset K$ tal que

$$\mu_H(U) < (1+\epsilon)\mu_H(K)$$

Podemos hallar $V = V^{-1}$ entorno del origen tal que $K \cdot V \subset U$ (por el lema del tubo).

Tenemos entonces

$$\Delta(x)\mu_H(K) = \mu_H(K \cdot x) \leq \mu_H(U) \leq (1+\epsilon)\mu_H(K)$$

y análogamente

$$\frac{\mu_H(K)}{\Delta(x)} = \mu_H(K \cdot x^{-1}) \leq \mu_H(U) \leq (1+\epsilon)\mu_H(K)$$

Y entonces

$$\frac{1}{1+\epsilon} < \Delta(x) < 1+\epsilon$$

si $x \in V$.$\square$

Proposición I.8 *Si G es un grupo topológico compacto Hausdorff, entonces cualquier medida de Haar a izquierda es invariante también a derecha. Además la medida total de G es finita y entonces puede elegirse μ_H para ser una medida de probabilidad biinvariante en G. En lo sucesivo, μ_H referirá a la única probabilidad biinvariante de masa total 1 en G. Como consecuencia de la propiedad de biinvariancia, $\mu_H(E) = \mu_H(E^{-1})$ para todo E de Borel.*

DEMOSTRACIÓN:

Como Δ es un homomorfismo continuo y G es compacto, $\Delta(G)$ es un subgrupo compacto de $(\mathbb{R}, .)$ y por ende $\Delta \equiv 1$. La medida total es finita porque μ_H es de Borel regular. Para la última propiedad, observemos que ν definida por

$$\nu(E) = \mu_H(E^{-1})$$

es una medida de Borel regular invariante a derecha, y entonces por la unicidad de la medida de Haar resulta $\nu = \lambda\mu_H$, pero como $G = G^{-1}$ tenemos que

$$1 = \mu_H(G^{-1}) = \nu(G) = \lambda\mu_H(G) = \lambda.\square$$

Definición I.9 *Se define el álgebra normada $M^1(G)$ de las medidas de Borel acotadas sobre G con la norma $\|\mu\| = \mid \mu \mid (G)$ con el producto de convolución*

$$(\mu * \nu)(E) = \int_G \mu(t \cdot E) d\nu(t).$$

Notar que como espacios de Banach, $M^1(G) \simeq C_0(G)^*$. Teniendo en cuenta esto, la definición del producto puede reescribirse como

$$\int f(s) d(\mu * \nu)(s) = \int \int f(t \cdot s) d\nu(s) d\mu(t)$$

para $f \in C_0(G)$.

El producto está bien definido pues

$$\begin{aligned} \mid \textstyle\int_G \mu(t \cdot E) d\nu(t) \mid \quad &\leq \quad \textstyle\int_G \mid \mu(t \cdot E) \mid d\,|\nu|\,(t) \\ &\leq \quad \|\mu\| \cdot \|\nu\| \end{aligned}$$

Este álgebra admite un involución * definida por

$$\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$$

o alternativamente

$$\int_G (f(s)) d\mu^*(s) = \overline{\int_G \overline{f(s^{-1})} d\mu(s)}$$

En general $M^1(G)$ no resulta un álgebra C^*.

I.2 $L^1(G)$

Si definimos $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$ entonces puede comprobarse que en general $\tilde{f} \notin L^1(G)$, aún cuando f es integrable. La manera de definir una involución es mirando a $L^1(G)$ dentro de las medidas, de la siguiente manera:

Eligiendo μ_H una medida de Haar en G podemos definir el monomorfismo isométrico $\Gamma : L^1(G) \to M^1(G), (f \mapsto \mu_f)$, donde $\mu_f(E) = \int_E f(t) d\mu_H(t)$. Por el teorema de Radon-Nikodym, $\Gamma(L^1(G))$ es igual a las medidas absolutamente continuas respecto de μ_H. Así, $L^1(G)$ hereda una estructura de álgebra normada con involución

$$f^*(s) = \overline{f(s^{-1})} \Delta(s^{-1}),$$

y se verifica la identidad para la convolución de dos funciones

$$f * g(t) = \int_G f(s) g(s^{-1} \cdot t) d\mu_H(s).$$

Al igual que $M^1(G)$, $L^1(G)$ no resulta un álgebra C^*, ya que la identidad $\|f * f^*\| = \|f\|^2$ no se verifica en general para f no positiva. Ver (I.21)

Si G es discreto, podemos considerar las medidas puntuales $A = \{\delta_s\}_{s\in G}$. En particular, $\delta_e = id_{L^1(G)}$, y además la subálgebra generada por A es densa en $L^1(G)$. La recíproca también es cierta.

Proposición I.10 *Si $L^1(G)$ tiene unidad, la topología de G es la discreta.*

DEMOSTRACIÓN:

Para ello notemos que basta probar que la medida de $\{e\}$ es positiva, ya que en este caso la medida de todos los puntos es positiva (e igual a la medida de e, que supondremos $= 1$) por la invariancia de la medida, y entonces por la regularidad de μ_H existiría una red de abiertos U_α tal que $\mu_H(U_\alpha) \to 1$. Pero U_α es un numero natural (igual al cardinal de U_α), y por continuidad debe existir α_0 tal que $U_\alpha = e$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Por ende, e es abierto (y como G es Hausdorff, e es tambien cerrado).

Veamos entonces que $\mu_H(e) \neq 0$; supongamos que no es así . Llamando g a la identidad de $L^1(G)$, sea U abierto entorno de e tal que $f(x) = \int_{x^{-1}\cdot U} g(y^{-1}) d\mu_H(y) < 1/2$ para todo $x \in G$ (este abierto existe por la absoluta continuidad de la integral de g). Pero $f = \chi_U * g = \chi_U$, lo que implica que $\mu_H(U) = 0$ (absurdo).

Observación I.11 *En general, $L^1(G)$ tiene una aproximación de la identidad, que puede ser obtenida de la siguiente manera: dado un entorno abierto U de e elegimos dentro (Proposición I.3) un entorno de e simétrico V. Se elige una función positiva con soporte en V, g_U y de integral* 1. *Ahora $f_U(s) = \frac{g_U(s)+g_U^*(s)}{2}$ es positiva, tiene su soporte incluido en U, $f_U^* = f_U$, y $\|f_U\|_1 = 1$. La red $\{f_U\}$ con el orden dado por la inclusión al revés es la aproximación de la identidad buscada. Como G es localmente compacto y $C_c(G)$ es denso en $L^1(G)$ puede elegirse cada f_U continua de soporte compacto.*

Proposición I.12 *Un subespacio cerrado I de $L^1(G)$ es un ideal a izquierda si y sólo si es invariante por traslaciones a izquierda (o sea $f \in I$ entonces $f_s \in I$ para todo $s \in G$, donde $f_s(t) = f(s^{-1} \cdot t)$*

DEMOSTRACIÓN:

Si $I \subset L^1(G)$ es un subespacio cerrado invariante por traslaciones a izquierda, entonces, si $f \in C_c(G)$

$$f * g(t) = \int_G f(s) g(s^{-1} \cdot t) d\mu_H(s) = \int_G f(s) g_s(t) d\mu_H(s)$$

siendo la última integral límite de sumas de la forma $\sum_i f(s_i)g_{s_i}(t)\mu_H(\Delta_i)$. Además, este límite es uniforme por las características de f. Esto prueba que $f * g \in I$ si $g \in I$. Por densidad, hemos probado el resultado para $g \in I$ y $f \in L^1(G)$.

Recíprocamente si I es un ideal a izquierda cerrado, tenemos

$$g_s = lim_\lambda (f_\lambda * g)_s = lim_\lambda f_\lambda * g. \square$$

I.3 Representaciones

Observación I.13 *En un espacio de Hilbert cualquiera H, los operadores acotados admiten varias topologías, y estaremos interesados en las siguientes:*

1. *La topología de convergencia uniforme (o nórmica), es decir $T_\alpha \rightarrow_{\| \|} 0$ sii*

$$\lim_\alpha \|T_\alpha\| = 0.$$

2. *La topología fuerte, o de convergencia puntual, donde $T_\alpha \rightarrow_{\sigma_F} 0$ sii*

$$\lim_\alpha \|T_\alpha x\| = 0 \qquad \textit{para todo } x \in H.$$

3. *La topología débil, donde $T_\alpha \rightarrow_w 0$ cuando*

$$\lim_\alpha < T_\alpha x, y >= 0 \qquad \textit{para todo } x, y \in H.$$

Claramente, valen las inclusiones $\tau_w \subset \sigma_F \subset \tau_{\| \|}$.

Proposición I.14 *Si se considera $U(H)$ (el grupo de operadores unitarios de $B(H)$), con la topología de subespacio de $B(H)$, las topologías 2 y 3 de la observación anterior son iguales.*

DEMOSTRACIÓN:

Veamos que $\sigma_F \subset \tau_w$. Si $T_\alpha \rightarrow_{\tau_w} T$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_\alpha \| (T_\alpha - T)\, x\| &= \lim_\alpha \left[\|T_\alpha x\|^2 - < T_\alpha x, Tx > - < Tx, T_\alpha x > + \|Tx\|^2\right] \\
&= 2\|x\|^2 - \lim_\alpha < T_\alpha x, Tx > - \lim_\alpha < Tx, T_\alpha x > \\
&= 2\|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 \\
&= 0. \ \square
\end{aligned}$$

Definición I.15 *Si G es un grupo localmente compacto Hausdorff, una* **representación unitaria** *de G es un par (π, H), donde H es un espacio de Hilbert y π es un homomorfismo continuo de G en $U(H)$, el grupo de operadores unitarios de $B(H)$ con la topología de la proposición anterior.*

Un vector $\mathbf{v}$ de H se dice cíclico para π si $< \pi(G)\mathbf{v} >$ es denso en H.

Una representación es **irreducible** *si los únicos subespacios cerrados invariantes por $\pi(G)$ son $\{\mathbf{0}\}$ y H. Equivalentemente, no existen proyectores no triviales que conmuten con todo $rg(\pi)$. Equivalentemente todo vector no nulo de H es cíclico.*

Definición I.16 *Definimos* **representación** *de un álgebra de Banach A con involución como un homomorfismo de álgebras $\tilde{\pi}$ del álgebra de Banach en $B(H)$ que preserva la involución. Mediante un pequeño abuso de notación, denotaremos a estas representaciones *-representaciones de álgebras.*

Un vector $\mathbf{v}$ de H se dice cíclico para $\tilde{\pi}$ si $\tilde{\pi}(A)\mathbf{v}$ es denso en H.

$\tilde{\pi}$ se dice **no degenerada** *si $\tilde{\pi}(A)H$ es denso en H. Claramente, si existe un vector cíclico en H entonces la representación es no degenerada. Notar que si el álgebra tiene unidad, entonces la representación es no degenerada ya que $1_{B(H)} \in \tilde{\pi}(A)$.*

Una representación $\tilde{\pi}$ es **irreducible** *si los únicos subespacios cerrados invariantes por $\tilde{\pi}(A)$ son $\{\mathbf{0}\}$ y H. Equivalentemente, no existen proyectores no triviales que conmuten con todo $rg(\pi)$). Equivalentemente todo vector no nulo de H es cíclico.*

Evidentemente, si $\tilde{\pi}$ es una representación irreducible entonces es no degenerada.

La **representación universal** *de un álgebra de Banach con involución es la suma directa de todas las *-representaciones no degeneradas (módulo equivalencia unitaria) del álgebra, y de aquí en adelante la denotaremos con π_u.*

Proposición I.17 *Si A es un álgebra involutiva, B es un álgebra C^* y $\pi : A \to B$ es un morfismo algebraico que preserva la involución, entonces $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos $A \subset A^1$ álgebra con unidad, $B \subset B^1$ álgebra con unidad, entonces $Spec_{B^1}(\pi(x)) \subset Spec_{A^1}(x)$ con lo cual $\rho(\pi(x)) \leq \rho(x) \leq \|x\|$. Ahora si $y = y^*$ la fórmula del radio espectral no lleva a $\rho(y) = \|y\|$. Tomando $y = x^*x$ se tiene

$$\begin{aligned}\|\pi(x)\|^2 &= \|\pi(x^*x)\| \\ &= \rho(\pi(x^*x)) \\ &\leq \|x^*x\| \\ &\leq \|x^*\| \cdot \|x\| = \|x\|^2.\Box\end{aligned}$$

Proposición I.18 *Toda representación unitaria π de G induce una *-representación $\tilde{\pi}$ no degenerada de $L^1(G)$, integrando funciones a valores en $B(H)$, vía*

$$\tilde{\pi}(f) = \int_G f(t)\pi(t)d\mu_{_H}(t),$$

y recíprocamente, toda representación no degenerada de $L^1(G)$ induce una representación unitaria de G.

