

# Una introducción al Complejo de **DE RHAM**

Gabriel Larotonda

Abril de 1997



# Índice general

<b>1. Definiciones</b>	<b>5</b>
1.1. Introducción: símlices y cadenas en $\mathcal{R}^n$	5
1.1.1. Los símlices y su "representación"	5
1.1.2. Los operadores $\partial$ y $\mathbf{C}$	7
1.1.3. Integración de formas sobre cadenas	9
1.2. Homología y cohomología	12
1.2.1. Complejos diferenciales	12
1.2.2. La relación entre $\infty\mathbf{H}_p(\mathbf{M};\mathcal{R})$ y $\mathbf{H}^p(\mathbf{M})$	16
<b>2. La cohomología de las formas</b>	<b>19</b>
2.1. Tres resultados importantes	19
2.1.1. La cohomología de un producto por $\mathcal{R}$ ( $M \times \mathcal{R} = M$ )	19
2.1.2. La cohomología como invariante homotópico	24
2.1.3. La sucesión de Mayer-Vietoris	28
2.2. Algunas cohomologías conocidas	35
2.2.1. Un caso inevitable: $\mathcal{R}^n$	35
2.2.2. La cohomología de $S^n$	44
2.3. El teorema del punto fijo de Brouwer	49
<b>Referencias</b>	<b>53</b>



# Capítulo 1

## Definiciones

### 1.1. Introducción: símlices y cadenas en $\mathcal{R}^n$

En esta breve introducción nos vamos a ocupar de presentar algunos conceptos esencialmente geométricos que servirán para mostrar una analogía (en realidad, como veremos sobre el final de la primera parte, más que una analogía se trata de un isomorfismo) con el objeto central de estudio de estas notas, concentrándonos ahora más en los aspectos "funcionales" de los mismos (o sea su manipulación y representación) que en las demostraciones formales. También recordaremos algunas definiciones y resultados conocidos del cálculo sobre variedades diferenciables.

#### 1.1.1. Los símlices y su "representación"

Comencemos definiendo, para cada  $p \geq 1$  a  $\Delta^p$  ( $p$  - *símlice en  $\mathcal{R}^p$* ) como el conjunto convexo "apoyado" en los ejes de coordenadas, sobre el primer cuadrante de la siguiente manera:

$$\Delta^p = \{(a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{R}^p : \sum_{i=1}^p a_i \leq 1, \text{ con cada } a_i \geq 0\}$$

y para  $p = 0$  definimos  $\Delta^0$  como el espacio de un punto  $\{0\}$ .

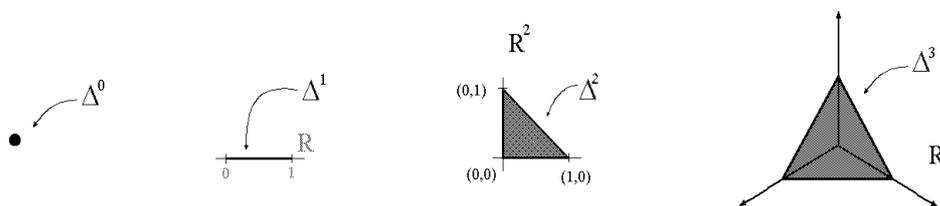


Figura 1.1: Los 0, 1, 2 y 3 símlices.

Se define asimismo, dada una variedad diferenciable  $M$  (de aquí al final, siempre que hablemos de variedades será pensando en términos de variedades  $C^\infty$  con base numerable

y Hausdorff, como asimismo las funciones que nos interesarán serán las de clase  $C^\infty$ ), un  $p$ -símplice diferenciable singular en  $M$ ; es una función  $\sigma$  de  $\Delta^p$  en  $M$  tal que existe algún entorno de  $\Delta^p$  (en  $\mathcal{R}^p$ ) de manera que  $\sigma$  pueda extenderse a una función diferenciable de éste entorno en  $M$ . Para evitar complicaciones de ahora en adelante llamaremos a las funciones  $\sigma$  directamente  $p$ -símplices.

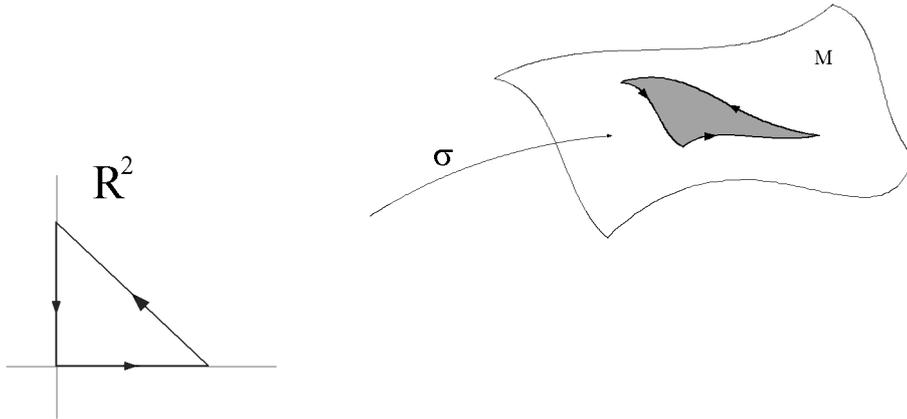


Figura 1.2: Un símplice elevado a una variedad (extraído de WARNER, F. "Foundations of differentiable manifolds").

Llamaremos una  $p$ -cadena  $\mathbf{c}$  en  $M$  a una combinación lineal con coeficientes reales (es decir, como  $\mathcal{R}$ -espacio vectorial) de  $p$ -símplices  $\sigma_i$  en  $M$ , y a este espacio vectorial lo denotaremos  $\infty S_p(M, \mathcal{R})$ .

Más formalmente: identifiquemos dos  $p$ -símplices  $\sigma$  y  $\sigma'$  si ambos coinciden sobre  $\Delta^p$ , y llamando  $\sum_p = \{\text{clases de equivalencia de los } p\text{-símplices}\}$ , tomemos el  $\mathbb{R}$ -módulo libre generado por  $\sum_p$ .

- Esto último en general es un objeto abstracto, pero que puede visualizarse si como variedad  $M$  consideramos a  $\mathcal{R}^3$  con la carta usual, y a los 0,1,2 y 3-símplices los pensamos como puntos, segmentos, triángulos y tetraedros poco deformados, para condecir con la diferenciable que se les pide a las  $\sigma$ . También es conveniente asignar a los  $p$ -símplices (con  $p < 3$ ) una "orientación" (esto es absolutamente informal, no es necesario definir "orientación") de la siguiente manera:
- Podemos pensar entonces en la multiplicación de un  $p$ -símplice por el número real positivo  $r$  como en una homotecia de razón  $r$ , seguida de la respectiva inclusión; y la multiplicación por  $-1$  como en "dar vuelta" la "orientación" del símplice.
- Para la suma simplemente miramos la superposición en un mismo dibujo de  $\mathcal{R}^3$  de los símplices, y si alguno aparece con dos orientaciones opuestas, está claro que se cancelan y "desaparecen". (Conviene ver algunos ejemplos).

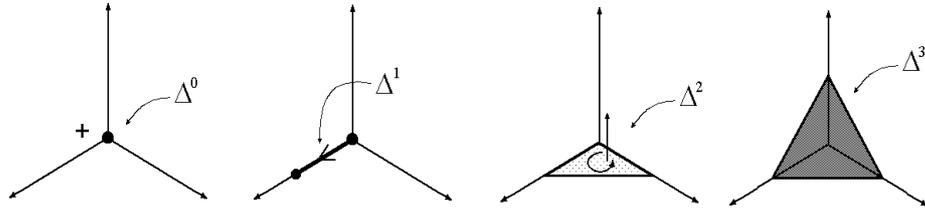


Figura 1.3: Los símlices como subconjuntos de  $\mathcal{R}^3$  con su "orientación".

### 1.1.2. Los operadores $\partial$ y $C$

Se puede definir una operación de "tomar el borde" de un símlice cualquiera mediante los operadores  $k_i^p : \Delta^p \rightarrow \Delta^{p+1}$ ,  $0 \leq i \leq p+1$ , definidos de la siguiente manera:

$$\text{si } p = 0, \quad k_0^0(0) = 1 \quad \text{y} \quad k_1^0(0) = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{y si } p \geq 1, \quad \begin{cases} k_0^p(a_1, \dots, a_p) = (1 - \sum_{i=1}^p a_i, a_1, \dots, a_p) \\ k_i^p(a_1, \dots, a_p) = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_i, \dots, a_p) \text{ para } (1 \leq i \leq p+1). \end{cases}$$

Ahora, si  $\sigma$  es un  $p$ -símlice en  $M$  se define su  $i$ -ésima cara como el  $(p-1)$ -símlice  $\sigma^i = \sigma \circ k_i^{p-1}$ , y el borde o "frontera" de  $\sigma$

$$\partial\sigma = \sum_{i=1}^p (-1)^i \sigma^i \quad \text{"borde de } \sigma\text{"} \quad (1.2)$$

extendiéndose a una  $p$ -cadena  $c = \sum_{j=1}^k a_j \sigma_j$  en la forma obvia (linealmente), es decir

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^k (-1)^i a_j \sigma_j^i. \quad (1.3)$$

- En nuestro ejemplo donde  $M$  es  $\mathcal{R}^3$ , la idea intuitiva de orientación es como se ve en la figura de abajo, a pesar de que formalmente la definición de arriba **no** coincide con estos dibujos; esto es porque la definición de arriba es más manejable y "natural" desde el punto de vista formal, y es la que finalmente se adoptó para evitar problemas de signos en -por ejemplo- el teorema de Stokes:

A partir de la definición 1.1 puede deducirse la identidad

$$k_i^{p+1} \circ k_j^p = k_{j+1}^{p+1} \circ k_i^p \quad (p \geq 0 ; i \leq j)$$

y esta última junto con 1.2 y 1.3 lleva al (importante) resultado

$$\partial \circ \partial = 0, \quad (1.4)$$

es decir, que el borde del borde de una cadena es siempre cero.

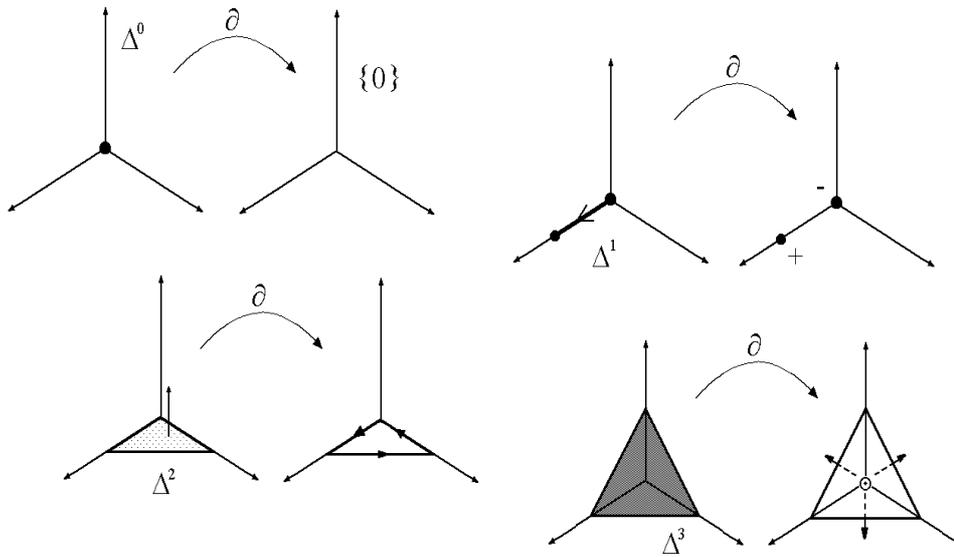


Figura 1.4: La operación de "tomar el borde" de un símlice respeta la orientación.

- Cómo se interpreta esto en términos de "triangulitos"? Simplemente considerando que los símlices que se superponen con orientación opuesta en el espacio se "cancelan", de la siguiente manera:

Esto, en otras palabras, es notar que el borde de una  $p$ -cadena que se obtiene tomándole el borde a un  $(p+1)$ -símlice cualquiera, es nulo (y lo mismo vale para  $(p+1)$ -cadenas, por la linealidad de  $\partial$ ); ahora bien, uno podría preguntarse si será cierta -al menos bajo ciertas hipótesis- la recíproca, es decir si será cierta la proposición "si al tomársele el borde a una  $p$ -cadena se obtiene que este es nulo, entonces existe una  $(p+1)$ -cadena tal que la primera es el borde de esta última".

La respuesta a esta pregunta es "no en general", pero sorprendentemente es posible probar la proposición en el caso  $U \subset \mathcal{R}^n$  abierto convexo, de manera relativamente sencilla; nos vamos a limitar al caso  $\mathcal{R}^3$ , para seguir con el mismo ejemplo de siempre, pero para el caso general basta observar que se puede hacer la misma construcción en el caso  $U = \mathcal{R}^n$ , y que como todos los abiertos convexos de  $\mathcal{R}^n$  son homeomorfos (ver **Varietades homeomorfas**, en la sección 2.2.1), se puede adaptar el razonamiento para ellos.