DEMOSTRACIÓN:

Veamos que $\tilde{\pi}(f)$ es un morfismo:

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(f * g) &= \int\int_{G\times G} f(s)g(s^{-1}\cdot t)d\mu_{_H}(s)\pi(t)d\mu_{_H}(t) \\ &= \int_G f(s)\pi(s)\int_G g(s^{-1}\cdot t)\pi(s^{-1}\cdot t)d\mu_{_H}(t)d\mu_{_H}(s) \quad (porFubini) \\ &= \int_G f(s)\pi(s)\int_G g(u)\pi(u)d\mu_{_H}(u)d\mu_{_H}(s) \\ &= \tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g).\end{aligned}$$

Que es continua se deduce de la desigualdad

$$\|\tilde{\pi}(f)\| \leq \int_G \mid f(t) \mid d\mu_{_H}(t) = \|f\|_1.$$

Veamos ahora que $\tilde{\pi}$ es involutivo:

$$\begin{aligned}
<\tilde{\pi}(f)^*\mathbf{x},\mathbf{y}> &= <\mathbf{x},\tilde{\pi}(f)\mathbf{y}> \\
&= \textstyle\int_G \overline{f(t)} <\mathbf{x},\pi(t)\mathbf{y}> d\mu_H(t) \\
&= \textstyle\int_G \overline{f(t)} <\pi(t^{-1})\mathbf{x},\mathbf{y}> dt \\
&= \textstyle\int_G \overline{f(s^{-1})} <\pi(s)\mathbf{x},\mathbf{y}> \Delta(s^{-1}) d\mu_H(u) \\
&= <\textstyle\int_G f^*(s)\pi(s)\mathbf{x} d\mu_H(s),\mathbf{y}> \\
&= <\tilde{\pi}(f^*)\mathbf{x},\mathbf{y}>.
\end{aligned}$$

Para ver que $\tilde{\pi}$ es no degenerada, consideremos primero el caso discreto: tomando $f=\delta_e$ se tiene

$$\tilde{\pi}(f)\mathbf{v} = \int_G \delta_e(t)\pi(t)\mathbf{v} d\mu_H(t) = \pi(e)\mathbf{v} = I_{B(H)}\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

En el caso general tomando una aproximación de la identidad $\{f_\lambda\}$ se tiene

$$\begin{aligned}
<\lim_\lambda \tilde{\pi}(f_\lambda)\mathbf{v},\mathbf{x}> &= <\lim_\lambda \textstyle\int_G f_\lambda(t)\pi(t) d\mu_H(t)\mathbf{v},\mathbf{x}> \\
&= \lim_\lambda \textstyle\int_G f_\lambda(t) <\left(\pi(t^{-1}\cdot e)\right)^{-1}\mathbf{v},\mathbf{x}> d\mu_H(t)
\end{aligned}$$

Llamando $g(s) =< \left(\pi(s)\right)^{-1}\mathbf{v},\mathbf{x}>$, el último término es simplemente

$$\lim_\lambda \left(f_\lambda * g\right)(e) = g(e),$$

y entonces

$$<\lim_\lambda \tilde{\pi}(f_\lambda)\mathbf{v},\mathbf{x}> = <\mathbf{v},\mathbf{x}>,$$

lo que prueba que la identidad es límite fuerte de operadores en la imagen de la representación, y entonces la representación es no degenerada.

Otra forma de definir $\tilde{\pi}$ es asociar a cada elemento de g la medida puntual δ_g, y utilizar que las combinaciones lineales de las medidas puntuales son densas en $M^1(G)$, para definir una representación en este espacio, que luego se restringe a $L^1(G)$.

Veamos el camino inverso: si G es discreto, y $\tilde{\pi} : L^1(G) \to B(H)$ es una *-representación de álgebras no degenerada, definimos

$$\pi(g) = \tilde{\pi}\left(\delta_g\right).$$

Si G no es discreto, sea $\{f_\lambda\}$ una aproximación de la identidad de $L^1(G)$. Entonces

$$\lim_\lambda \tilde{\pi}\left(f_\lambda\right) \tilde{\pi}(g)\mathbf{x} = \tilde{\pi}(g)\mathbf{x}$$

para toda $g \in L^1(G)$ y $\mathbf{x} \in H$. Entonces $\tilde{\pi}\left(f_\lambda\right) \to_{\sigma_F} id_{B(H)}$. Como $\tilde{\pi}$ es no degenerada, definimos $\pi(s)$ sobre un denso, extendiendo luego a todo el espacio:

$$\pi(s)\left(\tilde{\pi}(g)\mathbf{x}\right) = \tilde{\pi}\left(g_s\right)\mathbf{x},$$

donde $g_s(t) = g\left(s^{-1} \cdot t\right)$.

Veamos primero que la imagen de π está contenida en la bola unitaria de $B(H)$, como $\left(f_\lambda\right)_{s^{-1}} * g$ tiende a g_s,

$$\begin{aligned}
\left\|\pi(s)\left(\tilde{\pi}(g)\mathbf{x}\right)\right\| &= \|\tilde{\pi}(g_s)\mathbf{x}\| \\
&= \left\|\tilde{\pi}\left(\lim_\lambda \left(f_\lambda\right)_{s^{-1}} * g\right)\mathbf{x}\right\| \\
&= \left\|\tilde{\pi}\left(\left(f_\lambda\right)_{s^{-1}}\right)\tilde{\pi}(g)\mathbf{x}\right\| \\
&\leq \left\|\tilde{\pi}\left(\left(f_\lambda\right)_{s^{-1}}\right)\right\| \cdot \|\tilde{\pi}(g)\mathbf{x}\| \\
&\leq \|\tilde{\pi}\| \cdot \|f_\lambda\| \cdot \|\tilde{\pi}(g)\mathbf{x}\| \\
&= \|\tilde{\pi}(g)\mathbf{x}\|.
\end{aligned}$$

De aquí se desprende también que $\|\pi(s)^{-1}\| = \|\pi(s^{-1})\| \leq 1$, de donde $\|\pi(s)\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in H$, lo que prueba que π es unitaria. $\square$

Ejemplo 1 *La representación trivial de G en $\mathbb{C}(s \mapsto 1)$ es claramente una representación unitaria continua de G. La representación inducida de $L^1(G)$ es $(f \mapsto \int_G f d\mu_H)$.*

Definición I.19 *Todo grupo localmente compacto Hausdorff G tiene una representación distinguida en $L^2(G)$, llamada* **representación regular a izquierda**. *Esta se define como*

$$\left(\lambda(s)g\right)(t) = g(s^{-1} \cdot t).$$

Esta representación es unitaria puesto que $\lambda(s)$ es una isometría, por ser dm invariante a izquierda.

Notar que la representación inducida en $L^1(G)$ toma la forma $\tilde{\lambda}(f)(g) = f * g$ para $g \in L^2(G)$.

La clausura de la imagen de esta representación (en realidad, de la representación inducida en $L^1(G)$) es una C^*-álgebra conocida como la **C^*-álgebra de grupo reducida** *de G, o $C_r^*(G)$. Es decir,*

$$C_r^*(G) = \overline{\tilde{\lambda}\left(L^1(G)\right)}.$$

Definición I.20 *La* **C^*-álgebra de grupo** *de G, $C^*(G)$, es la clausura nórmica de la representación universal de $L^1(G)$. Esto es,*

$$C^*(G) = \overline{\pi_u\left(L^1(G)\right)}^{\|\ \|}.$$

Más explícitamente, podemos definir una norma en $L^1(G)$ que lo convierte en un álgebra C^* (no completa), de la siguiente manera:

$$\|f\|_{C^*(G)} = \sup\{\|\pi(f)\| : \pi \text{ una *-representación no degenerada de } L^1(G)\}.$$

Esta familia es no vacía por el siguiente argumento: considere

$$L^1(G) \xrightarrow{\tilde{\lambda}} C_r^*(G) \xrightarrow{GNS} B(H)$$

donde GNS es la representación **irreducible** *de la C^* álgebra $C_r^*(G)$ de Gelfand, Neimark y Segal. Llamando $\pi = GNS \circ \tilde{\lambda}$, si se tiene $\pi\left(L^1(G)\right) v = 0$, de la inclusión $\pi\left(L^1(G)\right) \subset GNS\left(C_r^*(G)\right)$ y la densidad de $\tilde{\lambda}(L^1(G))$ en $C_r^*(G)$ se deduce que $v = 0$ y por ende, π también es irreducible. Como $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$ para toda π (ver I.17), el supremo es finito y además $\leq \|f\|_1$.*

La C^*-álgebra de grupo definida arriba es isométricamente isomorfa a la completación de $L^1(G)$ con esta norma.

Observación I.21 *Si $f \in L^1(G)$ es una función positiva, $\|f\|_{C^*(G)} = \|f\|_1$, ya que existe la representación trivial de G que en si $f \geq 0$ resulta $f \mapsto \|f\|_1$ y por ende, $\|f\|_{C^*(G)} \geq \|f\|_1$.*

Observación I.22 *Toda representación irreducible de $C^*(G)$ puede restringirse a $L^1(G)$, obteniendose una representacion irreducible del último (continua por la desigualdad $\|f\|_{C^*(G)} \leq \|f\|_1$).*

Recíprocamente, dada una representación π irreducible de $L^1(G)$, entonces $\|f\|_{C^*(G)} \geq \|\pi(f)\|$ por la definición de $\|\ \|$. Esto muestra que π es continua con la norma de $C^*(G)$, y por densidad puede entonces extenderse a una representación irreducible de $C^*(G)$.

Observación I.23 *Si f_λ es una aproximación de la identidad de $L^1(G)$ entonces es una aproximación de la identidad de $C^*(G)$, puesto que $L^1(G)$ es denso en $C^*(G)$ y además $\|f\|_{C^*(G)} \leq \|f\|_1$.*

I.4 El grupo dual de un grupo abeliano

Definición I.24 *Si G es un grupo localmente compacto Hausdorff abeliano, se define su* **grupo dual** *como el conjunto*

$$\hat{G} = \{\gamma : G \to S^1 \quad \textit{tal que } \gamma \textit{ es un homomorfismo continuo}\}.$$

Con las operaciones

$$(\gamma_1 + \gamma_2)\, x = \gamma_1(x)\gamma_2(x)$$
$$(-\gamma)\,(x) = \gamma(x)^{-1}$$

$\hat{G}$ es un grupo con elemento neutro $\gamma(x) \equiv 1$.

Proposición I.25 *La aplicación $\phi \mapsto \hat{\phi}(\gamma)$, donde $\gamma \in \hat{G}$ y*

$$\hat{\phi}(\gamma) = \int_G \phi(x)\overline{\gamma(x)}d\mu_H(x) \tag{I.1}$$

es un caracter de $L^1(G)$.

Demostración:

Veamos que es multiplicativo (la linealidad es obvia). Ya que G es abeliano, utilicemos notación aditiva para la operación del grupo:

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi * \psi}(\gamma) &= \textstyle\int_G \overline{\gamma(x)} \int_G \phi(y)\psi(x-y)d\mu_H(y)d\mu_H(x) \\
&= \textstyle\int_G \phi(y) \int_G \overline{\gamma(x)}\psi(x-y)d\mu_H(x)d\mu_H(y) \\
&= \textstyle\int_G \phi(y) \int_G \overline{\gamma(z+y)}\psi(z)d\mu_H(z)d\mu_H(y) \\
&= \textstyle\int_G \phi(y)\overline{\gamma(y)}d\mu_H(y) \int_G \psi(z)\overline{\gamma(z)}d\mu_H(z) \\
&= \hat{\phi}(\gamma)\hat{\psi}(\gamma). \ \square
\end{aligned}$$

Proposición I.26 *Todo caracter de $L^1(G)$ se realiza a través de uno de los de la observación anterior.*

Demostración:

Sea $h \in \chi_{L^1(G)} \subset L^1(G)^* = L^\infty(G)$. Sabemos que

$$h(\phi) = \int_G \phi(x)\Phi_h(x)d\mu_H(x).$$

Probaremos que $\Phi_h \in L^\infty$ es en realidad un caracter de G.

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_G h(\phi)\psi(y)\Phi_h(x)d\mu_H(y) &= h(\phi)h(\psi) \\
&= h(\phi * \psi) \\
&= \textstyle\int_G\int_G \phi(x-y)\psi(y)d\mu_H(y)\Phi_h(x)d\mu_H(x) \\
&= \textstyle\int_G \psi(y)h(\phi_y)d\mu_H(y)
\end{aligned}$$

para todo $\psi \in L^1(G)$, con lo cual $h(\phi)\Phi_h(y) = h(\phi_y)$ $pp(y)$. Ahora elegimos $\phi \in L^1(G)$ tal que $h(\phi) \neq 0$, y con esto se tiene

$$\Phi_h(y) = c\ h(\phi_y)\ pp(y).$$

Como las traslaciones son continuas en L^1, Φ_h tiene un representante continuo.

Veamos ahora que Φ_h es un homomorfismo. Como $h(\phi)\Phi_h(y) = h(\phi_y)$ para todo $y \in G$, se tiene

$$\begin{aligned}
h(\phi)\Phi_h(x+y) &= h(\phi_{x+y}) \\
&= h((\phi_x)_y) \\
&= h(\phi_x)\Phi_h(y) \\
&= h(\phi)\Phi_h(x)\Phi_h(y).
\end{aligned}$$

Además, como $\|\Phi_h\|_\infty = \|h\| = 1$, se tiene

$$\mid \Phi_h(x) \mid \leq 1,$$

y como se trata de un homomorfismo, $\mid \Phi(x) \mid = 1$ para todo $x \in G$. $\square$

Observación I.27 *Para toda $\gamma \in \widehat{G}$ existe $\phi \in L^1(G)$ tal que $\hat{\phi}(\gamma) \neq 0$, puesto que $\int_G \overline{\gamma(x)}\phi(x)d\mu_H(x) = 0$ para toda $\phi \in L^1(G)$ implica que $\overline{\gamma(x)} = 0$ pp absurdo.*

Proposición I.28 *Existe una biyección natural entre $\hat{G}$ y $\chi_{L^1(G)}$.*

Demostración:

Que existe una aplicación sobreyectiva es la proposición anterior, resta ver que esta aplicación es inyectiva. Para ello sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$, y supongamos que

$$\hat{\phi}(\gamma_1) = \hat{\phi}(\gamma_2)$$

para toda $\phi \in L^1(G)$. Entonces

$$\int_G \phi(x)[\overline{\gamma_1(x) - \gamma_2(x)}]d\mu_H(x) = 0$$

para toda ϕ, con lo cual $\gamma_1 = \gamma_2$ *pp*, pero como ambos son continuos, se tiene $\gamma_1 \equiv \gamma_2$. $\Box$

Le conferiremos una topología a $\hat{G}$ de la siguiente manera: $\gamma_\alpha \to_\alpha \gamma$ si y sólo si $\hat{\phi}(\gamma_\alpha \to \hat{\phi}(\gamma)$ para toda ϕ en $L^1(G)$; es decir es la menor topología que hace a todas las $\hat{\phi}$ continuas.

Por otra parte, la topologí́a natural de $\chi_{L^1(G)}$ es la $\sigma(L^1(G)^*, L^1(G))$ heredada de $L^1(G)^*$.

Proposición I.29 *Con estas dos topologías, la biyección anterior se transforma en un homeomorfismo.*

Demostración:

Resulta de la definición de la topología de $\hat{G}$. $\Box$

Proposición I.30 *La topología de $\widehat{G}$ es la* **compacto abierta** *como espacio de funciones sobre G a valores complejos. Es decir, es la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.*

Demostración:

1. La función evaluación de $G \times \widehat{G} :\to \mathbb{C}$ dada por $(x, \gamma) \mapsto \gamma(x)$ es continua.

   Para verlo, dada ϕ en $L^1(G)$, consideremos la función $\hat{\phi}_x(\gamma) = \gamma(x)\hat{\phi}(\gamma)$. Probemos que $\hat{\phi}_x$ es continua como aplicación de $G \times \widehat{G}$ en los complejos. Dados $x_0 \in G$, $\gamma_0 \in \widehat{G}, \epsilon > 0$, sea V un entorno de x_0 tal que

   $$\|\phi_x - \phi_{x_0}\|_1 < 1$$

para todo $x \in V$, y sea W un entorno de γ_0 tal que

$$\|\hat{\phi}_{x_0}(\gamma) - \hat{\phi}_{x_0}(\gamma_0)\|_\infty < \epsilon$$

para todo $\gamma \in W$. Ahora

$$\begin{aligned} |\ \hat{\phi}_x(\gamma) - \hat{\phi}_{x_0}(\gamma_0)\ | &\leq |\ \hat{\phi}_x(\gamma) - \hat{\phi}_{x_0}(\gamma)\ | + |\ \hat{\phi}_{x_0}(\gamma) - \hat{\phi}_{x_0}(\gamma_0)\ | \\ &< \|\phi_x - \phi_{x_0}\|_1 + \epsilon \\ &< 2\epsilon. \end{aligned}$$

Elegimos ϕ tal que $\hat{\phi}(\gamma_0) \neq 0$ (ver la observación I.27). Como $\hat{\phi}$ es continua, podemos suponer que $\hat{\phi} \neq 0$ sobre W (restringiéndolo si es necesario). Ahora

$$\gamma(x) = \frac{\hat{\phi}_x(\gamma)}{\hat{\phi}(\gamma)},$$

que es cociente de funciones continuas.

2. Si $K \subset G$ y $C \subset \widehat{G}$ son compactos, entonces

$$N(K, r) = \{\gamma \in \widehat{G} :|\ \gamma(x) - 1\ |< r\ \forall x \in K\}$$

y

$$M(C, r) = \{x \in G :|\ \gamma(x) - 1\ |< r\ \forall \gamma \in C\}$$

son entornos abiertos del neutro en los respectivos grupos.

Tomemos $\gamma_0 \in N(K, r)$. Como la evaluación es continua, para todo $x_0 \in K$ existen entornos V_{x_0}, W^{x_0} de x_0 y γ_0 respectivamente, tales que

$$|\ \gamma(x) - 1\ |< r \qquad \forall x \in V_{x_0},\ \gamma \in W^{x_0}.$$

Consideremos el cubrimiento $K \subset \cup_{x_i \in K} V_{x_i}$. Por la compacidad de K, tenemos $K \subset V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Si $\gamma \in W^{x_1} \cap \cdots \cap W^{x_n}$ y $x \in K$, entonces $|\ \gamma(x) - 1\ |< r$. Hemos probado que para todo punto de $N(K, r)$ existe un abierto de $\widehat{G}$ (léase $\gamma \in W^{x_1} \cap \cdots \cap W^{x_n}$) contenido en $N(K, r)$, lo que prueba que este es abierto.

La otra demostración debería ser similar.

3. $N(K,r)$ es una base de entornos abiertos del neutro de $\widehat{G}$.

   Como la topologia en $\widehat{G}$ es la inicial respecto de $\{\hat{\phi} : \phi \in L^1(G)\}$ podemos conseguir un entorno básico del neutro de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left\{ \gamma : \mid \hat{\phi}_i(\gamma) - \hat{\phi}_i(0) \mid < \epsilon \right\}$$

   incluido en W. Podemos suponer $\phi_1, \cdots, \phi_n \in C_C(G)$ puesto que $C_C(G)$ es denso en $L^1(G)$ y $\hat{}$ es continua (ver I.35, más adelante).

   Sea $K = Sop\phi_1 \cup \cdots \cup Sop\phi_n$ y sea $0 < r < \frac{\epsilon}{\max \|\phi_i\|_1}$. Veamos que $N(K,r) \subset W$. Si $\gamma \in N(K,r)$, entonces

$$\begin{aligned} \mid \hat{\phi}_i(\gamma) - \hat{\phi}_i(0) \mid &= \mid \textstyle\int_G \overline{\gamma(x)} \phi_i(x) - \int_G \phi_i(x) d\mu_H(x) \mid \\ &\leq \textstyle\int_G \mid \phi_i(x) \mid\mid \overline{\gamma(x)} - 1 \mid d\mu_H(x) \\ &< r \textstyle\int_G \mid \phi_i(x) \mid d\mu_H(x) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Proposición I.31 *Los entornos $N(K,r) \in \widehat{G}$ de la proposición anterior tiene clausura compacta. En consecuencia $\widehat{G}$ es un grupo topológico localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN:

Por el teorema de Ascoli generalizado (ver [Munkres] [Ch 7,theorem 7.1]. □

Teorema I.32 *Si G es discreto, $\hat{G}$ es compacto. Si G es compacto, $\hat{G}$ es discreto.*

DEMOSTRACIÓN:

Si G es discreto, entonces $L^1(G)$ tiene unidad δ_e. Como G es abeliano, $L^1(G)$ es un álgebra de Banach abeliana con unidad. En consecuencia, $\hat{G} \simeq \chi_{L^1(G)}$ es compacto.

Si G es compacto, entonces para todo $\gamma \in \hat{G}$, resulta

$$\int_G \gamma(t) d\mu_H(t) = \begin{cases} 0 & \gamma \not\equiv 1 \\ 1 & \gamma \equiv 1 \end{cases}$$

puesto que si $\gamma(x_0) \neq 1$ entonces

$$\int_G \gamma(t) d\mu_H(t) = \int_G \gamma(t - t_0)\gamma(t_0) d\mu_H(t) = \gamma(t_0) \int_G \gamma(t) d\mu_H(t)$$

Con lo cual $\int_G \gamma(t) d\mu_H(t) = 0$.

Llamando 1 a función constante 1 –que pertenece a $L^1(G)$– se tiene que la aplicación $\hat{1} : \hat{G} \to \mathbb{C}$ es continua. Pero por la cuenta anterior

$$\hat{1}(\gamma) = \begin{cases} 0 & \gamma \not\equiv 1 \\ 1 & \gamma \equiv 1 \end{cases}$$

Ahora a $\hat{G}$ no le queda más remedio que ser discreto. □

Ejemplo 2 (Dual de $\mathbb{R}$) *Las funciones $x \mapsto e^{iax}$ con $a \in \mathbb{R}$ fijo, son elementos de $\hat{\mathbb{R}}$, y la aplicación $a \mapsto e^{iax}$ es un monomorfismo continuo de $\mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$, puesto que claramente $\mid e^{i(a_n - a)x} - 1 \mid \to_n 0$ uniformemente sobre compactos (en x). Por otra parte, la inversa $e^{iax} \mapsto a$ es continua puesto que si $\mid e^{i(a_n-a)x} - 1 \mid \to_n 0$ uniformemente sobre compactos en x, se tiene $xa_n - 2k_n\pi \to_n xa$, en particular para $K = \{0, 1\}$, con lo cual $k_n = 0$ para $n \geq n_0$ y además $a_n \to_n a$.*

Veamos que es suryectiva: para ello, tomemos $\chi \in \hat{\mathbb{R}}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\chi(10^{-n}) = e^{2\pi i a_n}$ con $-\frac{1}{2} < a_n \leq \frac{1}{2}$. Uno tiene que $lim_n a_n = 0$, y además que

$$10a_{n+1} - a_n$$

es un entero, ya que

$$\begin{aligned} 1 = \chi(0) &= \chi(10^{-n} - 10^{-n}) \\ &= \chi(10.10^{-(n+1)})\chi(10^{-n})^{-1} \\ &= \chi(10^{-(n+1)})^{10}\chi(10^{-n})^{-1} \\ &= \left(e^{2\pi i a_{n+1}}\right)^{10} e^{-2\pi i a_n} \\ &= e^{2\pi i (10a_{n+1} - a_n)}. \end{aligned}$$

Con esto, a partir de un $q \in \mathbb{N}$ dado, debe ser cero, y entonces $a_n = 10^{q-n}a_q$ para todo $n \geq q$, con lo cual

$$e^{2\pi i a_q 10^{q-n}} = e^{2\pi i a_n} = \chi(10^{-n}),$$

lo que prueba que, llamando $a = 2\pi 10^q a_q$, $\chi(x) = e^{iax}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por la densidad de los números de la forma $r10^{-n}$ y la continuidad de χ.

En consecuencia, se tiene $\hat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$.

Ejemplo 3 (Dual de S^1) *Existe una correspondencia biyectiva entre los caracteres de $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y los caracteres de $\mathbb{R}$ que se hacen 1 sobre $\mathbb{Z}$. Por el ejemplo anterior, estos son de la forma $e^{2\pi in}$, con $n \in \mathbb{Z}$. Es decir, $\hat{S^1} \simeq \mathbb{Z}$.*

Ejemplo 4 (Dual de $\mathbb{Z}$) *Como $\mathbb{Z}$ es un grupo libre generado por el 1, sólo hay que conocer el valor de cada caracter en éste. De allí $\chi(k) = \chi(1)^k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. La aplicación $\chi \mapsto \chi(1)$ es un isomorfismo topológico entre $\hat{\mathbb{Z}}$ y S^1. O sea que $\hat{\mathbb{Z}} \simeq S^1$.*

Ejemplo 5 (Dual de un producto finito de grupos) *El grupo dual del producto es isomorfo al producto de los grupos duales, cuya topología es exactamente la topología producto de los grupos. En resumen, $\widehat{G^1 \times \cdots \times G^n} \simeq \hat{G^1} \times \cdots \times \hat{G^n}$.*

Ejemplo 6 (Dual de un grupo cíclico finito) *Con un argumento similar al del ejemplo 3, se obtiene $\widehat{\mathbb{Z}_p} \simeq \mathbb{Z}_p$.*

Ejemplo 7 (Dual de un grupo abeliano finitamente generado) *Por el teorema de clasificación de estos grupos, se tiene*

$$G \simeq \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_n}$$

de donde se desprende (por los tres últimos ejemplos)

$$\hat{G} \simeq \left(S^1\right)^k \times \mathbb{Z}_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_n}.$$

En particular, para un grupo finito G, se tiene $\hat{G} \simeq G$.

Ejemplo 8 *Sea $G = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Entonces las aplicaciones $(t \mapsto e^{i\lambda\, ln(t)})$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ son caracteres de G, ya que*

$$st \mapsto e^{i\lambda\, ln(s.t)} = e^{i\lambda\, [ln(s)+ln(t)]} = e^{i\lambda\, ln(s)} e^{i\lambda\, ln(t)}.$$

La continuidad es obvia. Veamos ahora que todo caracter $\chi \in \widehat{G}$ es de esta forma. Tomemos $\chi_0(x) = \chi(e^x)$ entonces $\chi_0 \in \hat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$. Por ende, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\chi_0(x) = e^{aix} = e^{xai}$. Esto nos dice que $\chi(s) = s^{ai} = e^{ia\, ln(s)}$ para todo $s \in G$. En conclusión, $\widehat{G} \simeq \mathbb{R}$. Nótese que esto es consecuencia directa de que la aplicación $(x \mapsto e^x)$ es un isomorfismo topoloǵico entre $(\mathbb{R}, +)$ y G.

Ejemplo 9 *Sea $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Entonces $G \simeq (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \times S^1$, y por ende $\widehat{G} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Los caracteres del plano bujereado son entonces de la pinta*

$$z \mapsto e^{ia\, ln|z|}.\frac{z}{\mid z \mid} = e^{(ia-n)\, ln|z|}.z^n$$

Ejemplo 10 *Sea $G = (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$. Entonces la aplicación*

$$(\lambda, [k]) \mapsto (-1)^k e^\lambda$$

es un isomorfismo topológico entre G y $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$, y por ende $\widehat{G} \simeq G$.