- Elegimos un punto  $P \in \mathcal{R}^3$  conveniente, y comenzamos definiendo un operador

$$C : \infty\mathbf{S}_p(\mathcal{R}^3, \mathcal{R}) \rightarrow \infty\mathbf{S}_{p+1}(\mathcal{R}^3, \mathcal{R}) \quad \text{el "cono" al punto } P$$

de la siguiente forma: dado un símlice  $\sigma$  de  $\mathbf{c}$  tomamos todas las rectas que pasan por algún punto de  $\sigma$  y por el punto  $P$  y nos quedamos con el segmento comprendido entre ambos puntos, y definimos  $C(\sigma) = \sigma \cup \{\text{segmentos}\}$ , teniendo cuidado que la orientación de los nuevos símlices se "pegue" bien con la de  $\sigma$ , y extendiendo  $C$  linealmente a toda la cadena. Estos dibujos aclaran un poco el panorama: (y también se ve que se puede hacer la misma construcción en un abierto convexo cualquiera, eligiendo cuidadosamente  $P$ )

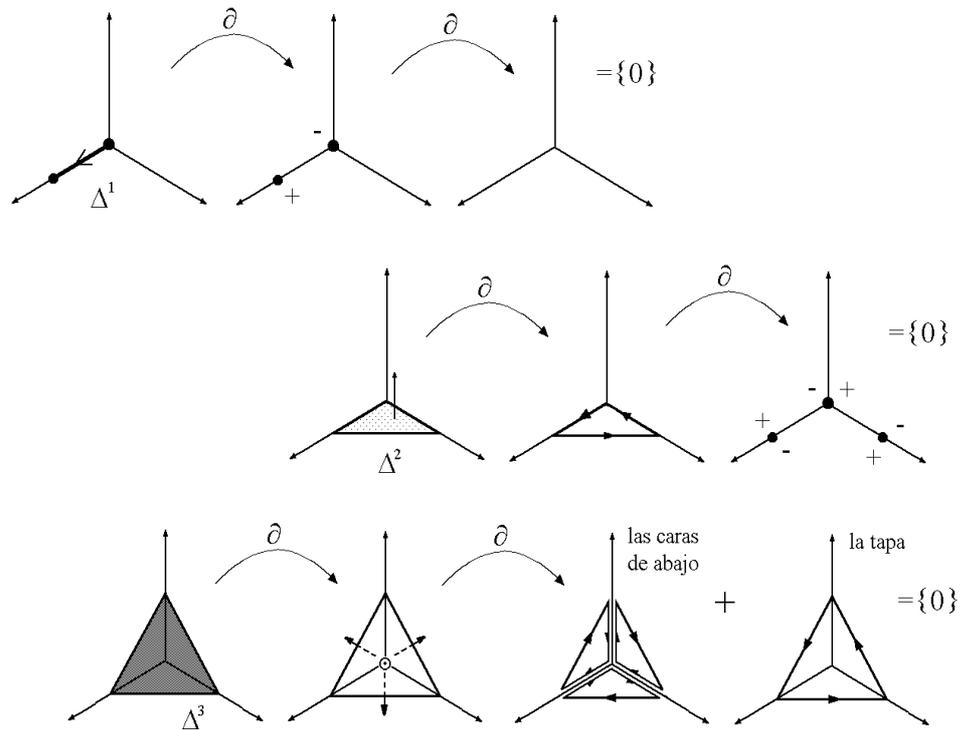


Figura 1.5: La operación "tomar borde" es nilpotente.

Lo que se puede ver fácilmente es que este operador  $C$  (junto con  $\partial$ ) cumple la siguiente relación:

$$C \circ \partial + \partial \circ C = id. \tag{1.5}$$

- Para el caso general en  $\mathcal{R}^n$  se puede definir formalmente  $C$ , y la relación se verifica haciendo las cuentas; pero uno puede convencerse viendo como funciona en el siguiente gráfico:

Ahora, si nuestra  $\mathbf{c}$  tiene borde "nulo" de la ecuación 1.5 se deduce que  $\partial(C(\mathbf{c})) = \mathbf{c}$ , o sea que toda cadena de este tipo es "el borde de su cono al origen", lo que prueba la proposición.

### 1.1.3. Integración de formas sobre cadenas

Para encontrar la relación de estos objetos con la diferencial exterior, vamos a necesitar saber como se integra sobre las cadenas, así que consideremos un  $p$ -símplice  $\sigma$  sobre una variedad  $M$  y  $\omega$  una  $p$ -forma diferenciable sobre la misma. Cuando  $p = 0$ , un 0-complejo es nada más que un punto sobre la variedad  $M$ , y una 0-forma es una función definida sobre la variedad; en este caso la integral sobre este complejo es "evaluar" en el punto:

$$\int_{\sigma} \omega = \omega(\sigma(0)).$$

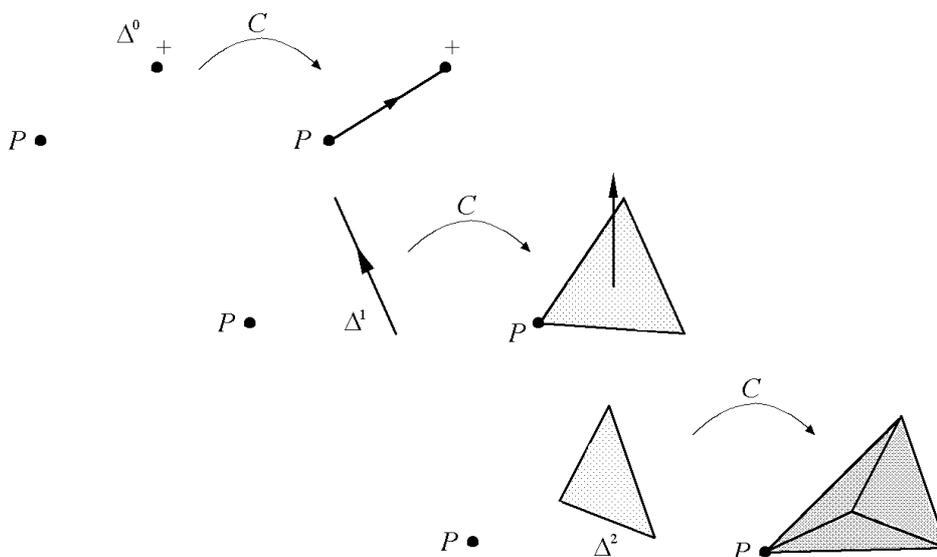


Figura 1.6: El cono al punto P de un símlice.

Para el caso  $p \geq 1$  necesitamos recordar la definición del pull-back de sigma "  $\delta\sigma$  ". Éste es el operador lineal "inducido" por la función  $\sigma : \mathcal{R}^p \rightarrow M$  de la siguiente manera (recordando que  $\Omega^p(M)$  es el espacio vectorial real de p-formas diferenciables sobre  $M$ )

$$\delta\sigma : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(\mathcal{R}^p) \tag{1.6}$$

$$\delta\sigma(\omega)(X_1, \dots, X_p) = \omega(d\sigma(X_1), \dots, d\sigma(X_p))$$

donde  $X_1, \dots, X_p$  son campos de vectores en  $\mathcal{R}^p$ , y  $\omega$  es una p-forma diferenciable sobre  $M$ .

Ahora la definición resulta más o menos esperable; se trata de bajar la forma a  $\mathcal{R}^p$  vía el pull-back:

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta^p} \delta\sigma(\omega). \tag{1.7}$$

Finalmente extendemos estas definiciones a p-cadenas linealmente, y si  $\mathbf{c} = \sum a_i \sigma_i$ , se define

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = \sum a_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

### El teorema de Stokes sobre p-cadenas

Un resultado muy importante sobre las cadenas es la versión del conocido teorema sobre k-formas. Para enunciarlo conviene recordar la definición de la

DIFERENCIAL EXTERIOR dada una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $r$ , la diferencial exterior es la única función lineal  $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$  (donde  $\Omega^*(M)$  son todas las formas diferenciables sobre  $M$ ), tal que:

1. es una antiderivación ( o sea  $d(u \wedge v) = d(u) \wedge v + (-1)^b u \wedge d(v)$  si  $u \in \Omega^b(M)$  )

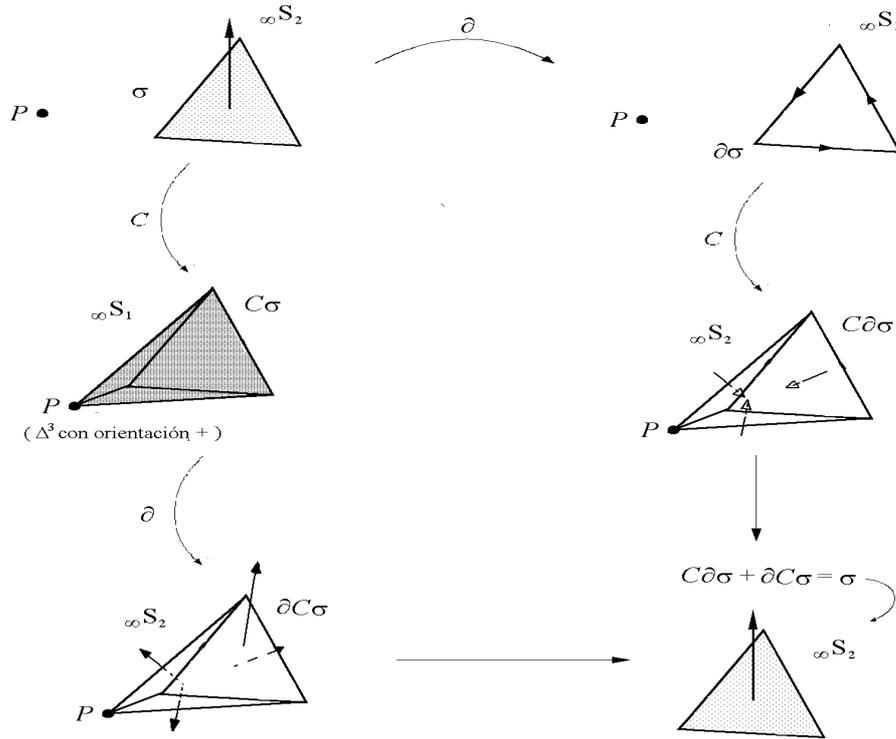


Figura 1.7: La reconstrucción de un 2-símplice a partir de su cono y su borde.

2. tiene grado +1 ( $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M) \quad \forall k$ )
3. si  $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ ,  $df$  es la diferencial de  $f$
4.  $d^2 = 0$ .

La demostración de existencia y unicidad puede verse en [6][2.20], pero el argumento esencial para demostrar la existencia es que si  $\omega \in \Omega^*(M)$ , entonces existe una expresión en coordenadas locales dada por una carta  $(U, x_1, \dots, x_r)$ , y allí

$$\omega = \sum_{i \in I} a_i dx_i$$

donde  $I = 2^{\{1, \dots, r\}}$  (partes del  $\{1, \dots, r\}$ ), las  $a_i \in C^\infty(U)$  y  $dx_i = dx_{s_1} \wedge \dots \wedge dx_{s_l}$  si  $i = \{s_1, \dots, s_l\}$  (y cuando  $i = \emptyset$ ,  $dx_i$  toma el valor de la función constante 1).

A partir de esto se define  $d\omega$  de la siguiente manera, se muestra que es una buena definición independiente de la carta elegida y que cumple lo pedido:

$$d\omega = \sum_{i \in I} da_i \wedge dx_i.$$

**TEOREMA (STOKES)** sea  $\mathbf{c}$  una  $p$ -cadena ( $p \geq 1$ ) en una variedad diferenciable  $M$ , y  $\omega$  una  $(p-1)$ - forma diferenciable definida en un entorno de la imagen de  $\mathbf{c}$ . Entonces vale la igualdad

$$\int_{\partial \mathbf{c}} \omega = \int_{\mathbf{c}} d\omega. \tag{1.8}$$

La demostración es esencialmente igual a la versión "clásica" para variedades con borde, y puede encontrarse en [12][4.7].

## 1.2. Homología y cohomología

### 1.2.1. Complejos diferenciales

Se llama *complejo diferencial* a una suma directa (indexada por los enteros) de espacios vectoriales  $D = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} D_i$  tal que existen homomorfismos

$$\dots \longrightarrow D_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} D_i \xrightarrow{d_i} D_{i-1} \longrightarrow \dots$$

de manera que se cumpla  $d^2 = d_i \circ d_{i+1} \equiv 0$  para todo  $i$ . El homomorfismo  $d$  es el *operador diferencial* del complejo  $D$ , y se define la *homología* de  $D$  (o "grupo de homología") a la suma directa de espacios vectoriales

$$H(D) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i(D) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\ker d \cap D_i}{\text{im } d \cap D_i}.$$

Por otro lado se puede pensar en los espacios duales  $D^i = (D_i)^*$  de cada uno de los espacios vectoriales  $D_i$ , y en los homomorfismos  $d^i = (d_i)^*$  adjuntos (es decir transpuestos) entre cada uno de ellos; así es como se obtiene el complejo

$$\dots \longrightarrow D^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} D^i \xrightarrow{d^i} D^{i+1} \longrightarrow \dots$$

(la posición de los índices convencionalmente indica si los morfismos "suben" o "bajan"), donde se verifica fácilmente que los morfismos siguen cumpliendo  $d^2 = d_{i-1} \circ d_i \equiv 0$  para todo  $i$ . A la suma directa de los cocientes correspondientes se la llama *cohomología* de  $D$ .