I.5 Análisis armónico conmutativo

Definición I.33 *Sea G un grupo abeliano. Dada $\phi \in L^1(G)$, la aplicación $\phi \mapsto \hat{\phi}$ definida mediante la ecuación (I.1)*

$$\hat{\phi}(\gamma) = \int_G \phi(x)\overline{\gamma(x)} d\mu_H(x)$$

se denomina **transformada de Fourier***, y la denotaremos indistintamente con $\mathcal{F}$. Evidentemente $\hat{\phi} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$. Por la proposición I.1, se tiene que $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.*

Observación I.34 *Mediante el isomorfimo entre $\widehat{G}$ y $\chi_{L^1(G)}$, podemos reinterpretar la transformada de Fourier como una transformación acotada de $L^1(G)$ en $C_0(\chi_{L^1(G)})$. Esta transformación no es otra que la transformada de Gelfand del álgebra de Banach $L^1(G)$.*

Proposición I.35 *Para toda ϕ en $L^1(G)$, $\hat{\phi}$ es una función continua que tiende a cero en inifinito sobre $\widehat{G}$, es decir, $\mathcal{F} : L^1(G) \to C_0(\widehat{G})$. Además, $\|\hat{\phi}\|_\infty \leq \|\phi\|_1$, es decir, $\mathcal{F}$ es un operador lineal acotado.*

Demostración:

Por la misma definición de la topología en el dual, $\hat{\phi}$ es una función continua. Por otra parte

$$\begin{aligned} \|\hat{\phi}\|_\infty &= \sup_{t\in\widehat{G}} \mid \hat{\phi}(t) \mid \\ &= \sup_{t\in\widehat{G}} \mid \textstyle\int_G \overline{t(x)}\phi(x) d\mu_H(x) \mid \\ &\leq \textstyle\int_G \mid \phi(x) \mid d\mu_H(x). \end{aligned}$$

Vamos a probar que la función $\hat{\phi}(\gamma) = \int_g \gamma(x)\phi(x) d\mu_H(x)$ tiende a cero cuando $\gamma \to \infty$.

Sea $\epsilon > 0$. Podemos hallar $K \subset G$ compacto tal que $\|\phi - \phi_s\|_1 < \epsilon$ cuando $s \in K$. Ahora consideremos el abierto $N(K, 2-\epsilon) \subset \widehat{G}$. Si $\gamma \notin N(K, 2-\epsilon)$ podemos encontrar $x_\gamma \in K$ tal que $| \gamma(x_\gamma) - 1 | \geq 2 - \epsilon$. Tenemos ahora que

$$\begin{aligned}
2 \mid \hat{\phi}(\gamma) \mid &= 2 \mid \int_G \overline{\gamma(x)} \phi(x) d\mu_H(x) \mid \\
&= \mid \int_G \overline{\gamma(x)} \phi(x) d\mu_H(x) + \int_G \overline{\gamma(x)\gamma(x_\gamma)} \phi(x + x_\gamma) d\mu_H(x) \mid \\
&= \mid \int_G \overline{\gamma(x)} \left(\phi(x) + \overline{\gamma(x_\gamma)} \phi(x + x_\gamma) \right) d\mu_H(x) \mid \\
&= \mid \int_G \phi(x) - \phi(x + x_\gamma) d\mu_H(x) + \int_G (1 + \overline{\gamma(x_\gamma)}) \phi(x + x_\gamma)) \mid \\
&\leq \|\phi - \phi_{x_\gamma}\|_1 + \|\phi\|_1 \mid 1 + \overline{\gamma(x_\gamma)} \mid
\end{aligned}$$

Por la figura, resulta que llamando

$$x = \mid \gamma(x_\gamma) - (-1) \mid = \mid 1 + \gamma(x_\gamma) \mid = \mid 1 + \overline{\gamma(x_\gamma)} \mid$$

e $y = \mid \gamma(x_\gamma) - 1 \mid$ se tiene que $x^2 = 4 - y^2$ con lo cual $x \leq \epsilon(4 - \epsilon)$ cada vez que $y \geq 2 - \epsilon$ y en consecuencia

$$\mid \hat{\phi}(\gamma) \mid \leq \frac{1}{2} \|\phi - \phi_{x_\gamma}\|_1 + \frac{1}{2} \|\phi\|_1 \mid 1 + \overline{\gamma(x_\gamma)} \mid < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon(4 - \epsilon). \ \square$$

El triángulo inscripto es rectángulo porque uno de sus lados es un diámetro

I.6 Funciones de tipo positivo, teoremas de Bochner, Plancherel y Pontrjagin

El conjunto de funcionales positivas de $C^*(G)$ es igual al conjunto de funcionales positivas de $L^1(G)$, ya que este es un denso y tiene una unidad aproximada. Este conjunto son las $p(f)$ definidas en $L^1(G)$ que verifican $p(f * f^*) \geq 0$ para toda $f \in L^1(G)$. Por ser p una funcional continua en $L^1(G)$, existe una $F_p \in L^\infty(G)$ tal que

$$p(f) = \int_G f(x)F_p(x)d\mu_H(x).$$

La condición de positividad toma entonces la forma

$$\int_G F_p(x) \int_G f(x-t)\overline{f(-t)}d\mu_H(t)d\mu_H(x) \geq 0,$$

o sea

$$\int_G \int_G F_p(x-t)f(x)\overline{f(t)}d\mu_H(x)d\mu_H(t) \geq 0. \tag{I.2}$$

Definición I.36 *Una función $F \in L^\infty(G)$ que verifica (I.2) se llama* **definida positiva** *(o de* **tipo positivo***).*

Al conjunto de todas las funciones de tipo positivo en $L^\infty(G)$ lo denotaremos $P(G)$.

Observación I.37 *Por Gelfand y el Teorema de Riesz-Markov, si p es un estado de $L^1(G)$, se tiene*

$$p(f) = \int_{\widehat{G}\simeq\chi_{L^1(G)}} \hat{f}(\gamma)d\mu_p(\gamma)$$

para toda $f \in L^1(G)$, donde μ_p es la medida que representa a p.

Además,

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G \overline{\gamma(x)}f(x)d\mu_H(x)$$

luego

$$p(f) = \int_G f(x)\{\int_{\widehat{G}} \overline{\gamma(x)}d\mu_p(\gamma)\}d\mu_H(x).$$

De aquí se desprende que $F_p(x) = \int_{\widehat{G}} \overline{\gamma(x)}d\mu_p(\gamma)$ pp

Por la observación anterior a toda función de tipo positivo $F \in L^1(G)$ le corresponde una medida de Borel positiva $\mu_F \in \widehat{G}$ tal que

$$F(x) = \int_{\widehat{G}} \overline{\tilde{x}(\gamma)}d\mu_F(\gamma)$$

de manera tal que $\mu_F(\widehat{G}) = F(e)$. Veamos la recíproca.

Teorema I.38 (Bochner-Raikov-Weil) *Toda función p definida a partir de una medida finita y positiva como arriba es una función de tipo positivo.*

DEMOSTRACIÓN:

Como la masa total de μ es finita y $\mid \tilde{x}(\gamma) \mid= 1$ resulta que p está acotada. Veamos ahora que p es continua. Dado $\epsilon > 0$ sea U un entorno compacto de e en G, supongamos que $x - y \in U$. Dado K un compacto cualquiera en $\widehat{G}$, la familia $N(U, \epsilon/3) + \gamma$ con $\gamma \in K$ es un cubrimiento por abierto de K. Por ende, extrayendo un subcubrimiento finito $N(U, \epsilon/3) + \gamma_i$ se tiene

$$\begin{aligned} \mid \gamma(x) - \gamma(y) \mid &\leq \mid \gamma(x) - \gamma_i(x) \mid + \mid \gamma_i(x) - \gamma_i(y) \mid + \mid \gamma_i(y) - \gamma(y) \mid \\ &< \epsilon/3 + \mid \gamma_i(x) - \gamma_i(y) \mid + \epsilon/3 \end{aligned}$$

para todo $\gamma \in K$ y como la familia γ_i es finita podemos elegir $V \subset U$ en G de manera que $\mid \gamma_i(x) - \gamma_i(y) \mid< \epsilon/3$ con lo cual $\mid \gamma(x) - \gamma(y) \mid< \epsilon$ para todo $\gamma \in K$. Eligiendo K para que $\mu(\widehat{G} \setminus K) < \epsilon$,

$$\begin{aligned} \mid p(x) - p(y) \mid &\leq \int_K \mid \gamma(x) - \gamma(y) \mid d\mu(\gamma) + \int_{\widehat{G}\setminus K} \mid \gamma(x) - \gamma(y) \mid d\mu(\gamma) \\ &\leq \epsilon\mu(G) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Además, el representante continuo de p cumple que

$$\sum_{i,j=1}^{n} p(x_i - x_j)a_i\overline{a_j} \geq 0 \tag{I.3}$$

para todo $x_1, \cdots, x_n \in G$, $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$. El lema a continuación nos asegurará que esta condición es equivalente a que p sea definida positiva. Veamos entonces (I.3). Para ello, probemos primero que la condición se cumple para $\gamma \in \widehat{G}$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \gamma(x_i - x_j)a_i\overline{a_j} &= \textstyle\sum i, j = 1^n \gamma(x_i)\overline{\gamma(x_j)}a_i\overline{a_j} \\ &= \mid \textstyle\sum_i \gamma(x_i)a_i \mid^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Utilizando esto, veamos la condición de positividad:

$$\sum_{i,j=1}^{n} p(x_i - x_j)a_i\overline{a_j} = \int_{\widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{n} \gamma(x_i - x_j)a_i\overline{a_j}d\mu(\gamma) \geq 0.\square$$

Lema I.39 *La condición de positividad (I.2) es equivalente a la siguiente: dados cualesquiera $x_1, \cdots, x_n \in G$, $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$, se verifica*

$$\sum_{i,j=1}^{n} p(x_i - x_j) a_i \overline{a_j} \geq 0 \tag{I.4}$$

si p es un representante continuo. Esta es la definición clásica de función de tipo positivo.

DEMOSTRACIÓN:

La ecuación anterior demuestra que

$$\int_G \int_G F_p(x-t) f(x) \overline{f(t)} d\mu(x) d\mu(t) \geq 0.$$

si μ es una medida de soporte finito. Como la medida de Haar puede ser aproximada por este tipo de medidas, se deduce la hipótesis.

Ahora sea f_λ una aproximación de la identidad para G, y consideremos la familia $g_\lambda(x) = \sum_i f_\lambda(x - x_i) a_i$. Entonces

$$\sum_{i,j=1}^{n} p(x_i - x_j) a_i \overline{a_j} = \lim_{\lambda} \int_G \int_G p(x-t) g_\lambda(x) \overline{g_\lambda(t)} d\mu_H(x) d\mu_H(t) \geq 0. \square$$

Observación I.40 *La condición de positividad anterior puede interpretarse como que la matriz $p(x_i - x_j)_{ij}$ es definida positiva para cualquier elección de $x_1, \cdots, x_n \in G$.*

Las propiedades conocidas de matrices definidas positivas implican que $p(e) \geq 0$, $p(x) \leq p(e)$ y $p(-x) = \overline{p(x)}$

Una manera de obtener funciones de tipo positivo es la siguiente:

Lema I.41 *Si f es continua y de soporte compacto, entonces $f * f^*$ es continua, de soporte compacto y definida positiva.*

DEMOSTRACIÓN:

Como f resulta uniformemente continua, la continuidad de la convolución es inmediata. La afirmación concerniente al soporte es evidente. Lo único que hay que probar es la positividad: veamos que $p(x) = \int_G f(x-t)\overline{f(-t)}d\mu_H(t)$ verifica (I.4).

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n p(x_i - x_j)a_i\overline{a_j} &= \sum_{i,j=1}^n \int_G f(x_i - x_j - t)\overline{f(-t)}d\mu_H(t)a_i\overline{a_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_G f(x_i - t)\overline{f(x_j - t)}a_i\overline{a_j}d\mu_H(t) \\
&= \int_G \mid f(x_i - t)a_i \mid^2 d\mu_H(t) \\
&\geq 0. \square
\end{aligned}$$

Observación I.42 *Supongamos que f_V es continua y nula fuera de un entorno V simétrico de e, $f = f^*$, $f \geq 0$ y $\int_G f = 1$. Es decir, supongamos que f_V es una unidad aproximada: entonces $f * f$ se anula fuera de $V + V$, $f * f \geq 0$, $\int_G f * f = 1$.*

En conclusión, podemos conseguirnos una unidad aproximada continua, de soporte compacto, definida positiva y simétrica.

Lema I.43 *Sean $p, q \in P(G) \cap L^1(G)$, y μ_p y μ_q las medidas que las representan (por el teorema de Bochner). Entonces*

$$\hat{p}d\mu_q = \hat{q}d\mu_p$$

Demostración:

Tomando F cualquiera en $C_c(\widehat{G})$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int \widehat{G}F(\gamma)\hat{p}(\gamma)d\mu_q(\gamma) &= \int_{\widehat{G}} F(\gamma) \int_G p(x)\overline{\gamma(x)}d\mu_H(x)d\mu_q(\gamma) \\
&= \int_{\widehat{G}} F(\gamma) \int_G \int_{\widehat{G}} \overline{\psi(x)}d\mu_p d\mu_\psi \overline{\gamma(x)}d\mu_H(x)d\mu_q(\gamma) \\
&= \int_G \int_{\widehat{G}} \int_{\widehat{G}} F(\gamma)\overline{\psi(x)\gamma(x)}d\mu_p(\psi)d\mu_q(\gamma)
\end{aligned}$$

y esta última expresión es simétrica respecto de p y q, lo que prueba la afirmación.

Lema I.44 *Dados $\epsilon > 0$ y $K \subset \widehat{G}$ compacto, existe $p_V \in P(G) \cap L^1(G)$ tal que*

$$\mid \hat{p}(\gamma) - 1 \mid < \epsilon$$

para toda $\gamma \in K$.

Luego existe una red $p_V \in P(G) \cap L^1(G)$ tal que la red $\hat{p_V}$ converge a 1 uniformemente sobre todo compacto de $\widehat{G}$.