### Los complejos ${}_{\infty}H_p(M; \mathcal{R})$ y el complejo de DE RHAM

El primer ejemplo de complejo es precisamente el de la introducción: dada una variedad diferenciable  $M$ , si por un lado tomamos los espacios de  $p$ -cadenas para cada  $p \geq 0$ , y definimos el operador  $\partial_p$  como la restricción al  $S_p$  correspondiente, es decir

$$\partial_p : {}_{\infty}S_p(M, \mathcal{R}) \longrightarrow {}_{\infty}S_{p-1}(M, \mathcal{R}),$$

y por otro aceptamos que los  $S_p$  para  $p < 0$  son el espacio vectorial  $\{0\}$ , y los morfismos entre ellos el morfismo nulo, la identidad 1.4 dice que  $S(M, \mathcal{R}) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} {}_{\infty}S_p(M, \mathcal{R})$  es un complejo diferencial, y su homología se denomina "p-ésimo grupo de homología diferencial singular de  $M$  con coeficientes reales"

$${}_{\infty}H_p(M; \mathcal{R}) = \frac{\ker \partial_p}{\mathbf{im} \partial_{p+1}}$$

Los elementos de  $\ker \partial_p$  se denominan *p-ciclos diferenciales*, y los de  $\mathbf{im} \partial_{p+1}$  *p-bordes diferenciales*

Los resultados de la primera sección dicen exactamente que  $\infty H_p(\mathcal{R}^n; \mathcal{R})$  (o cualquier abierto convexo de  $\mathcal{R}^n$ , mirado como variedad) es el espacio vectorial nulo *para todo*  $p \in \mathbb{Z}$ , es decir, la homología singular de  $\mathcal{R}^n$  es nula.

El segundo ejemplo es un poco más complicado (y mucho más interesante) y va a requerir recordar varias definiciones importantes antes de empezar siquiera a plantearlo.

Dado un espacio topológico  $M$ , existen varias propiedades del mismo que son inherentes únicamente a la topología, es decir que son invariantes por homeomorfismos; éstas generalmente son utilizadas para obtener una buena "descripción" del espacio, a la vez que señalan cuáles podrían ser los posibles candidatos homeomorfos conocidos (y cuales no). Esto en general no resulta aceptable para el problema general de clasificación, ya que pedir que dos espacios sean homeomorfos es demasiado fuerte: así es como se introduce el concepto de "deformation retract", y con éste el de "tipo homotópico" del espacio. Si bien esta clasificación permite a espacios no homeomorfos caer dentro del mismo "tipo", resulta mucho más manejable (y más intuitivo) trabajar con ella.

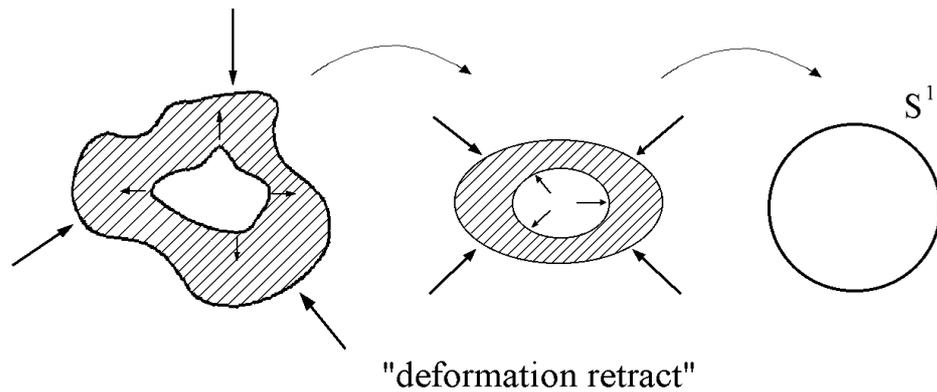


Figura 1.8: Dos espacios no homeomorfos con el mismo tipo homotópico.

Se puede pensar al tipo homotópico como una descripción del espacio "desde abajo", es decir por medio de funciones que salen de  $\mathcal{R}^n$  y "suben" al espacio, ya que en esencia la definición del  $n$ -ésimo grupo de homotopía del espacio topológico  $M$  es

$$\pi_n(M) = \{\text{clases de homotopía de funciones } f : S^n \rightarrow M\}.$$

Esta definición es aceptable incluso (recordando que  $S^0$  es el conjunto de dos puntos  $\{-1, 1\}$  en  $\mathcal{R}$ ) cuando  $n = 0$ , ya que en ese caso se obtienen las "clases homotopía de dos puntos" (la imagen en  $M$  de  $S^0$ ): aquellos puntos que pueden unirse por un arco continuo en  $M$  caen en la misma clase. Por lo tanto

$$\pi_0(M) = \{\text{componentes arcoconexas de } M\}.$$

Es bien sabido que en un espacio topológico con propiedades locales "buenas" (léase localmente arcoconexo), las componentes arcoconexas coinciden con las componentes conexas del espacio, y además todas ellas son abiertas; ahora bien: existe otra forma de obtener las componentes conexas de un espacio  $M$ , que es simplemente diciendo que en una componente conexa toda función *localmente constante* es globalmente constante.

Qué quiere decir exactamente esto último? Una definición directa de función localmente constante  $g : M \rightarrow \mathcal{R}$  diría que para todo punto  $p$  de  $M$  existe un entorno  $U_p$  de  $p$  tal que

$$g | U_p = cte \quad (1.9)$$

pero ya que estamos trabajando con variedades diferenciables solamente nos preocuparemos por las funciones que sean  $C^\infty$ , y podemos dar una mejor descripción si hacemos uso de la diferencial exterior y recordamos que  $d(g)(p) = dg(p)$  "la diferencial de  $g$  en  $p$ " cuando  $g$  es una 0-forma diferenciable sobre la variedad diferenciable  $M$  (o sea una función  $C^\infty$  con valores en  $\mathcal{R}$ ). Con esto es fácil deducir que una condición equivalente es pedir que cada punto  $p \in M$  tenga un entorno  $U_p$  donde

$$dg | U_p = 0 \quad (1.10)$$

interpretando ambos lados de la igualdad como 1-formas diferenciables sobre  $M$ . (Una idea de demostración sería tomar una carta  $(V, y)$  con  $V \subset U_x$ , abierto que contenga a  $x$ , y escribir la expresión en coordenadas locales  $g \circ y^{-1} | y(V) = cte.$ , a la que se deriva usando las coordenadas  $y$ . Si la dimensión de  $M$  es  $s$ ,  $y = (y_1, \dots, y_s)$  con lo que la diferencial toma la forma

$$dg = \frac{\partial g}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_s} dy_s$$

y por ende se obtienen las condiciones

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} | V = \frac{\partial (g \circ y^{-1})}{\partial y_i} | y(V) = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq s$$

ahora como funciones de  $\mathcal{R}^s$  en  $\mathcal{R}$ , donde la equivalencia de 1.9 y 1.10 es clara).

Llamaremos  $H^0(M)$  al espacio de las funciones localmente constantes sobre  $M$ , que resulta tener una estructura natural de  $\mathcal{R}$ -módulo y por ende de  $\mathcal{R}$ -espacio vectorial. Si  $M = \cup_{s \in S} C_s$ , donde los  $C_s$  son las componentes conexas (que la definición misma de variedad diferenciable hace que sean abiertas y cerradas a la vez, y además haya a lo sumo numerables de ellas), y consideremos los casos:

1.  $\#(S) < \aleph_0$  (por ejemplo, si  $M$  es compacta). En esta situación basta definir, para cada  $s \in S$ , una función  $g_s \in H^0(M)$  de la siguiente manera

$$g_s(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in C_s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y a partir de esto se deduce:

- a) Las  $g_s$  son linealmente independientes (basta ir evaluando en  $p_s \in C_s$ ).

- b) Si  $g \in H^0(M)$ , entonces es constante en cada componente conexa y por ende se puede escribir como combinación lineal -finita- de las  $g_s$ . (O sea que las  $g_s$  forman una base de  $H^0(M)$  como  $\mathcal{R}$  -espacio vectorial).

Estas dos observaciones sencillas llevan al importante resultado (cuando  $\#(S)$  es finito)

$$\#(S) = \#\{\text{componentes conexas de } M\} = \dim_{\mathcal{R}}[H^0(M)].$$

2.  $\#(S) = \aleph_0$ . A cada función  $f \in H^0(M)$ , asignémosle la sucesión  $\{a_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de la siguiente manera

$$a_n(f) = f|_{C_n}.$$

Es inmediato observar que la asignación de arriba es en realidad un isomorfismo, lo que prueba que  $H^0(M) \simeq \mathcal{R}^{\aleph_0}$ .

Podemos pensar entonces en la definición de  $H^0(M)$  como en un concepto "dual" al del grupo de homotopía  $\pi_0(M)$ , ya que la información la brindan ahora funciones que "bajan" de la variedad (vista como espacio topológico) a  $\mathcal{R}$ . El resto de la discusión de esta sección se centrará en definir análogos de  $H^0(M)$  para dimensiones mayores " $H^n(M)$ ", de manera que sigan siendo el objeto "dual" (en algún sentido) a los grupos de homotopía superiores  $\pi_n(M)$ .

Es evidente que estudiar nada más que las funciones (0-formas) no será suficiente, y por lo tanto es conveniente pasar a  $k$ -formas diferenciables, y mirar  $H^0(M)$  desde otro ángulo: como sus elementos son exactamente las soluciones de la ecuación diferencial  $dg = 0$ , no es disparatado pensar que los  $H^n(M)$  serán la solución a algún sistema de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, al trabajar con 0-formas las pensamos como funciones sobre los puntos de  $M$ , y nos quedamos con aquellas que permanecían constantes por pequeñas variaciones del punto donde las evaluamos; por lo tanto si trabajamos con 1-formas en  $M$  podemos pensarlas ahora como funciones sobre "caminos" o "arcos" -siguiendo con el concepto de "dualidad" con  $\pi_1$ - de la siguiente forma (aquí  $\gamma$  es un arco sobre  $M$  y  $\lambda$  una 1-forma diferenciable)

$$F_\lambda : \{\text{lazos en } M\} \longrightarrow \mathcal{R} \\ \gamma \mapsto \int_\gamma \lambda$$

quedándonos con aquellas 1-formas que hagan que la integral permanezca constante por pequeñas variaciones de  $\gamma$  que dejen fijos los extremos. Aplicando el teorema de Stokes a este caso particular se obtiene que las 1-formas  $g$  que sean la diferencial exterior de una 0-forma  $f$  cumplirán automáticamente esta condición, ya que en este caso

$$\int_\gamma g = \int_\gamma df = \int_{\partial\gamma=\{P,Q\}} f = f(P) - f(Q)$$

y entonces la integral no depende del camino  $\gamma$  elegido. También resulta de utilidad Stokes para dar una descripción más cómoda de las 1-formas que buscamos: consideremos dos arcos  $\gamma$  y  $\alpha$  con los mismos extremos de manera que estén lo suficientemente cerca para que la integral valga lo mismo, y llamemos  $D$  a la región encerrada por el lazo  $\gamma * (\bar{\alpha})$ . Se tiene

$$\int_\gamma \lambda = \int_{\gamma * (\bar{\alpha})} \lambda + \int_\alpha \lambda = \int_D d\lambda + \int_\alpha \lambda \quad \text{y por consiguiente} \quad \int_D d\lambda = 0 \quad \forall D.$$

De aquí uno puede concluir que las 1-formas que estamos buscando son aquellas que cumplen la ecuación diferencial  $d\lambda = 0$ , y para evitar los casos triviales se puede tomar el cociente como  $\mathcal{R}$  – *módulo* de este espacio sobre el de las 1-formas que provienen de una 0-forma por medio de la diferencial exterior; es decir

$$H^1(M) = \frac{\{1\text{-formas } \lambda \mid d\lambda = 0\}}{\{1\text{-formas } g \mid \exists 0\text{-forma } f, \text{ con } g = df\}}.$$

Con consideraciones similares sobre n-formas diferenciables e integrales de n-volumen se llega a una definición satisfactoria para los  $H^n(M)$ : conviene recordar que una n-forma  $f$  se dice *cerrada* cuando  $df = 0$ , y se denomina *exacta* cuando existe una (n-1)-forma  $g$  tal que  $f = dg$ .

Podemos (finalmente) hablar del segundo ejemplo de complejo diferencial, que será el objeto central de estudio de estas notas: dada una variedad diferenciable  $M$  y sus espacios de k-formas diferenciables  $\Omega^k(M)$ , si llamamos  $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega^k(M)$ , la diferencial exterior  $d$  induce un complejo sobre  $\Omega^*(M)$

$$\dots \longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \dots$$

con k-grupo de cohomología

$$H^k(M) = H^k(\Omega^*(M)) = \frac{\{k\text{-formas cerradas}\}}{\{k\text{-formas exactas}\}},$$

que se denomina *k-ésima cohomología de De Rham de M*, donde por convención  $H^k(M) = \{0\}$  si  $k < 0$ , y los  $d$  son el morfismo nulo.

La cohomología correspondiente se denota

$$H^*(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(M)$$

y se conoce como *cohomología de De Rham* (o simplemente cohomología) de la variedad  $M$ .

### 1.2.2. La relación entre ${}_{\infty}H_p(M; \mathcal{R})$ y $H^p(M)$

Es posible encontrar una "representación" conocida del espacio dual del p-ésimo grupo de homología singular de una variedad  $M$ , con el que tratamos en la introducción; es decir, mostrar elementos de su dual que sean manejables. Para ello basta ver que dada una p-forma diferenciable  $\omega$  sobre  $M$ , su integral sobre p-cadenas  $\alpha$  (tal como fue definida en la ecuación 1.7) actúa como una funcional lineal a valores en  $\mathcal{R}$ ; pero hay algo todavía más importante, y es que esta funcional se puede pasar al cociente, obteniendo así que cada elemento  $[\omega]$  de  $H^p(M)$  define una única funcional sobre elementos  $[\alpha]$  de  ${}_{\infty}H_p(M; \mathcal{R})$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \varphi_{[\omega]} : {}_{\infty}H_p(M; \mathcal{R}) &\longrightarrow \mathcal{R} \\ [\alpha] &\longmapsto \int_{\alpha} \omega \end{aligned}$$

La prueba de que la funcional está bien definida y no depende del representante de la forma  $[\omega]$  ni del representante de la cadena  $[\alpha]$  es simplemente mirar con atención el teorema de Stokes para cadenas en la ecuación 1.8.

Podemos pensar entonces en el morfismo  $F$  de espacios vectoriales

$$F : H^p(M) \longrightarrow {}_{\infty}H_p(M; \mathcal{R})^* \tag{1.11}$$

$$F([\omega])([\alpha]) = \int_{\alpha} \omega$$

el cual dice que todas las  $p$ -formas diferenciables pueden ser asimiladas como elementos del espacio dual de la  $p$ -homología singular; esto parece suficiente en términos de "interpretar" el dual, pero un resultado mucho más fuerte -e importante- (que no probaremos aquí, pero puede verse en [12][5.34]) es el

TEOREMA (DE RHAM) el morfismo  $F$  definido en 1.11 es un isomorfismo (conocido como isomorfismo de *De Rham*).

En otras palabras: la cohomología de *De Rham* de una variedad es el espacio dual de la homología singular de la misma.



## Capítulo 2

# La cohomología de las formas

### 2.1. Tres resultados importantes

#### 2.1.1. La cohomología de un producto por $\mathcal{R}$ ( $M \times \mathcal{R} = M$ )

Es necesario recordar que si  $f$  es una función  $C^\infty$  entre dos variedades  $M$  y  $N$  ( $f : M \rightarrow N$ ), ésta induce un homomorfismo entre los espacios de formas diferenciables respectivos (vía el *pull-back* de  $f$ , definido en 1.10), cuya expresión en coordenadas locales -si  $(V, y)$  es una carta de  $N$ - es

$$\begin{aligned} \delta f : \Omega^*(N) &\longrightarrow \Omega^*(M) \\ \sum a_i \cdot dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k} &\mapsto \sum (a_i \circ f) \cdot df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k} \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde como siempre  $f_i = y_i \circ f$ , y de donde resulta bastante claro que el pull-back

1. manda  $k$ -formas en  $k$ -formas
2. en el caso  $k = 0$ , 2.1 dice  $\delta f(g) = g \circ f$
3.  $\delta f(u \wedge v) = \delta f(u) \wedge \delta f(v)$ .

A partir de estas expresiones y mediante la regla de la cadena se deduce la PROPOSICIÓN 2.1 el pull-back de  $f$  conmuta con la diferencial exterior  $d$ .

DEMOSTRACIÓN

$$d(\delta f(a_i \cdot dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k})) = d((a_i \circ f) \cdot df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}) = d(a_i \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k},$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
\delta f (d(a_i \cdot dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k})) &= \delta f (da_i \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) \\
&= \delta f \left( \left( \sum_j \frac{\partial a_i}{\partial y_j} \cdot dy_j \right) \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k} \right) \\
&= \left( \sum_j \left( \frac{\partial a_i}{\partial y_j} \circ f \right) \cdot df_j \right) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k} \\
&= \left( \sum_j \left( \frac{\partial (a_i \circ f)}{\partial y_j} \right) \cdot dy_j \right) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k} \\
&= d(a_i \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}. \square
\end{aligned}$$

Por consiguiente puede tomarse la restricción del pull-back a las formas diferenciables **cerradas** sobre ambas variedades, ya que

$$\text{si } \omega \in \Omega^*(N) \text{ y } d\omega = 0 \implies d(\delta f(\omega)) = \delta f(d\omega) = \delta f(0) = 0.$$

A partir de esto tenemos el siguiente diagrama conmutativo (donde todas las  $d$  son la diferencial exterior)

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & \Omega^{k-1}(N) & \xrightarrow{d_N^{k-1}} & \Omega^k(N) & \xrightarrow{d_N^k} & \Omega^{k+1}(N) & \longrightarrow & \dots \\
& & \downarrow \delta f & & \downarrow \delta f & & \downarrow \delta f & & \\
\dots & \longrightarrow & \Omega^{k-1}(M) & \xrightarrow{d_M^{k-1}} & \Omega^k(M) & \xrightarrow{d_M^k} & \Omega^{k+1}(M) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

que dice que los morfismos

$$\begin{aligned}
\delta f^k : \frac{\ker d_N^k}{\text{im } d_N^{k-1}} \subset \Omega^k(N) &\longrightarrow \frac{\ker d_M^k}{\text{im } d_M^{k-1}} \subset \Omega^k(M) \\
[\omega] &\longmapsto [\delta f(\omega)]
\end{aligned}$$

están bien definidos.

En otras palabras,  $f$  induce morfismos entre las  $k$ -ésimas cohomologías de *De Rham* de las dos variedades

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & H^{k-1}(N) & \xrightarrow{d} & H^k(N) & \xrightarrow{d} & H^{k+1}(N) & \longrightarrow & \dots \\
& & \downarrow \delta f^{k-1} & & \downarrow \delta f^k & & \downarrow \delta f^{k+1} & & \\
\dots & \longrightarrow & H^{k-1}(M) & \xrightarrow{d} & H^k(M) & \xrightarrow{d} & H^{k+1}(M) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

que por simplicidad en general se anotan

$$f^* : H^*(N) \longrightarrow H^*(M).$$

Es relativamente sencillo verificar que los funtores  $\Omega^*$  y  $H^*$  son realmente funtores contravariantes, es decir que si  $M, N$  y  $P$  son variedades, y si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables tales que

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

entonces valen

$$\delta(g \circ f) = \delta f \circ \delta g \quad \text{y}$$

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

obteniéndose (por ejemplo en el caso de cohomologías) el diagrama de homomorfismos

$$H^*(P) \xrightarrow{g^*} H^*(N) \xrightarrow{f^*} H^*(M).$$

Es evidente además que el operador  $f^*$  sigue conmutando con  $d$ , y que cumple los puntos 1, 2 y 3 del comienzo.

Ahora que terminamos de introducir la idea de pull-back inducido por una función, consideremos una variedad diferenciable  $M$ ,  $\mathcal{R}$  la variedad de la recta con la carta usual  $(\mathcal{R}, id)$ , y el producto (como variedades)  $M \times \mathcal{R}$ .

PROPOSICIÓN 2.2 vale el isomorfismo de cohomologías

$$H^*(M \times \mathcal{R}) \simeq H^*(M). \quad (2.2)$$

DEMOSTRACIÓN consideremos primero las funciones

1.  $s_t : M \rightarrow M \times \mathcal{R}$  la  $t$ -sección (es decir  $s_t(m) = (m, t)$ , con  $t \in \mathcal{R}$  fijo, arbitrario)
2.  $\pi$  la proyección en la primera coordenada.

A partir de ellas veremos que

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathcal{R} & & H^*(M \times \mathcal{R}) \\ \text{la relación} & \pi \downarrow \uparrow s_t & \text{induce} \\ & & \text{morfismos} & \pi^* \uparrow \downarrow s_t^* \\ M & & H^*(M) \end{array} \quad (2.3)$$

que resultan isomorfismos y además uno es el inverso del otro.

En un sentido es sencillo: como  $\pi \circ s_t = id_M$ , resulta inmediato que  $s_t^* \circ \pi^* = id_{H^*(M)}$

Para probar la otra igualdad, aunque en general  $s_t \circ \pi(m, r) = (m, t) \forall r \in \mathcal{R}$  y evidentemente  $\delta\pi \circ \delta s_t \neq id_{\Omega^*(M \times \mathcal{R})}$  al nivel de formas diferenciables, vamos a probarla al nivel de clases de equivalencia de formas, encontrando un operador  $K : \Omega^*(M \times \mathcal{R}) \rightarrow \Omega^*(M \times \mathcal{R})$  tal que

$$1 - \delta\pi \circ \delta s_t = \pm d \circ K \pm K \circ d \quad (2.4)$$

con lo que (en cualquiera de los casos) si  $[\omega] \in H^*(M \times \mathcal{R}) \implies d\omega = 0$  y por ende

$$\begin{aligned} (1 - \pi^* \circ s_t^*)[\omega] &= [(\pm d \circ K \pm K \circ d)\omega] \\ &= [\pm d \circ K\omega \pm K \circ d\omega] = [\pm d(K\omega) \pm K(0)] \\ &= [\pm d(K\omega)] = [0] \end{aligned}$$

$$\text{o sea } \pi^* \circ s_t^* = id_{H^*(M \times \mathcal{R})}.$$

Un operador como en 2.4 se conoce como *operador de homotopía*, y cuando existe decimos que  $\delta\pi \circ \delta s_t$  es *homotópica por cadena* a la identidad. Si volvemos a mirar la ecuación 1.5 en la sección 1.1.2, veremos que allí obtuvimos un operador de homotopía en el espacio de simplices, y con él probamos que la identidad de este espacio es homotópica por cadena al operador nulo, que en otras palabras, es la observación que hicimos posteriormente acerca de que la homología singular de  $R^n$  es nula (en la sección 1.2.1).

Por la definición misma del producto de variedades, si  $\{U_\alpha\}$  es un atlas para  $M$ ,  $\{U_\alpha \times \mathcal{R}\}$  es un atlas para  $M \times \mathcal{R}$ , y si  $(U, x)$  es una carta de  $M$  entonces  $(U \times \mathcal{R}, (x, r))$  es una carta de  $M \times \mathcal{R}$ , y el álgebra generada por los pull-back  $\pi^*(dx_i)$  -vía  $\pi$ - de los  $dx_i$ , junto con  $dr$  es claramente  $\Omega^*(M \times \mathcal{R})$ , con lo cual toda forma diferenciable en  $M \times \mathcal{R}$  es una combinación lineal de los siguientes tipos de formas

$$\begin{aligned} I & f(m, r) \cdot (\pi^*\phi) \\ II & g(m, r) \cdot (\pi^*\omega) \wedge dr \end{aligned}$$

donde  $\phi$  y  $\omega$  son formas diferenciables sobre  $M$ . Es sobre ellas que definimos entonces el operador  $K : \Omega^k(M \times \mathcal{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(M \times \mathcal{R})$  como

$$\begin{aligned} I & f(m, r) \cdot (\pi^*\phi) && \mapsto 0 \\ II & g(m, r) \cdot (\pi^*\omega) \wedge dr && \mapsto \int_t^r g(m, s) ds \cdot (\pi^*\omega). \end{aligned}$$

Para chequear que realmente  $K$  es un operador de homotopía, consideremos los dos casos:

### 1. Sobre formas de tipo I

$$\begin{aligned} \omega &= f(m, r) \cdot (\pi^*\phi) && \text{con } \omega \in \Omega^k(M \times \mathcal{R}) \text{ con lo cual} \\ (1 - \delta\pi \circ \delta s_t)\omega &= f(m, r) \cdot (\pi^*\phi) - f(m, t) \cdot (\pi^*\phi) \\ &= [f(m, r) - f(m, t)] \cdot (\pi^*\phi) && \text{por un lado,} \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
(d \circ K - K \circ d)\omega &= -Kd\omega = -K(df \wedge (\pi^*\phi) + f \cdot d(\pi^*\phi)) \\
&= -K\left(\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot (\pi^*dx_i) + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot dr\right) \wedge (\pi^*\phi) + f \cdot \pi^*(d\phi)\right) \\
&= -K\left(\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot (\pi^*dx_i)\right) \wedge (\pi^*\phi) + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot dr \wedge (\pi^*\phi)\right) \\
&= -K\left(\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot (\pi^*dx_i) \wedge (\pi^*\phi)\right) + (-1)^k \frac{\partial f}{\partial r} \cdot (\pi^*\phi) \wedge dr\right) \\
&= -K\left(\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \pi^*(dx_i \wedge \phi)\right) + (-1)^k \frac{\partial f}{\partial r} \cdot (\pi^*\phi) \wedge dr\right) \\
&= (-1)^{k-1}(\pi^*\phi) \cdot \int_t^r \frac{\partial f}{\partial s} |_{(m,s)} ds \\
&= (-1)^{k-1}(\pi^*\phi) \cdot [f(m, r) - f(m, t)] ,
\end{aligned}$$

con lo que se verifica la igualdad

$$1 - \delta\pi \circ \delta s_t = (-1)^{k-1}(d \circ K - K \circ d).$$

## 2. Sobre formas de tipo $II$

$$\begin{aligned}
\omega &= g(m, r) \cdot (\pi^*\omega) \wedge dr \quad \text{con } \omega \in \Omega^k(M \times \mathcal{R}) \\
d\omega &= dg \wedge (\pi^*\omega) \wedge dr + g \cdot d(\pi^*\omega) \wedge dr \\
&= \left(\sum \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot (\pi^*dx_i) + \frac{\partial g}{\partial r} \cdot dr\right) \wedge (\pi^*\omega) \wedge dr + g \cdot \pi^*(d\omega) \wedge dr \\
(d\omega \wedge dr=0) \Rightarrow &= \sum \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \pi^*(dx_i \wedge \omega) \wedge dr + g \cdot \pi^*(d\omega) \wedge dr
\end{aligned}$$

así que se obtiene la identidad (recordando que  $t$  es constante)

$$(1 - \delta\pi \circ \delta s_t)\omega = \omega \quad \text{porque } \delta s_t(dr) = d(\delta s_t(r)) = d(r \circ s_t) = dt = 0. \quad (2.5)$$