Demostración:

Para todo $\gamma \in \widehat{G}$ existe un entorno V simétrico de e tal que $x \in V$ implica $\mid \tilde{x}(\gamma) - 1 \mid = \mid \gamma(x) - \gamma(e) \mid < \epsilon$, y se puede elegir el mismo V para todos los γ del compacto K. Si $p_V(x)$ es una unidad aproximada con soporte en V, $\int_G p_V = 1$, $p_v \in P(G) \cap L^1(G)$ y $p_V = p_V^*$, entonces para todo $\gamma \in K$ y $x \in V$ tendremos $\mid \gamma(x) - 1 \mid < \epsilon$, y entonces

$$\begin{aligned}
\mid \hat{p_V}(\gamma) - 1 \mid &= \mid \textstyle\int_G p_V(x)\gamma(x) d\mu_H(x) - 1 \mid \\
&= \mid \textstyle\int_G p_V(x)\gamma(x) d\mu_H(x) - \int_G p_V(x) d\mu_H(x) \mid \\
&\leq \textstyle\int_G \mid \gamma(x) - 1 \mid p_V(x) d\mu_H(x) \\
&\leq \textstyle\int_V \mid \gamma(x) - 1 \mid p_V(x) d\mu_H(x) \\
&\leq \epsilon. \ \square
\end{aligned}$$

Teorema I.45 *Si p_V es una red como en el lema anterior, entonces:*

1. *Para toda función $\phi \in C(\widehat{G})$ de soporte compacto, la red*

$$I_V(\phi) = \int_{\widehat{G}} \phi(\gamma) d\mu_{p_V}$$

donde μ_{p_V} es la medida positiva que representa a p_V, converge a un límite $I(\phi)$ independientemente de la elección de p_V.

2. *$I(\phi)$ es la integral de Haar de $\widehat{G}$, es decir,*

$$I(\phi) = \int_{\widehat{G}} \phi(\gamma) d\mu_H(\gamma)$$

donde μ_H es una medida de Haar para $\widehat{G}$.

Demostración:

1. Dada $\phi \in C_c(\widehat{G})$, existe $K \in \widehat{G}$ fuera del cual $\phi(\gamma)$ se anula. Para todo $V \supset V_0$, las funciones p_V van a verificar $\mid \hat{p}_V(\gamma) - 1 \mid < \epsilon$ para todo $\gamma \in K$. Dados K y ϵ, tomemos p_{V_i} $(i = 1, 2, 3)$ fijos en la red, con $V_i \supset V_0$. Probaremos ahora que

$$\mid I_{p_{V_1}}(\phi) - I_{p_{V_2}}(\phi) \mid < M\epsilon$$

donde $M = M(\phi)$ es una constante. Esto probará la primer afirmación.

Como $\phi(\gamma)$ se anula fuera de K, y como $\hat{p}_{V_i}$ son idénticamente uno en K, tenemos que

$$| \phi(\gamma) - \phi(\gamma)\hat{p}_{V_i}(\gamma) | \leq \epsilon \mid \phi(\gamma)\hat{p}_{V_3}(\gamma) \qquad i = 1, 2$$

Por otra parte, por el Lema I.43, se tiene que $I_{p_{V_1}}(\phi\hat{p}_{V_2}) = I_{p_{V_2}}(\phi\hat{p}_{V_1})$.

$$\begin{aligned} | I_{p_{V_1}}(\phi) - I_{p_{V_2}}(\phi) | &= | \textstyle\int_{\widehat{G}} \phi d\mu_{p_{V_1}} - \int_{\widehat{G}} \phi d\mu_{p_{V_2}} - \{\int_{\widehat{G}} \phi\hat{p}_{V_2} d\mu_{p_{V_1}} - \int_{\widehat{G}} \phi\hat{p}_{V_1} d\mu_{p_{V_2}}\} | \\ &\leq \textstyle\int_{\widehat{G}} | \phi - \phi\hat{p}_{V_2} | d\mu_{p_{V_1}} + \int_{\widehat{G}} | \phi - \phi\hat{p}_{V_1} | d\mu_{p_{V_2}} \\ &\leq \epsilon\{\textstyle\int_{\widehat{G}} | \phi\hat{p}_{V_3} | d\mu_{p_{V_1}} + \int_{\widehat{G}} | \phi\hat{p}_{V_3} | d\mu_{p_{V_2}}\} \\ &\leq \epsilon\{\textstyle\int_{\widehat{G}} | \phi\hat{p}_{V_1} | d\mu_{p_{V_3}} + \int_{\widehat{G}} | \phi\hat{p}_{V_2} | d\mu_{p_{V_3}}\} \\ &\leq \epsilon \max\{\|\hat{p}_{V_1}\|_\infty, \|\hat{p}_{V_2}\|_\infty\} I_{p_{V_3}}(| \phi |). \end{aligned}$$

2. Veamos ahora la segunda. Entonces I es límite débil de I_{p_V} independientemente de la elección de p. Como cada I_{p_V} es una funcional lineal positiva de $C_c(\widehat{G})$, el límite también lo es. Es decir, define una medida de Borel regular. Sólo falta ver que I es invariante por traslaciones, es decir, que $I(\phi_\psi) = I(\phi)$ (donde $\phi_\psi(\gamma) = \phi(-\psi + \gamma)$. Dado p, si llamamos $p_1(x) = p(x)\psi(x)$, entonces

$$\begin{aligned} I_p(\phi_\psi) = \textstyle\int_{\widehat{G}} \phi_\psi(\gamma) d\mu_p(\gamma) &= \textstyle\int_{\widehat{G}} \phi(\gamma - \psi) d\mu_p(\gamma) \\ &= \textstyle\int_{\widehat{G}} \phi(\gamma) d\mu_p(\gamma + \psi) \\ &= \textstyle\int_{\widehat{G}} \phi(\gamma) d\mu_{p_1}(\gamma) \\ &= I_{p_1}(\phi) \end{aligned}$$

Luego, $I_p(\phi_\psi) = I_{p_1}(\phi)$. Pero p_1 está en las condiciones de p, y por ende, $I_{p_{1V}}$ converge al mismo límite que I_{p_V}. □

Teorema I.46 (teorema de inversión de Fourier) *Es posible elegir una medida de Haar μ_H de $\widehat{G}$ (es decir, elegir el factor constante) de modo que para toda función $f \in L^1(G) \cap P(G)$ se verifique:*

$$\hat{f}(\gamma) d\mu_H = d\mu_f.$$

Luego,

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \tilde{x}(\gamma) \hat{f}(\gamma) d\mu_H(\gamma).$$

DEMOSTRACIÓN:

La igualdad (teniendo en cuenta que $\hat{p}_V$ tiende uniformemente sobre todo compacto a 1 en $\widehat{G}$)

$$\int_{\widehat{G}} \phi\hat{\phi}d\mu_{_H} = \lim_V \int_{\widehat{G}} \phi\hat{\phi}d\mu_{p_V} = \lim_V \int_{\widehat{G}} \phi\hat{p}_V d\mu_f = \int_{\widehat{G}} \phi d\mu_f$$

prueba la primera afirmación del teorema, donde hemos elegido $\mu_{_H}$ en $\widehat{G}$ de manera que coincida con I del teorema previo.

Usando esto y el teorema de Bochner (Teorema I.38), tenemos

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \overline{\gamma(x)} d\mu_f(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \overline{\gamma(x)} \hat{\phi}(\gamma) d\mu_{_H}(\gamma). \quad \square$$

Definición I.47 *Recordemos que $P(G)$ es el conjunto de todas las funciones de tipo positivo. Evidentemente, este no es un espacio vectorial, aunque las combinaciones lineales positivas de funciones de tipo positivo están en $P(G)$. Denotaremos con $V(G)$ al subespacio generado por $P(G)$. Claramente toda $f \in V(G)$ se escribe como*

$$f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$$

donde $f_{i^1} \in P(G)$.

Observación I.48 *Evidentemente el teorema de inversión de Fourier se extiende a $L^1(G) \cap V(G)$. Por otra parte la identidad*

$$4f*h = (f+h)*(f+h)^* - (f-h)*(f-h)^* + i(f+ih)*(f+ih)^* - i(f-ih)*(f-ih)^*$$

nos dice que $C_c(G) * C_c(G) \subset V(G) \cap C_c(G)$. Como el primero es denso en $C_c(G)$, resulta $V(G) \cap C_c(G)$ denso en $C_c(G)$.

Observación I.49 *Si p_V es una aproximación de la identidad de tipo positiva, continua y de soporte compacto (como en la observación I.42) y $f \in V(G)$ tiene soporte compacto, entonces $p_V * f \in V(G) \cap C_c(G) * V(G) \cap C_c(G)$. Además $p_V * f \to_V f$. Por lo tanto, $V(G) \cap C_c(G) * V(G) \cap C_c(G)$ es denso en $V(G) \cap C_c(G)$, y por la observación anterior, denso en $C_c(G)$.*

Teorema I.50 (Plancherel) *Existe un único isomorfismo isométrico U entre $L^2(G)$ y $L^2(\widehat{G})$ tal que, para $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$, se verifica $\hat{g} = Ug$.*

Es decir, U extiende a la transformada de Fourier usual.

Demostración:

Veamos primero que si $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$, entonces $\mathcal{F}g \in L^2(\widehat{G})$, y además $\|\hat{g}\|_2 = \|g\|_2$, es decir, $\mathcal{F}$ es isométrico.

Supongamos primero que $g \in C_c(G)$. Pongamos $f = g * g^*$; entonces $f \in P(G)$. Por el teorema de inversión para $f(x)$, se tiene

$$f(0) = \int_{\widehat{G}} \hat{f}(\gamma) d\mu_H(\gamma),$$

pero entonces

$$\hat{f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)} = | \hat{g}(\gamma) |^2 .$$

Por lo tanto, $| \hat{g} |^2 = \hat{f} \in L^1(\widehat{G})$. O sea que $\hat{g} \in L^2(\widehat{G})$. Además,

$$\int_{\widehat{G}} | \hat{g} |^2 = \int_{\widehat{G}} \hat{f} = f(0) = g * g^*(0) = \int_G | g |^2 .$$

Por densidad, hemos probado el resultado para g en las condiciones de la hipótesis.

Ahora, como $L^1(G) \cap L^2(G)$ es denso en $L^2(G)$, extendemos $\mathcal{F}$ a un operador $U : L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$, en forma isométrica. Resta probar que este operador es un epimorfismo, para concluir que se trata de un isomorfismo isométrico entre ambos espacios de Hilbert, y por ende, un operador unitario.

Como U es isométrico, su rango es cerrado: probaremos que es denso viendo que su imagen cubre $C_c(\widehat{G}) \cap V(G) * C_c(\widehat{G}) \cap V(G)$. Por la observación I.49, este es denso en $C_c(G)$. En consecuencia el rango es denso en $L^2(G)$.

Sea $F_3 = F_1 * F_2$ con $F_1, F_2 \in C_c(\widehat{G}) \cap V(\widehat{G})$. Por la observación I.48, $F_3 \in C_c(\widehat{G}) \cap V(\widehat{G})$. Tomemos $f_i = \int_{\widehat{G}} F_i(\gamma)\gamma(x) d\mu_H(\gamma) \quad i = 1, 2, 3$. Entonces f_i está en $V(G)$: veamos que están en $L^2(G)$. Sea $g \in C_c(G)$,

$$\begin{aligned} | \textstyle\int_G g(x) f(x) d\mu_H(x) | &= | \textstyle\int_G g(x) \int_{\widehat{G}} F(\gamma)\gamma(x) d\mu_H(\gamma) d\mu_H(x) | \\ &= | \textstyle\int_{\widehat{G}} F(\gamma) \int_G g(x)\gamma(x) d\mu_H(x) d\mu_H(\gamma) | \\ &= | \textstyle\int_G F(\gamma)\hat{g}(\gamma) d\mu_H(\gamma) | \\ &\leq \|F\|_2 \|\hat{g}\|_2 = \|F\|_2 \|g\|_2 \end{aligned}$$

Esto nos dice que $\|f\|_2 = \sup_{g \in B_{L^2(G)}} |< f, g >| = sup_{g \in C_c(G) \cap B_{L^2(G)}} |< f, g >| \leq \|F\|_2$ por la desigualdad de arriba. Ahora, aplicando el teorema de inversión de Fourier, y se tiene $F_i = \hat{f}_i$; en particular, $F_3 = \hat{f}_3$. Sólo resta ver que $f_3 \in L^1(G)$. Pero $f_3 = f_1 f_2$, y por Hölder, $\|f_3\|_1 \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2$. $\square$

Observación I.51 *Si G es un GLCC entonces la aplicación $\tilde{}: G \to \widehat{\widehat{G}}, (x \mapsto \tilde{x})$ definida por*

$$\tilde{x}(\gamma) = \gamma(x)$$

para $\gamma \in \widehat{G}$ es un monomorfismo continuo.

Teorema I.52 (Teorema de dualidad de Pontrjagin) *La correspondencia $x \mapsto \tilde{x}$ de la observación anterior es un isomorfismo topológico entre G y $\widehat{\widehat{G}}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Veamos primero que la inversa es continua en su rango. Supongamos que $\tilde{x}_\alpha \to_\alpha \tilde{x}$ en $\widehat{\widehat{G}}$. Esto nos dice (por la definicion de la topología de $\widehat{\widehat{G}}$) que $\hat{f}(\tilde{x}_\alpha) \to \hat{f}(\tilde{x})$ para toda f en $L^1(\widehat{G})$. Esto es

$$\int_{\widehat{G}} \tilde{x}_\alpha(\gamma) f(\gamma) d\gamma \to_\alpha \int_{\widehat{G}} \tilde{x}(\gamma) f(\gamma) d\gamma,$$

esto es,

$$\int_{\widehat{G}} \gamma(x_\alpha) f(\gamma) d\gamma \to_\alpha \int_{\widehat{G}} \gamma(x) f(\gamma) d\gamma$$

para toda $f \in L^1(\widehat{G})$. Ahora como las imagenes de transformadas vía $\hat{}$ de funciones de $L^1(G)$ son densas por Stone-Weierstrass en $C_0(\widehat{G})$, y éste último espacio es denso en $L^1(\widehat{G})$, podemos reescribir la última ecuación como

$$\int_{\widehat{G}} \gamma(x_\alpha) \hat{F}(\gamma) d\gamma \to_\alpha \int_{\widehat{G}} \gamma(x) \hat{F}(\gamma) d\gamma,$$

donde γ es una medida de Haar para $\widehat{G}$. En particular, si tomamos F de tipo positivo, se tiene que

$$F(x_\alpha) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x_\alpha) \hat{F}(\gamma) d\gamma \to_\alpha \int_{\widehat{G}} \gamma(x) \hat{F}(\gamma) d\gamma = F(x),$$

por el corolario (Teorema I.46) al teorema de Bochner (Teorema I.38). Esto último es equivalente, por la densidad de las funciones de tipo positivo, a que

$$g(x_\alpha) \to_\alpha g(x)$$

para toda $g \in C_0(G)$, y por ende, $x_\alpha \to_\alpha x$ en G.

Para ver que la aplicación $\tilde{}$ es sobreyectiva, basta probar que si $F \in L^1(\widehat{\widehat{G}})$ se anula sobre la imagen de esta aplicación, entonces $F = 0$ *pp*. Por las mismas consideraciones que en el parágrafo anterior, basta probarlo para $F = \hat{\phi}$ con $f \in L^1(\widehat{G})$ y de tipo positivo. Si $\hat{\phi}(\tilde{x}) = 0$ para todo $x \in G$, se tiene

$$\hat{\phi}(\tilde{x}) = \int_{\widehat{G}} \tilde{x}(\gamma)\phi(\gamma)d\gamma = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\phi(\gamma)d\gamma = 0.$$

Como $g \equiv 0$ es integrable, invirtiendo $\mathcal{F}$ (Teorema I.46) se tiene

$$\phi(x) = \int_G \gamma(x)g(x)dx = 0,$$

y por ende también $F = \hat{\phi} = 0$. □

I.7 Más representaciones

Proposición I.53 *Si G es un grupo abeliano, entonces $C^*(G) \simeq C_0(\hat{G})$ como álgebras C^*.*

DEMOSTRACIÓN:

Probaremos primero que $\chi_{C^*(G)}$ y $\chi_{L^1(G)}$ son homeomorfos. Dado $h \in \chi_{C^*(G)}$, su restricción a $L^1(G)$ es claramente un caracter de $L^1(G)$. Además, la operación de restringir es continua. Por otra parte un caracter en L^1 es una representación irreducible de $L^1(G)$ que se extiende (por la observación I.22) a una representación irreducible de $C^*(G)$. Esta aplicación es evidentemente la inversa de la otra. Su continuidad se deduce de la densidad de $L^1(G)$ en $C^*(G)$ con un argumento de tipo $\epsilon/2$.

Por el teorema de Gelfand-Neimark conmutativo y la Proposición I.29, resulta

$$C^*(G) \simeq C_0(\chi_{C^*(G)}) \simeq C_0(\chi_{L^1(G)}) \simeq C_0(\hat{G}). \ \square$$

Antes de la conclusión, un lema:

Lema I.54 *Si $f \in C_0(G)$, entonces el operador de multiplicación definido por*

$$M_f g = fg$$

para $g \in L^2(G)$ es un operador lineal acotado, y además

$$\|M_f\|_{B(L^2(G))} = \|f\|_\infty.$$

Demostración:

En primer lugar, se tiene

$$\begin{aligned}\|M_f g\|_2^2 &= \textstyle\int_G \mid fg \mid^2 d\mu_H \\ &\leq \|f\|_\infty^2 \textstyle\int_G \mid g \mid^2 d\mu_H \\ &= \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2.\end{aligned}$$

Para ver que la norma es igual, tomemos para cada $\epsilon > 0$ el abierto de clausura compacta

$$U_\epsilon = \{x \in G :\mid f(x) \mid > \|f\|_\infty - \epsilon\}.$$

Ahora consideremos la función $g = \frac{1}{\sqrt{\mu_H(U_\epsilon)}}\chi_{U_\epsilon}$. Evidentemente, $\|g\|_2 = 1$. Pero por otra parte,

$$\begin{aligned}\|M_f g\|_2^2 &= \textstyle\int_G \mid fg \mid^2 d\mu_H \\ &= \tfrac{1}{\mu_H(U_\epsilon)} \textstyle\int_{U_\epsilon} \mid f \mid^2 d\mu_H \\ &\geq (\|f\|_\infty - \epsilon)^2 . \square\end{aligned}$$

Teorema I.55 *Si G es un grupo abeliano, entonces*

$$C_r^*(G) \simeq C^*(G) \simeq C_0(\hat{G}).$$

Demostración:

El segundo isomorfismo es el de la proposición anterior, veamos el primero. Como ambos espacios son las completaciones de $L^1(G)$ con respecto a dos normas distintas, basta probar que en este caso las normas coinciden sobre $L^1(G)$.

Por la proposición I.35, se tiene la inclusión

$$\widehat{L^1(G)} \subset C_0(\widehat{G}).$$

Por Stone-Weierstrass, la inclusión es densa.

Por otra parte, la transformación de Fourier $\mathcal{F}$ se extiende a un operador isométrico U de $L^2(G)$ en $L^2(\widehat{G})$ (ver el Teorema I.50). La representación regular a izquierda λ de $L^1(G)$ en $B(L^2(G))$ (obviando el la tilde) puede ser reinterpratada en $B(L^2(\widehat{G}))$ conjungando por U:

$$U\lambda(f)U^*\hat{g} = U\lambda(f)g = \mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g} = M_{\hat{f}}\hat{g}$$

para toda f en $L^1(G)$ y toda g en $L^1(G) \cap L^2(G)$. De aquí se deduce que

$$\|\lambda(f)\|_{B(L^2(G))} = \|M_{\hat{f}}\|_{B(L^2(G))} = \|\hat{f}\|_\infty,$$

la última desigualdad por el lema anterior.

Podemos definir entonces un operador $\theta : \lambda(L^1(G)) \to C_0(\widehat{G})$ como $\theta = \mathcal{F} \circ \lambda^{-1}$. Observemos que θ es una isometría por el párrafo anterior. Como la imagen de θ es $\widehat{L^1(G)}$, se tiene que la imagen de θ es un subespacio denso de $C_0(\widehat{G})$. En consecuencia, ambas clausuras —$C_r^*(G)$ y $C_0(\widehat{G})$— son isométricamente isomorfas. $\square$

Aún teniendo la propiedad universal, la representación $C^*(G)$ de $L^1(G)$ es difícil de manejar, ya que su definición es muy abstracta e implica tener en cuenta muchas representaciones de G. El resultado anterior para grupos abelianos reduce drásticamente el problema, y es por eso que la igualdad entre $C^*(G)$ y $C_r^*(G)$ es un resultado muy deseable para G. Hay una clase de grupos, los grupos amenables, que tienen esta propiedad y dedicaremos el resto del capítulo a este tema.

I.8 Grupos Amenables

Definición I.56 *Un* **promedio** m *en un grupo localmente compacto Hausdorff G es un estado invariante a izquierda de $L^\infty(G)$. Esto es, una funcional lineal acotada y positiva tal que $\mathsf{m}(g_s) = \mathsf{m}(g)$ para toda $g \in L^\infty(G)$.*

Definición I.57 *Un grupo G se dice* **amenable** *o* **promediable** *si existe un promedio en G.*

Ejemplo 11 *Si G es compacto, entonces es amenable, ya que un promedio m esta dado por la integración contra la medida de Haar del grupo, es decir*

$$\mathsf{m}(g) = \int_G g d\mu_H.$$

Ejemplo 12 *El grupo libre de dos generadores es el prototipo de grupo no amenable. Este grupo (que denotaremos con $\mathbb{F}_2$) es el conjunto de todas las palabras finitas en a y b, por ejemplo: aba, $a^2b^3a^{-1}$, $a^{-1}b$, 1.*

Para ver que no es amenable, sea $\mathcal{A}_0 = \{a^{2k}bg, a^{2k}b^{-1}s\}$ donde g y s son dos elementos arbitrarios de $\mathbb{F}_2$. Similarmente, se define $\mathcal{A}_1$ a las palabras que, en forma *reducida, comienzan con una potencia impar de* a*. Definimos* $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ *y* $\mathcal{B}_2$ *como los conjuntos de palabras que, en forma reducida, comienzan con una potencia de* b *congruente* $(mod 3)$ *a* $0, 1$ *y* 2 *respectivamente. Claramente,* $\mathcal{A}_1 = a\mathcal{A}_0$ *y* $\mathcal{B}_i = b^i\mathcal{B}_0$ *para* $i = 0, 1, 2$*.*

Entonces el promedio m *invariante por traslaciones debe satisfacer*

$$1 = \mathsf{m}(\chi_{\mathbb{F}_2}) = 2 \cdot \mathsf{m}(\chi_{\mathcal{A}_1}) = 3 \cdot \mathsf{m}(\chi_{\mathcal{B}_0}).$$

Además $\mathcal{A}_1$ *es un subconjunto propio de* $\mathcal{B}_0$*, con lo cual*

$$\frac{1}{2} = \mathsf{m}(\chi_{\mathcal{A}_1}) \leq \mathsf{m}(\chi_{\mathcal{B}_0}) = \frac{1}{3}$$

lo cual es ridículo.

Definición I.58 *Denotaremos por* $S(G)$ *al conjunto de funciones integrables, positivas pp. y de integral uno. Podemos mirar a* $S(G)$ *en* $L^\infty(G)^*$ *mediante la inclusión canónica de* $L^1(G)$*. Allí éste es denso en el conjunto de estados de* $L^\infty(G)$ *(ver [Kadison-Ringrose][Theorem 4.3.9])).*

Lema I.59 *Si* $\mu \in M^1(G)$ *y* $f \in L^\infty(G)$ *y* G *es amenable con promedio* m*, entonces existe un promedio* $\tilde{\mathsf{m}}$ *de* L^∞ *que satisface*

$$\tilde{\mathsf{m}}(\mu * f) = \|\mu\|_1 \tilde{\mathsf{m}}(f)$$

DEMOSTRACIÓN:

Notar que la funcional $g \mapsto \mathsf{m}(g * f)$ es acotada en $L^1(G)$ e invariante por traslaciones a izquierda, puesto que

$$| \mathsf{m}(g * f) | \leq \|g * f\|_\infty \leq \|g\|_1 \|f\|_\infty.$$

Por la unicidad de la medida de Haar, existe α_f tal que $\mathsf{m}(g * f) = \alpha_s \int_G g d\mu_H$. Supongamos primero que f es uniformemente continua a izquierda, es decir que $\|f_s - f\|_\infty \to_s 0$. Tomemos una unidad aproximada $g_i \in L^1(G)$ positiva y de norma 1, entonces

$$\begin{aligned} | (g_i * f)(s) - f(s) | &= | \textstyle\int_G g_i(t) f(t^{-1} \cdot s) d\mu_H(t) - \int_G g_i(t) f(s) d\mu_H(t) | \\ &\leq \|f_t - f\|_\infty \end{aligned}$$

y por ende $\mathsf{m}(g * f) = \mathsf{m}(f) \int_G g d\mu_H$. Ahora construiremos un estado que cumpla lo anterior pero para $f \in L^\infty$ cualquiera. Elijamos $g \in S(G)$, que salga uniformemente continua. Definimos

$$\tilde{\mathsf{m}}(f) = m(g * f * \tilde{g}) \qquad \text{para toda } f \in L^\infty(G)$$

Donde $\tilde{g}(x) = g(x^{-1})$ Notar que $g * f * \tilde{g}$ es uniformemente continua. Además $\tilde{\mathsf{m}}$ es un estado de $L^\infty(G)$: claramente es lineal, positiva y acotada, pero además $\|\tilde{\mathsf{m}}\| = \tilde{\mathsf{m}}(1) = m(1) = 1$. Si g_i es una aproximación de la identidad de $L^1(G)$, $f \in L^\infty(G)$ y $\mu \in M^1(G)$ entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathsf{m}}(\mu * f) &= \mathsf{m}(g * \mu * f * \tilde{g}) \\
&= lim_{i,j}\mathsf{m}(g * \mu * g_i * g_j * f * \tilde{g}) \\
&= lim_{i,j}\mathsf{m}(\mu * g_i * g_j * f * \tilde{g}) \\
&= lim_{i,j} \int_G \mu g_i d\mu_H \mathsf{m}(g_j * f * \tilde{g}) \\
&= \mu(G) lim_j \mathsf{m}(g * g_j * f * \tilde{g}) \\
&= \mu(G) lim_j \mathsf{m}(g * f * \tilde{g}) \\
&= \mu(G)\tilde{\mathsf{m}}(f).
\end{aligned}$$

Claramente $\tilde{\mathsf{m}}$ es invariante por traslaciones, ya que $\tilde{\mathsf{m}}(f_s) = \tilde{\mathsf{m}}(\delta_s * f) = \tilde{\mathsf{m}}(f)\square$

Lema I.60 *Las siguientes condiciones sobre G son equivalentes:*

1. *G es amenable.*
2. *Existe una red $g_i \in S(G)$ tal que $h * g_i - g_i \to_i 0$ en la convergencia débil * de $(L^\infty(G))^*$ para toda $h \in S(G)$*
3. *Existe una red $g_i \in S(G)$ tal que $\|h * g_i - g_i\|_1 \to_i 0$ para toda $h \in S(G)$*
4. *Para cada compacto $K \subset G$ y $\epsilon > 0$, existe $g \in S(G)$ de soporte compacto tal que*
$$\|g - g_s\|_1 < \epsilon \quad \textit{para todo } s \in K.$$

DEMOSTRACIÓN:

$1 \Rightarrow 2$) Si m es un promedio como en la proposición anterior, entonces existe una red $g_i \in S(G)$ tal que $< f, g_i > \to \mathsf{m}(f)$ para toda $f \in L^\infty(G)$ por ser $S(G)$ denso en los estados de $L^\infty(G)$. Dado $h \in S(G)$

$$< f, h * g_i > = < h^* * f, g_i > \to m(h^* * f) = m(f)$$

Esto prueba que la red $\{h * g_i - g_i\}$ es débil-* convergente a 0 en $L^\infty(G)$.