Ahora lo que hay que hacer es calcular

$$Kd\omega = \int_t^r \left(\sum \frac{\partial g}{\partial x_i} |_{(m,s)} ds\right) \cdot \pi^*(dx_i \wedge \omega) + \int_t^r g(m, s) ds \cdot \pi^*(d\omega)$$

por un lado, y por otro

$$\begin{aligned}
-d(K\omega) &= -d\left(\int_t^r g(m,s)ds \cdot (\pi^*\omega)\right) \\
&= -g(m,r) \cdot dr \wedge (\pi^*\omega) - \left(\int_t^r \left(\sum \frac{\partial g}{\partial x_i} |_{(m,s)} \cdot \pi^*(dx_i)\right) ds\right) \wedge (\pi^*\omega) - \\
&\quad - \int_t^r g(m,s)ds \cdot d(\pi^*\omega) \\
&= -((-1)^k g(m,r) \cdot (\pi^*\omega) \wedge dr) - \\
&\quad - \left(\int_t^r \sum \frac{\partial g}{\partial x_i} |_{(m,s)} ds\right) \cdot \pi^*(dx_i) \wedge (\pi^*\omega) - \\
&\quad - \int_t^r g(m,s)ds \cdot \pi^*(d\omega) \\
&= (-1)^{k-1} g(m,r) \cdot (\pi^*\omega) \wedge dr - \\
&\quad - \int_t^r \left(\sum \frac{\partial g}{\partial x_i} |_{(m,s)} ds\right) \cdot \pi^*(dx_i \wedge \omega) - \int_t^r g(m,s)ds \cdot \pi^*(d\omega),
\end{aligned}$$

y sumarlos; comparando el resultado con 2.5 obtenemos nuevamente

$$1 - \delta\pi \circ \delta s_t = (-1)^{k-1}(d \circ K - K \circ d). \square$$

### 2.1.2. La cohomología como invariante homotópico

En esta sección, diremos que dos funciones son  $C^\infty$  *homotópicas* si existe una homotopía de clase  $C^\infty$  entre ellas.

**PROPOSICIÓN 2.3** si  $f$  y  $g$  son dos funciones diferenciables entre las variedades diferenciables  $M$  y  $N$ , tales que  $f$  es  $C^\infty$  homotópica a  $g$ , entonces  $f^* = g^*$ . (i.e. inducen el mismo homomorfismo entre cohomologías)

**DEMOSTRACIÓN** sea  $F$  de clase  $C^\infty$  la homotopía entre ambas funciones, es decir

$$F : M \times I \longrightarrow N$$

$$\begin{aligned}
(m, 0) &\mapsto f(m) \\
(m, 1) &\mapsto g(m),
\end{aligned}$$

y consideremos  $s_0$  y  $s_1$  a las secciones de  $M$  en 0 y 1 respectivamente, como en la proposición 2.2 (relación 2.3).

La primera observación es que ambas secciones inducen una inversa de  $\pi^*$ , y son todos isomorfismos, luego  $s_0^* = s_1^*$  como morfismos de  $H^*(M \times \mathcal{R})$  en  $H^*(M)$ .

Por otra parte, como

$$\begin{aligned}
f &= F \circ s_0 \\
g &= F \circ s_1
\end{aligned}$$

se obtiene

$$f^* = (F \circ s_0)^* = s_0^* \circ F^* = s_1^* \circ F^* = (F \circ s_1)^* = g^*$$

que es el resultado que buscábamos.  $\square$

Vamos a decir que dos espacios  $P$  y  $Q$  (variedades diferenciables) tienen el mismo *tipo homotópico en el sentido  $C^\infty$*  cuando existen funciones diferenciables

$$\begin{aligned} u : P &\longrightarrow Q \\ v : Q &\longrightarrow P \end{aligned}$$

tales que  $u \circ v$  es  $C^\infty$  homotópica a la identidad de  $Q$ , y  $v \circ u$  es  $C^\infty$  homotópica a la identidad de  $P$ . Está claro que esta es (en principio) una clasificación más "rígida", es decir que dos variedades con el mismo tipo homotópico en este sentido tienen automáticamente el mismo tipo homotópico en el sentido usual (es decir, continuo).

Utilizando la proposición 2.3 se deduce que si existen  $u$  y  $v$  en las condiciones de arriba, entonces

$$\begin{aligned} v^* \circ u^* &= (u \circ v)^* = id_{H^*(Q)} \quad y \\ u^* \circ v^* &= (v \circ u)^* = id_{H^*(P)} \quad . \end{aligned}$$

Es decir,  $u^*$  y  $v^*$  son isomorfismos, y uno es el inverso del otro. Con esto hemos probado la

PROPOSICIÓN 2.4      dos variedades diferenciables con el mismo tipo homotópico (en el sentido  $C^\infty$ ) tienen la misma cohomología de *De Rham*.

Antes de seguir adelante necesitamos un lema, bastante técnico, pero de gran relevancia ya que utiliza propiedades excluyentes de las variedades para llegar a una conclusión muy general. (Esta parte es no apta para escépticos, ya que no vamos a dar una demostración rigurosa, sino que vamos a dar una idea de como se hace la construcción. Una demostración completa utilizando aproximaciones de la identidad puede hallarse en [11][Part I,6.7])

LEMA      toda función continua  $f : P \rightarrow Q$  entre dos variedades diferenciables, tal que  $f$  es diferenciable sobre un subconjunto cerrado  $C \subset P$ , es continuamente homotópica a una función  $h : P \rightarrow Q$ , diferenciable sobre todo  $P$ , que verifica  $h(p) = f(p)$  para  $p \in C$ .

DEMOSTRACIÓN      primero veamos el caso  $Q = \mathcal{R}$ . Si consideramos el gráfico de  $f$  en  $P \times \mathcal{R}$ , podemos ver que dado un  $\varepsilon$  cualquiera, es posible encontrar una función diferenciable  $h$  que coincide con  $f$  sobre  $C$ , y cae dentro de una banda de ancho  $\varepsilon$  alrededor de  $f$ , según se ve en la figura 2.1.

La manera concreta de construir  $h$  (si  $\dim M = d$ ) es tomar cartas  $(V_x, \psi_x)$  para cada  $x$  en  $P$ , y considerar las funciones  $f \circ \psi_x^{-1} : \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}$  a las cuales se las convolucionan con un núcleo adecuado para obtener funciones diferenciables que coincidan con estas sobre  $\psi_x(C \cap V_x)$ . Se prueba entonces que se puede hallar una función globalmente definida  $r : \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}$  que coincide con estas en cada  $\psi_x(V_x)$ , con lo cual para cada punto  $x$  de  $P$  la función  $h = r \circ \psi_x : V_x \rightarrow \mathcal{R}$  es la buscada. Lo que si resulta evidente de la figura 2.1, es que el entorno de ancho  $\varepsilon$  puede ir deformándose en forma continua hasta pegarse al gráfico de  $f$ , lo que prueba que la función  $h$  puede deformarse en forma continua sobre  $f$ .

Ahora veamos el caso general: si  $f : P \rightarrow Q$  es una función continua entre variedades, diferenciable sobre el cerrado  $C \subset P$ , tomemos

$$g : Q \longrightarrow \mathcal{R}^n$$

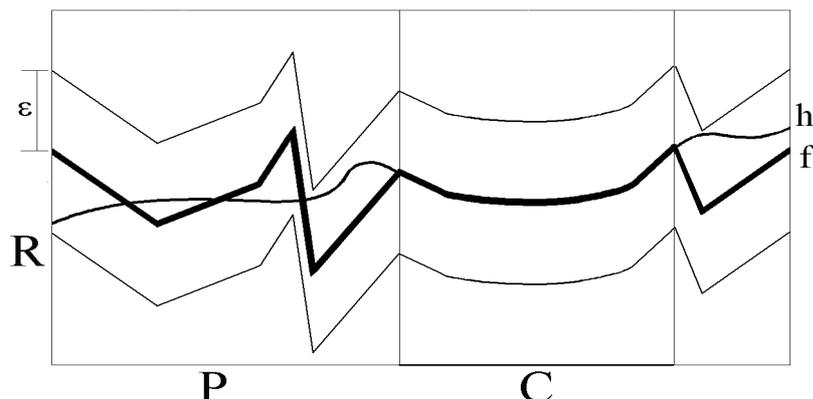


Figura 2.1: Una función diferenciable a valores en un entorno de  $f$ , que coincide con ella sobre un cerrado.

un *imbedding* diferenciable  $g$ , que "meta" la variedad de llegada dentro de  $\mathcal{R}^n$  como subvariedad cerrada: esto siempre es posible si uno elige  $n$  suficientemente grande, según asegura el Teorema de Whitney; ver [4][Ch1, pág.12]. (En realidad el teorema asegura que es posible hacerlo para  $n = 2 \dim Q + 1$ )

Si la función

$$g \circ f : P \longrightarrow g(N) \subset \mathcal{R}^n$$

es continuamente homotópica a una función diferenciable, obtendremos que también  $f$  lo será, ya que

$$f = g^{-1} \circ (g \circ f)$$

y en la demostración del Teorema de Whitney se obtiene que  $g$  es en realidad un difeomorfismo. Por otro lado es evidente que  $g \circ f$  es diferenciable sobre  $C$ .

Podemos suponer entonces que la variedad de llegada es una subvariedad de  $\mathcal{R}^n$ , y entonces

$$f = (f_1, \dots, f_n)$$

donde las  $f_i$  son funciones de  $P$  a valores reales. Para cada una de ellas tenemos una función diferenciable  $h_i : P \rightarrow \mathcal{R}$  en un entorno  $\varepsilon$  de cada  $f_i$ , las cuales definen una función  $h : P \rightarrow \mathcal{R}^n$  que toma valores en un entorno de la variedad de llegada  $Q$  como en la figura 2.2:

Pero puede verse que todo entorno de este tipo en  $\mathcal{R}^n$  puede deformarse sobre la variedad  $Q$  en forma diferenciable por medio de una función  $k : \mathcal{R}^n \rightarrow Q$  (para definir formalmente  $k$  hay que tomar el espacio tangente en cada punto de la variedad y mirar su complemento ortogonal, tomando, para los puntos del  $\varepsilon$ -entorno que se hallan sobre él, la proyección sobre el punto de la variedad); por lo tanto la función

$$k \circ h : P \longrightarrow Q$$

es una función diferenciable homotópica a  $f$ .  $\square$

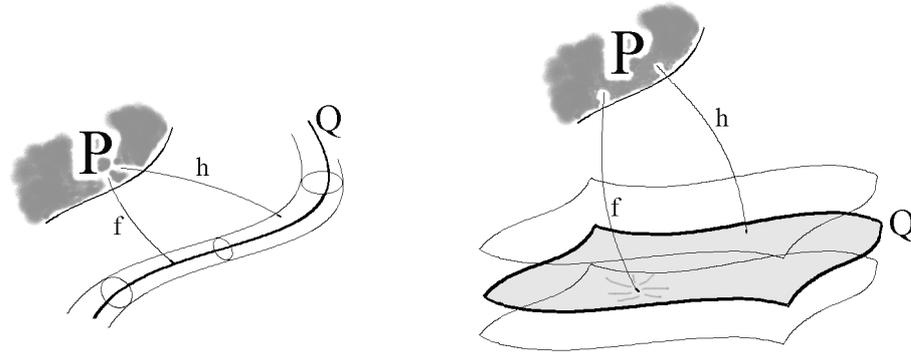


Figura 2.2: La función diferenciable  $h$  toma valores en un entorno de la variedad de llegada.

leyendo atentamente el lema, vemos que si lo aplicamos al caso  $P = S^n$ ,  $C = \emptyset$  y  $Q$  una variedad diferenciable cualquiera, llegamos a la conclusión de que al hablar de los grupos de homotopía de una variedad podemos pensar que todos sus elementos son  $C^\infty$ , ya que según vimos en la sección 1.2.1

$$\pi_n(Q) = \{\text{clases de homotopía (continua) de funciones } g : S^n \rightarrow Q\}$$

y el lema dice que siempre existe en cada clase un representante diferenciable.