$2 \Rightarrow 3$) Para todo subconjunto finito $\{h_1, \cdots, h_n\}$ en $S(G)$ y todo $\epsilon > 0$, sea $X = L^1(G) \oplus \cdots \oplus L^1(G)$ donde la suma tiene n términos. El subconjunto de X

$$h_1 * g - g \oplus \cdots \oplus h_n * g - g \qquad g \in S(G)$$

Es convexo y 0 pertence a su clausura débil por hipótesis. Por el teorema de Hahn-Banach, 0 está en realidad en su clausura nórmica. Por ende, existe $g \in S(G)$ tal que $\max_k \|h_k * g - g\|_1 < \epsilon$. La red $g = g_\epsilon$ es la buscada.

$3 \Rightarrow 4$) Elijamos un elemento $h \in S(G)$ y tomemos una red $g_i \in S(G)$ que satisfaga 3). Entonces para cada $s \in G$

$$\|(h * g_i)_s - h * g_i\|_1 \leq \|h_s * g_i - g_i\|_1 + \|h * g_i - g_i\|_1 \rightarrow_i 0$$

Como h_s depende continuamente de s en $L^1(G)$, Dado $C \subset G$ compacto y $\epsilon > 0$, $\{h_s\}_{s \in C}$ es un compacto en $L^1(G)$, tomando una $\frac{\epsilon}{3}$-red se encuentra g_i en $S(G)$ tal que

$$\|h_s * g_i - g_i\|_1 + \|h * g_i - g_i\|_1 \leq \epsilon$$

para todo $s \in C$. Tomando $g = \chi_C h * g_i$ obtenemos $\|g_s - g\|_1 \leq \epsilon$ para todo s en C (y además g es de soporte compacto). $4 \Rightarrow 1$ Dados C compacto y $\epsilon > 0$ tomemos $i = i(C, \epsilon)$ con el orden lógico (decreciente para los números, creciente para los conjuntos). Para cada i, elijamos $g_i \in S(G)$ que satisfaga 4 y consideremos la red $\{m_i\}$ de estados en $L^\infty(G)$ dada por

$$m_i(f) = \int_G f g_i d\mu_H$$

Para cada $s \in C$ se tiene

$$\begin{aligned} | \, m_i(f_s^{-1} - f) \, | &= | \textstyle\int_G [f(s \cdot t) - f(t)] g_i(t) d\mu_H(t) \, | \\ &= | \textstyle\int_G f(t)[g_i(s^{-1} \cdot t) - g_i(t)] d\mu_H(t) \\ &\leq \|f\|_\infty \epsilon. \end{aligned}$$

entonces, cualquier m límite *-débil de una subred de $\{m_i\}$ va a ser un invariante a izquierda (y estos límites existen porque $m_i \in B_{L^\infty(G)^*}$). Además como $m_i(1) = 1$ para todo i, resulta que m es un estado. □

Definición I.61 *Definimos las funciones de tipo positivo sobre G en forma similar al caso abeliano, es decir $P(G)$ son las funciones $f \in L^1(G)$ que además cumplen*

$$\int_G f(s)(g^* * g)(s) d\mu_H(s) \geq 0$$

para toda $g \in L^1(G)$. Notar que esta condición puede reemplazarse por "para todo $g \in L^1(G)$ continua y de soporte compacto" (por densidad).

Proposición I.62 *Si $\phi, \psi \in P(G)$ entonces el producto puntual $\phi\psi \in P(G)$.*

DEMOSTRACIÓN:

La demostración se reduce al caso de matrices observando que el Teorema I.39 sigue siendo válido (con idéntica demostración) para el caso no abeliano. □

Observación I.63 *Si $f \in L^2(G)$, entonces $g = f * \tilde{f}$ es una función continua, de tipo positivo, de norma uniforme $\|g\|_\infty = \|f\|_2^2$.*

Para probarlo, recordemos que la aplicación $(t \mapsto f_t)$ de $G \to L^2(G)$ es continua, y calculemos

$$\begin{aligned} \mid g(t) - g(e) \mid &= \mid \textstyle\int_G f(s)\tilde{f}(s^{-1}\cdot t)d\mu_H(s) - \int_G f(s)\tilde{f}(s^{-1}\cdot e)d\mu_H(s) \mid \\ &\leq \textstyle\int_G \mid f(s) \mid\mid \tilde{f}(s^{-1}\cdot t) - \tilde{f}(s^{-1}) \mid d\mu_H(s) \mid \\ &= \textstyle\int_G \mid f(s) \mid\mid f(t^{-1}\cdot s)d\mu_H(s) - f(s) \mid d\mu_H(s) \mid \\ &\leq \|f\|_2 \cdot \|f_t - f\|_2 \end{aligned}$$

que tiende a cero cuando $t \to e$ en G. La positividad es un cálculo elemental, que muestra que, para toda $h \in L^1(G)$

$$\int_G (f * \tilde{f})(h * h^*)d\mu_H = < f * h, f * h > \geq 0.$$

Por último, $\|g\|_\infty = f * \tilde{f}(e) = \|f\|_2^2$.

Proposición I.64 *El grupo G es amenable si y sólo si existe una red $\{f_i\}$ de funciones de soporte compacto, en la bola de $L^2(G)$ tal que $\{f_i * \tilde{f_i}\}$ converge a 1 uniformemente sobre compactos de G.*

Notar que por la observación previa, la red $\{f_i * \tilde{f_i}\}$ es una red de funciones de tipo positivo, continuas y de soporte compacto, de norma uniforme 1.

DEMOSTRACIÓN:

Si G es amenable, dado $K \subset G$ compacto y $\epsilon > 0$, sea $g_i \in L^1(G)$, positiva y de norma 1 como en el Lema anterior (parte 4) (donde $i = i(K, \epsilon)$. Definimos

$f_i(s) = \sqrt{g_i(s)}$. Entonces $1 = \|f_i\|_2^2 = f_i * \tilde{f}_i(e)$. Aún más: para cada $s \in G$,

$$\begin{aligned}
\mid 1 - (f_i * \tilde{f}_i)(s) \mid^2 &= \mid f_i * \tilde{f}_i(e) - (f_i * \tilde{f}_i)(s) \mid^2 \\
&= \mid \int_G f_i(t)[\overline{f_i(t)} - \overline{f_i(s^{-1} \cdot t)}] d\mu_H(t) \mid^2 \\
&\leq \|f_i\|_2^2 \cdot \|f_i - (f_i)_s\|_2^2 \\
&= \int_G \mid g_i^{1/2}(t) - g_i^{1/2}(s^{-1} \cdot t) \mid^2 d\mu_H(t) \\
&\leq \int_G \mid g_i(t) - g_i(s^{-1} \cdot t) d\mu_H(t) \\
&= \|g_i - (g_i)_s\|_1
\end{aligned}$$

El orden de la red $\{f_i\}$ es el de la inclusión directa para los compactos y al revés para los ϵ, es decir, $i(K, \epsilon) \leq j(K', \epsilon')$ sii $K \subset K'$ y $\epsilon' \leq \epsilon$.

Ahora dado K compacto y $\epsilon > 0$ veamos la convergencia uniforme. Si $s \in K$, $\mid 1 - (f_i * \tilde{f}_i)(s) \mid^2 \leq \|g_i - (g_i)_s\|_1 < \epsilon$ ($i = i(K, \epsilon)$, pero si $j \geq i$, entonces $K \subset K'$ y por ende $\mid 1 - (f_j * \tilde{f}_j)(s) \mid^2 \leq \|g_j - (g_j)_s\|_1 < \epsilon' < \epsilon$ para $s \in K$. En consecuencia $\|1 - (f_i * \tilde{f}_i)\|_K \to_i 0$.

Veamos la recíproca. Si $f_i \in B_{L^2(G)}$, tomemos $g_i = \mid f_i \mid^2$. Entonces g_i es positiva y $\|g_i\|_1 = 1$. Aún más, para $s \in G$,

$$\begin{aligned}
\|g_i - (g_i)_s\|_1 &= \int_G \mid\mid f_i(t) \mid^2 - \mid f_i(s^{-1} \cdot t) \mid^2 \mid d\mu_H(t) \\
&= \int_G \mid f_i(t) + f_i(s^{-1} \cdot t) \mid \cdot \mid f_i(t) - f_i(s^{-1} \cdot t) \mid d\mu_H(t) \\
&\leq 2\|f_i - (f_i)_s\|_2 \\
&= 2(2 - < f_i, (f_i)_s > - < (f_i)_s, f_i >)^{1/2} \\
&\leq 2\sqrt{2} \cdot \mid 1 - < (f_i)_s, f_i > \mid^{1/2} \\
&= 2\sqrt{2} \cdot \mid 1 - (f_i * \tilde{f}_i)(s) \mid^{1/2} .
\end{aligned}$$

Obtenemos

$$\|g_i - (g_i)_s\|_1 \leq 2\sqrt{2} \mid 1 - (f * \tilde{f})(s) \mid^{1/2} \leq \|1 - (f_i * \tilde{f}_i)\|_K \to_i 0$$

para cualquier compacto K, y por ende dados K y $\epsilon > 0$, existe i tal que $\|g_i - (g_i)_s\|_1 < \epsilon$ si $s \in K$. Esta g_i y el Lema previo nos lleva a la conclusión de que G es amenable. $\square$

Teorema I.65 *Hay un homeomorfismo entre el conjunto de estados de $C^*(G)$ (con la topología débil-*) y el conjunto de funciones sobre G de tipo positivo continuas y de norma uniforme 1 (con la topología de convergencia uniforme sobre compactos).*

DEMOSTRACIÓN:

Observemos que puede pensarse $\mathbb{C}G \subset C^*(G)$ por la Observación I.18, llamando $\mathbb{C}G$ a la subálgebra generada por $\{\delta_g : g \in G\}$. Consideremos la aplicación $\Lambda : C^*(G)^* \to L^\infty(G)$ dada por

$$\Lambda(\phi)(t) = \phi(\delta_t).$$

(notar que, por la observación previa al teorema, la imagen en realidad da funciones continuas). Claramente, $\|\Lambda(\phi)\|_\infty \leq \|\phi\|$. Si $f \in L^1(G)$, podemos pensar a ϕ como en $L^1(G)^* \simeq L^\infty(G)$ por la desigualdad $\| \ \|_{C^*(G)} \leq \| \ \|_1$ donde el isomorfismo se realiza integrando, es decir $\phi(f) = \int_G F_\phi f(t) d\mu_H(t)$. Si f_λ es una aproximación de la identidad de $L^1(G)$ (y por la Observación I.23 también de $C^*(G)$), tenemos

$$\begin{aligned} \phi(\delta_t) = \lim_\lambda \phi((f_\lambda)_t) &= \lim_\lambda \textstyle\int_G F_\phi(t) f_\lambda(s^{-1} \cdot t) d\mu_H(t) \\ &= \lim_\lambda F_\phi * f_\lambda(s) \\ &= F_\phi(s) \end{aligned}$$

Entonces

$$\phi(f) = \int_G \phi(\delta_t) f(t) d\mu_H(t) = \int_G \Lambda(\phi)(t) f(t) d\mu_H(t).$$

En consecuencia, Λ es inyectiva.

Sea ahora B la imagen de los estados de $C^*(G)$, y veamos que $B = P(G)$. Si $f = \Lambda(\phi)$ con ϕ un estado, entonces

$$\int_G f(s)(g^* * g)(s) d\mu_H(s) = \int_G \phi(\delta_s)(g^* * g)(s) d\mu_H(s) = \phi(g^* * g) \geq 0$$

para toda $g \in L^1(G)$. La otra inclusión es idéntica. Además $\|\Lambda(\phi)\|_\infty = \phi(\delta_e) = 1$ pues ϕ es un estado y δ_e es una identidad de $\mathbb{C}G \subset C^*(G)$.

Veamos que este isomorfismo es en realidad un homeomorfismo. Si $\Lambda(\phi_\lambda)$ es una red en $P(G)$ convergiendo a f uniformemente sobre compactos de G, entonces $f \in P(G)$ pues la condición de positividad es cerrada para el límite débil-*. Esto nos dice que existe ϕ estado de $C^*(G)$ tal que $\Lambda(\phi) = f = \lim \Lambda(\phi_\lambda)$. Ahora para toda $g \in L^1(G)$, se tiene

$$\phi_\lambda(g) = \int_G g \Lambda(\phi_\lambda) d\mu_H \to_\lambda \int_G g \Lambda(\phi) d\mu_H = \phi(g).$$

Como $\phi_\lambda \to \phi$ débilmente sobre un denso de $C^*(G)$, y además $\|\phi_\lambda\| = \Lambda(\phi_\lambda)(e)$ (es decir, $\{\phi_\lambda\}$ está acotada) se tiene que $\phi_\lambda \to \phi$ *-débilmente.

Ahora supongamos que la red de estados $\{\phi_\lambda\}$ converge débil-* al estado ϕ. Dado $\epsilon > 0$ existe $f \in C_c(G)_+$ con $\|f\|_1 = 1$ tal que $\phi((\delta_e - f)^* * (\delta_e - f)) < \epsilon^2$. Como $\phi_\lambda \to_{w^*} \phi$ y $\|\phi_\lambda\| = \|\phi\| = 1$, existe un λ_0 tal que

$$\phi_\lambda((\delta_e - f)^* * (\delta_e - f)) < \epsilon^2$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Ahora para todo $t \in G$

$$\begin{aligned}
\mid \Lambda(\phi)(t) - (\Lambda(\phi) * \tilde{f})(t) \mid^2 &= \mid \Lambda(\phi)(t) - \textstyle\int_G \Lambda(\phi)(s)\tilde{f}(s^{-1} \cdot t) d\mu_H(s) \mid^2 \\
&= \mid \Lambda(\phi)(t) - \textstyle\int_G \Lambda(\phi)(s) f(t^{-1} \cdot s) d\mu_H(s) \mid^2 \\
&= \mid \phi(\delta_t) - \phi(\delta_t * f) \mid^2 \\
&= \mid \phi(\delta_t * (1 - f)) \mid^2 \\
&\leq \phi(\delta_t * \delta_t^*)\phi((\delta_e - f) * (\delta_e - f)^*) \\
&= 1 \cdot \epsilon^2.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\mid \Lambda(\phi_\lambda)(t) - (\Lambda(\phi_\lambda) * \tilde{f})(t) \mid^2 < \epsilon^2.$$

Ahora la aplicación de $G \to C^*(G)$ definida por $(t \mapsto \delta_t * f)$ es continua, y entonces dado K compacto en G podemos hallar $\lambda_1 \geq \lambda_0$ de manera que

$$\mid (\Lambda(\phi_\lambda) * \tilde{f})(t) - (\Lambda(\phi) * \tilde{f})(t) \mid < \epsilon$$

para todo $t \in K$. Entonces (combinando esto con las dos desigualdades anteriores) conseguimos que $\mid \Lambda(\phi_\lambda)(t) - \Lambda(\phi)(t) \mid < 3\epsilon$ para todo $t \in K$. □

Lema I.66 *Si $\Phi \in P(G) \cap C_c(G)$, entonces existe $\eta \in L^2(G)$ de norma uno, tal que $\Phi = \eta * \tilde{\eta}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Tomemos una aproximación de la identidad $\{f_a\} \in L^1(G) \cap C_c(G)$. Sabemos que $\lambda(\Phi)$ es un operador positivo (donde λ es la representación regular a izquierda de G). Mediante el cálculo funcional, definimos $\eta_a = \lambda(\Phi)^{\frac{1}{2}} f_a \in L^2(G)$. Veamos que la red $\{\eta_a\}$ es de Cauchy en $L^2(G)$:

$$\|\eta_a - \eta_b\|_2^2 = < \lambda(\Phi)(f_a - f_b), f_a - f_b > = (f_a - f_b) * \Phi * (\tilde{f}_a - \tilde{f}_b)(e)$$

que tiende a cero cuando a y b tienden a infinito. Entonces existe $\eta = \lim_a \eta_a$ en $L^2(G)$. Si probamos que cada η_a tiene norma menor o igual a uno, lo mismo valdrá para η:

$$\begin{aligned}\|\eta_a\|_2^2 &= <\lambda(\Phi)\eta_a, \eta_a> \\ &= \int_G \Phi\eta_a * \eta_a^* d\mu_H \\ &= \phi_\Phi(\eta_a * \eta_a^*) \\ &\leq \|\phi_\Phi\|\|\eta_a\|_1^2 \leq 1.\end{aligned}$$

Ahora probemos la identidad hipotética:

$$\begin{aligned}(\eta * \tilde{\eta})(t) &= <\eta, \eta_t> \\ &= \lim_a <\lambda(\Phi)^{\frac{1}{2}} f_a, (\lambda(\Phi)^{\frac{1}{2}} f_a)_t> \\ &= \lim_a <f_a * \Phi, (f_a)_t> = \Phi(t). \ \square\end{aligned}$$

Teorema I.67 *El homeomorfismo del Teorema I.65 se restringe a un homeomorfismo entre los estados de $C_r^*(G)$ (con la topología heredada de los estados de $C^*(G)$) y la clausura (con la topología de convergencia uniforme sobre compactos) del espacio de funciones de $P(G) \cap C_c(G)$ de norma uniforme* 1.

DEMOSTRACIÓN:

Si existe una red $\{\Phi_i\}$ en el espacio en cuestión que converge uniformemente sobre compactos a Φ, se tiene que Φ es de tipo positivo y continua, y además por el lema previo para cada i existe η_i en la bola unitaria de $L^2(G)$ tal que $\Phi_i = \eta_i * \tilde{\eta}_i$. Pero entonces el estado sobre $C^*(G)$ inducido por Φ vía el isomorfismo del teorema en cuestión cumple

$$\begin{aligned}|\ \phi(f)\ | &= |\ \int_G \Phi f d\mu_H\ | \\ &= \lim_i |\ \int_G \Phi_i f d\mu_H\ | \\ &= \lim_i |\ \int_G \eta_i * \tilde{\eta}_i f d\mu_H\ | \\ &= \lim_i |<\lambda(f)\eta_i, \eta_i>| \\ &\leq \|\lambda(f)\|\end{aligned}$$

para toda $f \in L^1(G)$ lo que prueba que ϕ es acotado sobre $C_r^*(G)$.

Veamos la vuelta: como los estados de C_r^* forman un cono (en particular, un conjunto convexo), si probamos que para toda $r \in C_r^*(G)$ hermitiana se tiene $\|r\|_{C_r^*(G)} = \sup_\phi\{\phi(r)\}$ con ϕ recorriendo todos los estados de $C_r^*(G)$ inducidos vía el isomorfismo del teorema en cuestión, habremos probado que la clausura débil de este conjunto de estados son TODOS los estados de $C_r^*(G)$ (ver [Kadison-Ringrose][Theorem 4.3.9]). Por densidad, basta probarlo para toda r de la pinta $r = \lambda(f * f^*)$, con $f \in L^1(G)$.

Usando el isomorfismo, hay que probar que para toda $f \in L^1(G)$ existe una red de funciones de tipo positivo p_i de soporte compacto y de norma uniforme 1 sobre G tal que

$$\|\lambda(f * f^*)\|_{C_r^*(G)} = \sup_i \int_G p_i(f * f^*)d\mu_H.$$

Por un lado se tiene

$$\begin{aligned}
\|\lambda(f * f^*)\|_{C_r^*(G)} &= \sup\nolimits_{g\in B_{L^2(G)}} < \lambda(f * f^*)g, g > \\
&= \sup_{\substack{g\in B_{L^2(G)} \\ g\in C_c(G)}} < \lambda(f * f^*)g, g > \\
&= \sup_{\substack{g\in B_{L^2(G)} \\ g\in C_c(G)}} \textstyle\int_G (f * f^* * g)(s)\overline{g(s)}d\mu_H(s) \\
&= \sup_{\substack{g\in B_{L^2(G)} \\ g\in C_c(G)}} \textstyle\int_G \int_G f * f^*(t)g(t^{-1}\cdot s)\overline{g(s)}d\mu_H(s)d\mu_H(t) \\
&= \sup_{\substack{g\in B_{L^2(G)} \\ g\in C_c(G)}} \textstyle\int_G (g * \tilde{g})(f * f^*)d\mu_H
\end{aligned}$$

Pero si g está en la bola unitaria de $L^2(G)$, y además tiene soporte compacto, entonces $g * \tilde{g}$ (por la observación I.63) es continua, de soporte compacto y de tipo positivo, y esto prueba la igualdad postulada. □

Observación I.68 *Notar que la aplicación $(t \mapsto \delta_t)$ de G en $C^*(G)$ es continua por serlo de G en $M^1(G)$.*

Teorema I.69 *Probaremos ahora que en todo grupo amenable, se tiene una isometría $\|f\|_{C^*_r(G)} = \|f\|_{C^*(G)}$ para toda $f \in L^1(G)$, y en consecuencia, $C^*_r(G) \simeq C^*(G)$ por ser ambas clausuras de $L^1(G)$.*

La demostración se hará como sigue:

1. Estimaremos $\|f\|^2_{C^*(G)} = \|f * f^*\|_{C^*(G)} = sup_{\phi \text{ estado}} \mid \phi(f * f^*) \mid$, con ϕ recorriendo el conjunto de estados de $C^*(G)$.

2. Usaremos el homeomorfismo de I.65 para pasar del conjunto de estados de $C^*(G)$ al conjunto de funciones sobre G de tipo positivo continuas y de norma uniforme 1.

3. Usaremos la Proposición I.64 para aproximar una función de tipo positivo continua cualquiera por funciones de tipo positivo continuas de soporte compacto.

4. Usando 3. probaremos que $\mid \phi(g) \mid \leq \|\lambda(g)\|_{C^*_r(G) \subset B(L^2(G))}$ para toda ϕ estado de $C^*(G)$.

5. Finalmente, usando 1. y 4. concluiremos que $\|f\|_{C^*(G)} \leq \|\lambda(g)\|_{C^*_r(G)}$. La otra desigualdad es intrínseca de la construcción de la representación universal.

Demostración:

1. Esta estimación de la norma es un resultado general de álgebras C^*. Puede encontrarse en [Kadison-Ringrose][4.3.4.iv].

2. Por el Teorema I.65.

3. Dada p en $P(G)$, tomemos la red $p_i(s) = p(s) \cdot f_i * \tilde{f}_i(s)$ donde $f_i * \tilde{f}_i$ es una red como en la Proposición I.64. Obviamente, $p_i \to_i p$ uniformemente sobre compactos, y además cada p_i es continua y de soporte compacto. Por la Proposición I.62, el producto puntual p_i es de tipo positivo.

4. Ahora dado ϕ estado de $C^*(G)$ y $h \in L^1(G)$, se tiene (vía el isomorfismo Λ), llamando $x_i = \Lambda(\phi) f_i * \tilde{f}_i$

$$\begin{aligned} \phi(h * h^*) &= \int_G \Lambda(\phi)(t) h * h^*(t) d\mu_H(t) \\ &= \lim_i \int_G \Lambda(\phi)(t) g_i h * h^*(t) d\mu_H(t) \\ &= \lim_i < x_i, h * h^* > . \end{aligned}$$

Ahora x_i es de tipo positivo y de soporte compacto. Por el Lema I.66, existe $y_i \in B_{L^2(G)}$ tal que $x_i = y_i * \tilde{y_i}$. Por otra parte,

$$|< \lambda(r)y_i, y_i >|=| \int_G (y_i * \tilde{y_i})(s)r(s)d\mu_H(s) |$$

para toda $r \in L^1(G),\ r \geq 0$ pp, en particular para $r = h*h^*$, y en consecuencia

$$\begin{aligned} |< \lambda(h * h^*)y_j, y_j >| &= | \textstyle\int_G (y_i * \tilde{y_i})(s)(h * h^*)(s)d\mu_H(s) | \\ &= | \textstyle\int_G x_i(s)(h * h^*)(s)d\mu_H(s) | \\ &= |< x_i, h * h^* >| \,. \end{aligned}$$

Juntando esto con el límite anterior se tiene

$$| \phi(h * h^*) |= \lim_i |< \lambda(h * h^*)y_i, y_i >|\leq \|\lambda(h * h^*)\|_{C_r^*(G)\subset B(L^2(G))}. \ \square$$

Teorema I.70 *Si $C^*(G) \simeq C_r^*(G)$, entonces G es un grupo amenable.*

DEMOSTRACIÓN:

Para probar que G es amenable, basta probar que existe una red $\{p_i\}$ de funciones de tipo positivo, de soporte compacto, que tiende a 1 uniformemente sobre compactos de G, ya que en ese caso el Lema I.66 nos dice que para cada i existe $f_i \in B_L^2(G)$ tal que $p_i = f_i * \tilde{f_i}$, y en consecuencia la Proposición I.64 nos asegura la amenabilidad del grupo.

Probamos bajo la hipótesis del teorema que toda función de tipo positivo de norma uniforme 1 puede aproximarse por una red en las condiciones mencionadas, de la siguiente manera: el Teorema I.65 nos asegura que el espacio de funciones de tipo positivo de norma unitaria está en correspondencia bicontinua (vía Λ) con el espacio de estados de $C^*(G)$. En este caso, este espacio coincide con el espacio de estados de $C_r^*(G)$, que es (por el Teorema I.67) la imagen (vía Λ^{-1}) de la clausura (uniforme sobre compactos, precisamente) del espacio de funciones de tipo positivo de soporte compacto de norma unitaria. $\square$

Corolario I.71 *Todo grupo abeliano es amenable.*

Referencias

[Conway] CONWAY, JOHN B. - *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[Cotlar] COTLAR, MISCHA - *Introducción a la teoría de la representación de grupos*, Cursos y seminarios de matemática, fascículo 11, Universidad de Buenos Aires, Argentina, 1961.

[Dixmier] DIXMIER, JACQUES - *Les C^*-algèbras et leurs représentacions*, Gauthier-Villars & Cie., Paris, 1964.

[Davidson] DAVIDSON, KENNETH R. - *C^*-algebras by example*, AMS, Providence-Rhode Island, 1996.

[Fava-Zo] FAVA, NORBERTO Y ZO, FELIPE - *Medida e integral de Lebesgue*, Red Olímpica, Bs. As., Argentina, 1996.

[Halmos1] HALMOS, PAUL R. - *Measure theory*, D. Van Nostrand Company, New Jersey, 1959.

[Kadison-Ringrose] KADISON, RICHARD V. AND RINGROSE, JOHN R. - *Fundamentals of the theory of Operator Algebras*, AMS-Graduate studies in mathematics, Vol 15, Providence-Rhode Island, 1997.

[Pedersen] PEDERSEN, GERT K. - *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.

[Simon] REED, M. AND SIMON, B. - *Methods of modern mathematical physics, Vol I : FUNCTIONAL ANALYSIS,* Academic Press, London, 1980.

[Munkres] MUNKRES, JAMES R. - *Topology, a first course*, Prentice-Hall, New Jersey.