Pero esto no es todo lo que podemos decir, ya que el lema es aún más fuerte, y nos dice que las homotopías pueden ser reemplazadas por homotopías  $C^\infty$ ; esta observación nos lleva a la demostración del último ingrediente necesario para postular el resultado central de esta sección (vamos a utilizar las notaciones  $\approx^c$  para homotopías continuas y  $\approx^\infty$  para homotopías de clase  $C^\infty$ )

**PROPOSICIÓN 2.5** dos variedades diferenciables tienen el mismo tipo homotópico si y sólo si tienen el mismo tipo homotópico en el sentido  $C^\infty$ .

**DEMOSTRACIÓN** en un sentido es trivial, como remarcamos más arriba, ya que la existencia de funciones que sean homotópicas en el sentido  $C^\infty$  a las respectivas identidades es mucho más de lo necesario para construir un isomorfismo entre los grupos de homotopía de una y otra variedad. Pasemos entonces a probar la otra implicación, suponiendo que existen funciones entre las variedades  $A$  y  $B$  que inducen isomorfismos entre los grupos de homotopía de éstas, o sea supongamos que existen

$$\begin{aligned} u : A &\longrightarrow B \\ v : B &\longrightarrow A \end{aligned}$$

funciones continuas tales que  $u \circ v \approx^c id_B$ , y  $v \circ u \approx^c id_A$ . Por el lema que probamos, podemos tomar dos funciones diferenciables  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow A$  entre ambas variedades tales que  $f \approx^c u$  y  $g \approx^c v$ , de donde se deduce que

$$f \circ g \approx^c u \circ v \approx^c id_B \quad \text{y también que } g \circ f \approx^c v \circ u \approx^c id_A.$$

Esto, en otras palabras, es decir que existe una homotopía continua

$$G : A \times I \longrightarrow A$$

$$\text{tal que } \begin{cases} G(a, 0) = (g \circ f)(a) \\ G(a, 1) = id_A(a) = a, \end{cases}$$

pero una nueva aplicación del lema en el caso  $P = A \times I$ ,  $C = A \times \{0\} \cup A \times \{1\}$  nos dice (observando que sobre  $C$ , la homotopía  $G$  es diferenciable porque coincide con las funciones diferenciables  $id_A$  y  $g \circ f$ ) que existe una nueva homotopía  $F$ , diferenciable, que coincide con esta sobre  $C$ , y por ende

$$\begin{aligned} F(a, 0) &= G(a, 0) = (g \circ f)(a) \\ F(a, 1) &= G(a, 1) = a, \text{ o sea } g \circ f \approx^\infty id_A \end{aligned}$$

El mismo razonamiento para el caso  $f \circ g \approx^c id_B$  nos da que  $f \circ g \approx^\infty id_B$ .  $\square$

De la proposición anterior, junto con la 2.4, se deduce trivialmente el resultado fundamental de esta sección:

**PROPOSICIÓN 2.6** dos variedades con el mismo tipo homotópico tiene la misma cohomología de *De Rham*.

- Otra manera de ver esto último es demostrando que la homología singular de una variedad es un invariante topológico, y utilizar el isomorfismo del teorema de *De Rham* (sección 1.2.2) para llegar a la conclusión, pero todo esto requiere herramientas fuera de nuestro alcance (teoría de haces).

### 2.1.3. La sucesión de Mayer-Vietoris

El último resultado que demostraremos es útil para describir la cohomología de una variedad a través de las cohomologías de un cubrimiento por un par de abiertos cualquiera de la misma, y será necesario para obtener la cohomología de  $S^n$  en la sección 2.2.2.

Consideremos el caso de dos abiertos  $U$  y  $V$  en una variedad diferenciable  $M$ , de manera que  $M = U \cup V$ . Llamando  $\partial_U$  y  $\partial_V$  a las inclusiones de  $U \cap V$  dentro de  $U$  y  $V$  respectivamente,  $i_U$  e  $i_V$  a las inclusiones de  $U$  y  $V$  dentro de  $M$ , y pensando a los abiertos como subvariedades (con la topología inducida) de  $M$ , tenemos las inclusiones

$$\begin{array}{c} \partial_U \\ U \cap V \rightrightarrows U \amalg V \rightarrow M \\ \partial_V \end{array}$$

Aplicando el funtor  $\Omega^*$  se obtiene la sucesión de "restricciones" de formas

$$\Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta\partial_U} \\ \xrightarrow{\delta\partial_V} \end{array} \Omega^*(U \cap V)$$

donde por restricción de una forma diferenciable a una subvariedad debemos entender su imagen vía el pull-back inducido por la inclusión.

Si llamamos  $\Delta$  a la diferencia de los últimos dos morfismos, y  $F$  a la inclusión en la suma directa, tenemos la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega^*(M) & \xrightarrow{F} & \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) & \xrightarrow{\Delta} & \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0 \\ & & \lambda & \mapsto & (\delta i_U(\lambda), \delta i_V(\lambda)) & & \\ & & & & (\alpha, \beta) & \mapsto & \delta \partial_V(\beta) - \delta \partial_U(\alpha) \end{array}$$

conocida como *sucesión de Mayer-Vietoris*.

PROPOSICIÓN 2.6 la sucesión de Mayer-Vietoris es exacta.

DEMOSTRACIÓN la exactitud de la primera parte es trivial, ya que si  $\delta i_U(\lambda) = 0$  y  $\delta i_V(\lambda) = 0$ , entonces  $\lambda|_U \equiv 0$  y  $\lambda|_V \equiv 0$ , así que  $\lambda$  era nula.

La segunda parte es como sigue: para la inclusión  $\mathbf{im} F \subset \ker \Delta$  vamos a llamar  $i_M$  a la inclusión de  $U \cap V$  en  $M$ , y entonces está claro que

$$(i_V \circ \partial_V) = (i_U \circ \partial_U) = i_M,$$

con lo cual la prueba de que todo par proveniente de  $\Omega^*(M)$  via  $\delta i_U$  e  $\delta i_V$  está en el núcleo de  $\Delta$  es la cuenta

$$\begin{aligned} \Delta(\delta i_U(\lambda), \delta i_V(\lambda)) &= \delta \partial_V(\delta i_V(\lambda)) - \delta \partial_U(\delta i_U(\lambda)) \\ &= \delta(i_V \circ \partial_V)(\lambda) - \delta(i_U \circ \partial_U)(\lambda) = \delta i_M(\lambda) - \delta i_M(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

La otra inclusión ( $\ker \Delta \subset \mathbf{im} F$ ) es un poco más delicada: si el par  $(\alpha, \beta) \in \ker \Delta$ , entonces  $\delta \partial_V(\beta) = \delta \partial_U(\alpha)$ , lo que nos dice que  $\alpha$  y  $\beta$  "coinciden" sobre  $U \cap V$ . Definamos una forma diferenciable  $\lambda$  sobre  $M$  de la siguiente manera:

$$\lambda(p) = \begin{cases} \beta(p) = \alpha(p) & \text{si } p \in U \cap V \\ \alpha(p) & \text{sobre } U - (U \cap V) = U - V \\ \beta(p) & \text{sobre } V - (U \cap V) = V - U. \end{cases}$$

Esta claro por lo que mencionamos antes que es una buena definición, y además cumple

$$F(\lambda) = (\delta i_U(\lambda), \delta i_V(\lambda)) = (\alpha, \beta).$$

En la última parte, queremos ver que  $\Delta$  es un epimorfismo: se trata de probar que toda forma diferenciable  $\omega$  sobre  $U \cap V$  puede escribirse como la resta de una forma sobre  $U$  y otra sobre  $V$ . Consideremos la partición de la unidad  $\{\rho_U, \rho_V\}$  subordinada al cubrimiento abierto  $\{U, V\}$ . Como  $\rho_V$  se anula fuera de  $V$ , la forma  $\rho_V \cdot \omega$  también se anula fuera de  $V$ , así que induce una forma sobre  $U$  de la siguiente manera

$$\alpha(p) = \begin{cases} -\rho_V(p) \cdot \omega(p) & \text{si } p \in U \cap V \\ 0 & \text{sobre } U - (U \cap V) = U - V \end{cases} \quad (2.6)$$

Similarmente por medio de  $\rho_U$  definimos una forma  $\beta$  sobre  $V$

$$\beta(p) = \begin{cases} \rho_U(p) \cdot \omega(p) & \text{si } p \in U \cap V \\ 0 & \text{sobre el resto de } V. \end{cases} \quad (2.7)$$

Pero sobre  $U \cap V$

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha, \beta) &= \delta\partial_V(\beta) - \delta\partial_U(\alpha) = \delta\partial_V(\rho_U \cdot \omega) - \delta\partial_U(-\rho_V \cdot \omega) = \\ &= \delta\partial_V(\rho_U \cdot \omega) + \delta\partial_U(\rho_V \cdot \omega) = (\rho_U + \rho_V) \cdot \omega \Big|_{U \cap V} = \omega \end{aligned}$$

puesto que  $\rho_U + \rho_V \equiv 1$ , con lo que el par  $(\alpha, \beta) \in \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$  es el buscado.  $\square$

Ahora sí, nuestro último "resultado importante" sobre cohomologías:

PROPOSICIÓN 2.7 en las condiciones de la proposición anterior, la sucesión de Mayer-Vietoris induce una sucesión exacta larga en cohomología, también llamada *sucesión de Mayer-Vietoris*:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \swarrow & \\ & & & & H^{k+1}(U \cap V) & & \\ H^{k+1}(M) & \longrightarrow & H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) & \longrightarrow & H^{k+1}(U \cap V) & & \\ & \swarrow & \xrightarrow{d^*} & \searrow & & & \\ & & & & H^k(U \cap V) & & \\ & & & & \swarrow \cdots & & \end{array} \tag{2.8}$$

donde el operador  $d^*$  se conoce como *operador de borde*, y está definido por

$$d^*[\omega] = \begin{cases} -[d(\rho_V \cdot \omega)] & \text{sobre } U \\ [d(\rho_U \cdot \omega)] & \text{sobre } V. \end{cases} \tag{2.9}$$

Cabe notar que si bien en cada uno de los abiertos  $U$  y  $V$ ,  $d^*[\omega]$  es la diferencial exterior de una forma definida sobre el abierto, no necesariamente existe una forma definida globalmente (sobre todo  $M$ ) tal que su diferencial exterior sea el operador de borde aplicado a  $\omega$ . (Ya que en ese caso  $d^*$  sería el operador nulo en cohomología, y esto generalmente es falso).

DEMOSTRACIÓN está claro que si  $[\omega] \in H^k(U \cap V)$ ,  $d^*[\omega]$  (si existe) cae dentro de  $H^{k+1}(M)$ , puesto que  $d^2 \equiv 0$  en cada uno de los abiertos  $U$  y  $V$  (además el soporte de  $d^*[\omega]$  está dentro de  $U \cap V$ ). Así es que vamos a empezar viendo que el operador 2.9 está bien definido, es decir que las dos partes "se pegan bien" y que la definición no depende del representante  $\omega$  de la clase  $[\omega]$  en la cohomología.

Las dos partes coinciden sobre  $U \cap V$  ya que allí

$$\begin{aligned} [d(\rho_U \cdot \omega)] &= [d(\rho_U) \wedge \omega + \rho_U \cdot d\omega] \\ &= [d(\rho_U) \wedge \omega] + [\rho_U \cdot d\omega] \end{aligned}$$

$$\text{y similarmente } -[d(\rho_V \cdot \omega)] = [-d(\rho_V) \wedge \omega] + [-\rho_V \cdot d\omega]$$

$$\text{pero como } \rho_U + \rho_V \equiv 1, \quad \text{se obtiene } d(\rho_U) + d(\rho_V) \equiv 0$$

(2.10)

$$\begin{aligned} \text{y entonces } [d(\rho_U \cdot \omega)] &= [-d(\rho_V) \wedge \omega] + [(1 - \rho_V) \cdot d\omega] \\ &= [-d(\rho_V) \wedge \omega] + [-\rho_V \cdot d\omega] + [d\omega] \\ &= [-d(\rho_V) \wedge \omega] + [-\rho_V \cdot d\omega] + [0] \\ &= -[d(\rho_V \cdot \omega)]. \end{aligned}$$

Esto nos permite escribir una expresión un poco más simple para  $d^*$ :

$$d^*[\omega] = \begin{cases} [d(\rho_U \cdot \omega)] = [d(\rho_U) \wedge \omega] + [\rho_U \cdot d\omega] & \text{sobre } U \cap V \\ 0 & \text{sobre } M - (U \cap V) = U \triangle V \end{cases} \quad (2.11)$$

Para ver que la definición no depende del representante, supongamos que  $[\omega] = [0]$ , y veamos que  $d^*[\omega] = [0]$ .

En primer lugar observemos que como  $[\omega] = [0]$  en  $H^k(U \cap V)$ ,  $\omega$  es una  $k$ -forma exacta (o sea que existe una  $\mu \in \Omega^{k-1}(U \cap V)$  tal que  $d\mu = \omega$ ); además  $d\omega = 0$  por ser un elemento de la cohomología. En segundo lugar, la sucesión exacta corta de la proposición 2.6 genera el diagrama con filas exactas (donde usamos que  $\Delta$  es un epimorfismo para obtener una  $\xi$  en  $\Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$  que vaya a  $\omega$ )

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^{k+1}(M) & \xrightarrow{F} & \Omega^{k+1}(U) \oplus \Omega^{k+1}(V) & \xrightarrow{\Delta} & \Omega^{k+1}(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^k(M) & \longrightarrow & \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) & \longrightarrow & \Omega^k(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & & \xi = & (-\rho_V \cdot \omega, \rho_U \cdot \omega) & \mapsto & \Delta(\xi) = \omega & \end{array}$$

así que por un lado tenemos (usando que  $d\omega = 0$ )

$$\Delta(d\xi) = \Delta(d(-\rho_V \cdot \omega), d(\rho_U \cdot \omega)) = 0 \quad \text{por 2.10,} \quad (2.12)$$

lo que prueba que existe una forma  $\theta \in \Omega^{k+1}(M)$  tal que  $F(\theta) = d\xi$ . Hay que señalar que como  $F$  es un monomorfismo, esta  $\theta$  es única. Por otro lado, si  $\nu = (v_1, v_2) \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$  entonces

$$d(\Delta(\nu)) = d(\delta\partial_V(v_2) - \delta\partial_U(v_1)) = \delta\partial_V(dv_2) - \delta\partial_U(dv_1) = \Delta(d\nu) \quad (2.13)$$

por la comutatividad del pull-back con la diferencial exterior (proposición 2.1), que en el caso particular nuestro se traduce en

$$\Delta(d\xi) = d(\Delta(\xi)) = d\omega = 0. \quad (2.14)$$

La comutatividad del primer cuadrado es similar, y esto nos dice que  $F(d\theta) = d(F(\theta)) = d(d\xi) = 0$ ; como  $\ker F = \{0\}$  resulta que  $d\theta = 0$  (o sea  $\theta$  es cerrada).

Hay que notar que si bien puede ser que  $\xi$  no sea única, si existe otra forma  $\zeta$  en  $\Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$  tal que  $\Delta(\zeta) = \omega$  entonces  $\zeta - \xi \in \ker \Delta$ , y por ende existe una forma  $\varepsilon \in \Omega^k(M)$  tal que

$$F(\varepsilon) = \zeta - \xi, \quad (2.15)$$

lo que da menos "libertad" a la hora de elegir un candidato para  $\xi$  (esta observación será útil posteriormente cuando demostremos la exactitud de la sucesión).

Tomemos la  $(k-1)$ -forma diferenciable  $\chi \in \Omega^{k-1}(U) \oplus \Omega^{k-1}(V)$  tal que  $\Delta(\chi) = \mu$  como en 2.6 y 2.7, y calculemos

$$\begin{aligned} \Delta(d\chi) = \Delta(d(-\rho_V \cdot \mu), d(\rho_U \cdot \mu)) &= \Delta(-d(\rho_V) \wedge \mu - \rho_V \cdot d\mu, d(\rho_U) \wedge \mu + \rho_U \cdot d\mu) \\ &= \Delta(-d(\rho_V) \wedge \mu, d(\rho_U) \wedge \mu) + \Delta(-\rho_V \cdot \omega, \rho_U \cdot d\omega) \end{aligned}$$

$$\text{porque } -d(\rho_V) = d(\rho_U) = \Delta(\xi) = \omega.$$

Pero entonces  $\Delta(d\chi - \xi) = 0$ , y al estar  $\xi - d\chi$  en el  $\ker \Delta$ , existe una forma diferenciable  $\lambda$  tal que  $F(\lambda) = \xi - d\chi$ ; usando la comutatividad del primer cuadrado se deduce

$$\begin{aligned} F(d\lambda) = d(F(\lambda)) &= d\xi - d^2\chi \\ &= d\xi \end{aligned}$$

$$\text{por la conclusión de 2.14} = F(\theta)$$

lo que demuestra que  $F(d\lambda - \theta) = 0$ , pero como  $\ker F = \{0\}$ , se obtiene  $\theta = d\lambda$  (o sea  $\theta$  es exacta), y por ende  $[\theta] = [0]$  en  $H^{k+1}(M)$ . Pero quién es realmente  $\theta$ ? Si chequeamos la definición de  $d^*$  en 2.11 para el caso con el que estamos trabajando (es decir  $d\omega = 0$ ) obtenemos

$$d^*[\omega] = \begin{cases} [d(\rho_U \cdot \omega)] & \text{sobre } U \cap V \\ 0 & \text{sobre } M - (U \cap V) = U \Delta V \end{cases}$$

pero por otro lado,

$$F(\theta) = (\delta i_U(\theta), \delta i_V(\theta)) = d\xi = d(-\rho_V \cdot \omega, \rho_U \cdot \omega)$$

y recordando que  $d\xi \in \ker \Delta$  ya que  $\omega$  es cerrada, las expresiones  $d(-\rho_V \cdot \omega)$  y  $d(\rho_U \cdot \omega)$  coinciden sobre  $U \cap V$ , pero también coinciden sobre su complemento (y se pegan bien) por lo observado en 2.10, con lo cual

$$\delta i_U(\theta) = \delta i_V(\theta) = d(-\rho_V \cdot \omega) = d(\rho_U \cdot \omega),$$

y esto último nos dice que sobre **todo**  $M$ ,  $d(\rho_U \cdot \omega)$  es el pull-back (o restricción) de  $\theta$ ; pero entonces es clara la conclusión

$$d^* [\omega] = [d(\rho_U \cdot \omega)] = [\theta] = [0] .\square$$

UN EJERCICIO DE ÁLGEBRA: sólo queda ver que la sucesión 2.8 es realmente una sucesión exacta; para ello recordemos como eran los morfismos inducidos sobre las cohomologías y tengamos presente el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & F^* & & \Delta^* \cdots \cdots \swarrow \\ H^{k+1}(M) & \longrightarrow & H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) & \longrightarrow & H^{k+1}(U \cap V) \\ & \swarrow & \xrightarrow{d^*} & \searrow & \\ & & H^k(M) & \longrightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V) \\ & \swarrow & \cdots & & \end{array}$$

Lo que hay que probar entonces son las tres igualdades

1.  $\mathbf{im} F^* = \ker \Delta^*$
2.  $\mathbf{im} \Delta^* = \ker d^*$
3.  $\mathbf{im} d^* = \ker F^*$

1. La inclusión  $\mathbf{im} F^* \subset \ker \Delta^*$  es trivial y se deduce de las definiciones, veamos entonces la otra.

Tomemos  $[\omega] = ([\omega_1], [\omega_2]) \in H^k(U) \oplus H^k(V)$  tal que  $\Delta^* [\omega] = [\Delta(\omega)] = [0]$ ; esto quiere decir que existe  $\alpha \in \Omega^{k-1}(U \cap V)$  tal que

$$d\alpha = \Delta(\omega)$$

pero como  $\Delta$  es un epimorfismo, podemos encontrar una  $v \in \Omega^{k-1}(U) \oplus \Omega^{k-1}(V)$  que caiga sobre  $\alpha$  por medio de  $\Delta$ . Pero entonces

$$\Delta(\omega) = d\alpha = d(\Delta(v)) = \Delta(dv)$$

por la conmutatividad de  $\Delta$  con  $d$  (ver 2.13). Restando ambos términos se ve que  $\omega - dv \in \ker \Delta$ , y por ende existe  $\lambda \in \Omega^k(M)$  tal que  $F(\lambda) = \omega - dv$ . De aquí se deduce que  $\lambda$  es cerrada, ya que

$$F(d\lambda) = d(F(\lambda)) = d\omega - d^2v = 0, \text{ y como } \ker F = \{0\}, \text{ se deduce } d\lambda = 0 .$$

Pero esto indica que podemos tomar  $[\lambda] \in H^k(M)$ , como también  $F^* [\lambda] \in H^k(U) \oplus H^k(V)$ ; ahora resulta

$$F^* [\lambda] = [F(\lambda)] = [\omega - dv] = [\omega] .\square$$

2. Para las demostraciones sobre  $d^*$  conviene trabajar con su expresión "algebraica", tal como la encontramos en la demostración de existencia (ecuaciones 2.12, 2.13 y 2.14), es decir

$$d^* [u] = [\theta] \text{ donde (si } \xi \text{ es alguna forma tal que } \Delta\xi = u) F(\theta) = d\xi. \quad (2.16)$$

Para ver que  $\mathbf{im} \Delta^* \subset \ker d^*$ , tomemos  $u \in \Omega^k(U \cap V)$  con  $du = 0$  y tal que existe una  $v \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ , con  $dv = 0$ , de manera que

$$\Delta^* [v] = [u].$$

Esto se traduce diciendo que existe una forma  $\alpha \in \Omega^{k-1}(U \cap V)$  tal que  $\Delta(v) - u = d\alpha$ , y como siempre, podemos encontrar una forma  $\beta \in \Omega^{k-1}(U) \oplus \Omega^{k-1}(V)$  que vaya a parar a  $\alpha$  vía  $\Delta$ , y como

$$\Delta(d\beta) = d(\Delta(\beta)) = d\alpha = \Delta(v) - u$$

se deduce que  $v - d\beta$  cae sobre  $u$  al aplicarle  $\Delta$ , pero lo mismo ocurre con la forma  $\xi$  de 2.16 y por la observación 2.15 podemos ver que hay una forma  $\varepsilon$  tal que  $F(\varepsilon) = \xi - (v - d\beta)$ ; tomando la diferencial exterior (y recordando que  $v$  era cerrada) obtenemos

$$F(d\varepsilon) = dF(\varepsilon) = d\xi - d(v - d\beta) = F(\theta).$$

Como  $F$  es un monomorfismo, resulta  $\theta = d\varepsilon$ , o lo que es lo mismo

$$d^* [u] = [\theta] = [d\varepsilon] = [0]. \square$$

Para la vuelta ( $\ker d^* \subset \mathbf{im} \Delta^*$ ) tomemos  $u \in \Omega^k(U \cap V)$  con  $du = 0$  y tal que  $d^* [u] = [0]$ , es decir existe  $\lambda \in \Omega^{k-1}(M)$  tal que  $F(d\lambda) = d\xi$ , si  $\xi$  es una forma tal que  $\Delta\xi = u$ . Lo único que habría que ver es que hay una forma que cae sobre  $u$  vía  $\Delta$ , pero cerrada. Esto es sencillo: tomemos  $\xi - F(\lambda)$  y veamos su diferencial exterior

$$d(\xi - F(\lambda)) = d\xi - F(d\lambda) = d\xi - d\xi = 0 \text{ (o sea es cerrada).}$$

Y por otro lado

$$\Delta(\xi - F(\lambda)) = \Delta\xi - F(\Delta(\lambda)) = \Delta\xi = u. \square$$

3. Nuevamente la inclusión  $\mathbf{im} d^* \subset \ker F^*$  es sencilla, ya que si una forma  $[\theta] \in H^{k+1}(M)$  es como en 2.16 entonces, tomando clases, es evidente que  $F^*([\theta]) = [0]$ .

Para la otra inclusión consideremos la forma  $[\theta] \in H^{k+1}(M)$  en el núcleo de  $F^*$ , o sea

$$F^* [\theta] = [F(\theta)] = [0];$$

esto nos dice que hay una forma  $\mu \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$  tal que  $F(\theta) = d\mu$ . Si vemos que la forma diferenciable  $v = \Delta(\mu)$  es cerrada, como cumple 2.16, habremos probado que  $d^* [v] = [\theta]$ . Veámoslo entonces:

$$dv = d(\Delta(\mu)) = \Delta(d\mu) = \Delta(F(\theta)) = 0. \square$$

## 2.2. Algunas cohomologías conocidas

Vamos a dedicarnos en esta sección a calcular las distintas cohomologías de *De Rham* de las variedades diferenciables  $S^n$  y  $\mathcal{R}^n$ , y ver que ocurre con otras variedades sencillas que clásicamente tienen en un estrecho vínculo con ellas. Los dos primeros casos presentan interés porque estas variedades son los modelos "ideales" de dos tipos de variedades esencialmente distintas: compactas y no compactas. Por otra parte su cálculo, junto con el de las cohomologías de las demás, representa una oportunidad inmejorable para utilizar y terminar de comprender los métodos desarrollados a través de la sección anterior. Finalmente, su conocimiento nos permitirá, como una conclusión de estas notas, demostrar un teorema muy profundo sobre la estructura de las deformaciones de conjuntos compactos convexos.

### 2.2.1. Un caso inevitable: $\mathcal{R}^n$

Lo primero que hay que observar es que si  $k > n$ ,  $H^k(\mathcal{R}^n) = \{0\}$  ya que no hay  $k$ -formas diferenciables (salvo la idénticamente nula) cuando  $k$  es mayor que la dimensión de la variedad.

1. El caso  $n = 0$  es trivial, y se obtiene

$$H^k(\{0\}) = \begin{cases} \mathcal{R} & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

ya que las 0-formas diferenciables que salen del conjunto de un punto y van a  $\mathcal{R}$  son exactamente una para cada punto de la recta.

2. En el caso  $n = 1$ , está claro que  $H^0(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ , y para calcular la otra cohomología basta considerar que dada una 1-forma cualquiera  $\omega$  en la recta, su expresión en coordenadas locales será  $\omega = g(x)dx$ , donde  $g$  es una función diferenciable sobre  $\mathcal{R}$  y por consiguiente se puede definir

$$f(x) = \int_0^x g(u)du$$

de donde se observa que  $f$  es una 0-forma diferenciable con diferencial exterior

$$df = g(x)dx = \omega$$

y por consiguiente toda 1-forma en  $\mathcal{R}$  es exacta (no sólo las cerradas), lo que nos dice que  $H^1(\mathcal{R}) = \{0\}$ .

3. Para  $n > 1$  existen tres demostraciones distintas: una relativamente sencilla se obtiene utilizando el resultado 2.2 de la sección 2.1.1, y partiendo del caso anterior obtener la cohomología de  $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}$  usando inducción.

La segunda, que desarrollaremos en detalle, nos va a permitir probar (llamando  $B^n$  a la bola unitaria de  $\mathcal{R}^n$ ) el

$$\text{"Lema de Poincaré"} \quad H^k(B^n) = \begin{cases} \mathcal{R} & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

con una demostración "constructiva" que nos dirá, dada una  $k$ -forma diferenciable cerrada  $\omega$  sobre  $B^n$ , cual es la  $(k-1)$ -forma diferenciable  $\theta$  tal que  $d\theta = \omega$ . Una razón lateral por la cual vamos a encarar esta demostración es que resulta uno de los ingredientes clave a la hora de demostrar el isomorfismo 1.12 de *De Rham* de la sección 1.2.2, y el método en sí se presta a muchas analogías y adaptaciones.

Volvamos entonces a la prueba que nos concierne: para concretarla necesitamos una proposición "intermedia" que tiene importancia por sí misma (y en algunos libros también es llamada como el lema anterior), que dice lo siguiente:

PROPOSICIÓN 2.8 sea  $\Omega^k(B^n)$  como siempre el espacio de las  $k$ -formas diferenciables sobre  $B^n$ . Entonces para cada  $k \geq 1$  existe una transformación lineal  $h_k : \Omega^k(B^n) \rightarrow \Omega^{k-1}(B^n)$  tal que

$$h_{k+1} \circ d + d \circ h_k = id. \quad (2.17)$$

DEMOSTRACIÓN tomamos primero el campo vectorial en  $B^n$

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.18)$$

y definimos un operador lineal  $\alpha_k : \Omega^k(B^n) \rightarrow \Omega^k(B^n)$  poniendo

$$\alpha_k(f \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})(p) = \left( \int_0^1 t^{k-1} f(tp) dt \right) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p),$$

y extendiéndolo linealmente a todo el espacio. Por otro lado, dada la forma diferenciable  $u$  conviene revisar la definición de la operación de *multiplicación interior por  $u$*  -que es sencillamente el operador adjunto (como transformación lineal de  $\Omega^*(B^n)$  en  $\Omega^*(B^n)$ ) de la *multiplicación a izquierda por  $u$* -, cuya definición es

$$\begin{aligned} \varepsilon(u) : \Omega^*(B^n) &\longrightarrow \Omega^*(B^n) \\ v &\longmapsto u \wedge v. \end{aligned}$$

Lo que en realidad necesitamos es algo muy similar, que permita utlizar lo anterior pero ahora sobre campos (ya que la operación de multiplicación interior definida como arriba se restringe al caso del álgebra exterior del espacio dual, y por eso se pueden usar sólo formas diferenciables y el producto  $\wedge$ ).

DEFINICIÓN (producto interior por un campo  $X$ ): dada una variedad diferenciable  $M$ , y un campo  $X$  sobre ella,  $i(X)$  es la única transformación lineal de  $\Omega^p(M)$  en  $\Omega^{p-1}(M)$  (es decir que tiene *grado*  $-1$ ) que cumple

$$a) \quad i(X)\omega = \omega(X) = \langle \omega, X \rangle \quad \text{si } \omega \in \Omega^1(M)$$

b)

$$i(X)(\omega_1 \wedge \omega_2) = i(X)\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge i(X)\omega_2$$

$$\text{si } \omega_1 \in \Omega^p(M) \quad \text{y} \quad \omega_2 \in \Omega^q(M) \quad (\text{es una antiderivación})$$

La demostración de la unicidad es relativamente sencilla, y la existencia está dada por la expresión

$$i(X)(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p)(a_2, \dots, a_p) = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p(X, a_2, \dots, a_p)$$

$$\text{si } \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \Omega^1(M) \quad \text{y} \quad a_2, \dots, a_p \text{ son campos,}$$

extendiéndose linealmente a todas las p-formas diferenciables  $\omega$ .

- La interpretación geométrica es más o menos simple: en cada punto  $m \in M$ , y cada espacio vectorial  $T_m(M)$  la multiplicación interior por el vector  $X(m)$  de la p-forma  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p(m)$  aplicada a los  $p - 1$  vectores  $a_2(m), \dots, a_p(m)$  es el p-volumen del p-paralelepípedo formado por los vectores  $X(m), a_2(m), \dots, a_p(m)$ . Es decir que  $i(X)$  aplicado a una p-forma la convierte en una  $(p - 1)$ -forma que mide cuanto se "alejan" los  $(p - 1)$ -subespacios del vector generado por  $X$  en cada punto de  $T_m(M)$ .

Ahora sí, llegamos a la definición clave de la proposición:

$$h_k = \alpha_{k-1} \circ i(X) \quad \text{donde } X \text{ es el campo definido en 2.18.}$$

Vamos entonces a demostrar 2.17; basta (por la linealidad de la diferencial exterior  $d$  y de la multiplicación interior  $i(X)$ ) hacerlo para una k-forma

$$\omega = f \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (2.19)$$

El primer paso es ver que  $\alpha$  conmuta con  $d$ , es decir

$$\alpha_k \circ d = d \circ \alpha_{k-1} \quad (2.20)$$

y alcanza probarlo sobre la k-forma 2.19, por los mismos argumentos de linealidad, aplicados ahora sobre  $d$  y el operador  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha_k(d(\omega))(p) &= \alpha_k \left( \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \right) (p) \\ &= \left( \int t^{k-1} \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{tp} dt \right) \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}(p) \\ &= d \left( \int t^{k-2} f(tp) dt \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}(p) \\ &= d(\alpha_{k-1}(\omega))(p). \end{aligned}$$

También es útil observar que el campo 2.18 cumple

$$\begin{aligned}
d(i(X)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})) &= \\
&= d(i(X)dx_{i_1} \cdot dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} - dx_{i_1} \wedge i(X)[dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}]) \\
&= d\left(\sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge i(X)dx_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right) \\
&= d\left(\sum_j (-1)^{j+1} x_{i_j} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{j-1}} \wedge dx_{i_{j+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right) \\
&= \sum_j (-1)^{j+1} dx_{i_j} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{j-1}} \wedge dx_{i_{j+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= k \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ahora vamos a calcular  $(d \circ h_k)\omega$

$$\begin{aligned}
d(\alpha_{k-1}(i(X)\omega))(p) &= d(\alpha_{k-1}(i(X)f \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}))(p) \\
&= d(\alpha_{k-1}(f \cdot i(X)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}))(p) \\
\text{por 2.20} &= \alpha_k(d(f \cdot i(X)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}))(p) \\
&= \alpha_k((df \wedge i(X)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}))(p) + \\
&\quad + \alpha_k(f \cdot d(i(X)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}))(p) \\
\text{por 2.21} &= \alpha_k(df \wedge i(X)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}))(p) + \\
&\quad + \alpha_k(k \cdot f \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})(p)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

y por otro lado calcular  $(h_{k+1} \circ d)\omega$

$$\begin{aligned}
\alpha_k(i(X)(d\omega))(p) &= \alpha_k(i(X)(df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}))(p) \\
&= \alpha_k(i(X)df \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})(p) - \\
&\quad - \alpha_k(df \wedge i(X)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}))(p).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Finalmente, sumando 2.22 con 2.23 se obtiene

$$\begin{aligned}
(d \circ h_k + h_{k+1} \circ d)\omega(p) &= \\
&= \alpha_k(k \cdot f \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})(p) + \\
&\quad + \alpha_k(i(X)df \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})(p) \\
&= \left( \int_0^1 t^{k-1} (kf + df(X))|_{tp} dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p) \\
&= \left( \int_0^1 t^{k-1} \left( kf(tp) + \sum x_j(tp) \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{tp} \right) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p) \\
&= \left( \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^k f(tp)) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p) \\
&= f(p) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p) \\
&= \omega(p),
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.  $\square$

El lema de Poincaré a partir de esta proposición es un resultado trivial, ya que si una  $k$ -forma diferenciable  $\omega$  (con  $k \geq 1$ ) sobre  $B^n$  es cerrada, la ecuación 2.17 se reduce a

$$d \circ h_k(\omega) = \omega$$

lo que nos dice que  $\omega$  es exacta, ya que la  $(k-1)$ -forma  $\theta = h_k(\omega)$  cumple  $d\theta = \omega$ .

Si miramos con cuidado la proposición 2.8 y la ecuación 2.17, veremos que hemos encontrado un operador de homotopía (en el sentido definido en la proposición 2.2) y que la identidad de  $B^n$  es homotópica por cadena a cualquier función constante, es decir, que tome un único valor (un punto cualquiera de  $B^n$ ).

### Algunas cuentas

Como en la demostración del lema de Poincaré hemos obtenido una expresión explícita para  $\theta$ , vamos a ver como funciona en un ejemplo sencillo: consideremos la 2-forma diferenciable

$$\omega(x, y, z) = y \cdot dy \wedge dz + z \cdot dz \wedge dx + x \cdot dx \wedge dy$$

con diferencial exterior

$$d\omega(x, y, z) = dy \wedge dy \wedge dz + dz \wedge dz \wedge dx + dx \wedge dx \wedge dy = 0.$$

Se supone entonces que debe ser posible hallar  $\theta$  una 1-forma tal que  $d\theta = \omega$ , una tal

forma según lo visto debe obtenerse haciendo

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \circ i(X)\omega &= \alpha_1 (i(X)y \cdot dy \wedge dz + i(X)z \cdot dz \wedge dx + i(X)x \cdot dx \wedge dy) \\
&= \alpha_1 (y \cdot i(X)dy \wedge dz) + \alpha_1 (z \cdot i(X)dz \wedge dx) + \alpha_1 (x \cdot i(X)dx \wedge dy) \\
&= \alpha_1 (y \cdot i(X)(dy \wedge dz)) + \alpha_1 (z \cdot i(X)(dz \wedge dx)) + \alpha_1 (x \cdot i(X)(dx \wedge dy)) \\
&= \alpha_1 (y \cdot i(X)dy \cdot dz - y \cdot dy \cdot i(X)dz) + \alpha_1 (z \cdot i(X)dz \cdot dx - z \cdot dz \cdot i(X)dx) + \\
&\quad + \alpha_1 (x \cdot i(X)dx \cdot dy - x \cdot dx \cdot i(X)dy) \\
&= \alpha_1 (y \cdot dy(X) \cdot dz - y \cdot dy \cdot dz(X)) + \alpha_1 (z \cdot dz(X) \cdot dx - z \cdot dz \cdot dx(X)) + \\
&\quad + \alpha_1 (x \cdot dx(X) \cdot dy - x \cdot dx \cdot dy(X)) \\
&= \alpha_1 (z \cdot dz(X) - x \cdot dy(X)) \cdot dx + \alpha_1 (-y \cdot dz(X) + x \cdot dx(X)) \cdot dy + \\
&\quad + \alpha_1 (y \cdot dy(X) - z \cdot dx(X)) \cdot dz. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Vamos entonces a calcular cuanto valen las 1-formas  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  sobre el campo  $X$  de 2.18

$$\begin{aligned}
dx(X) &= dx \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) = x \\
dy(X) &= y \\
dz(X) &= z.
\end{aligned}$$

Con esto podemos seguir la cuenta en 2.24:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \circ i(X)\omega &= \alpha_1 (z \cdot z - x \cdot y) \cdot dx + \alpha_1 (-y \cdot z + x \cdot x) \cdot dy + \\
&\quad + \alpha_1 (y \cdot y - z \cdot x) \cdot dz \\
&= \alpha_1 (z^2 - x \cdot y) \cdot dx + \alpha_1 (-y \cdot z + x^2) \cdot dy + \\
&\quad + \alpha_1 (y^2 - z \cdot x) \cdot dz \\
&= \alpha \cdot dx + \beta \cdot dy + \gamma \cdot dz.
\end{aligned}$$

Calculemos entonces  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  :

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 (z^2 - x \cdot y) \\ &= \int_0^1 (z^2 - x \cdot y) t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} (z^2 - x \cdot y) \\ \beta &= \frac{1}{3} (-y \cdot z + x^2) \\ \gamma &= \frac{1}{3} (y^2 - z \cdot x),\end{aligned}$$

con lo cual se obtiene la 1-forma diferenciable

$$\theta = \frac{1}{3} (z^2 - x \cdot y) \cdot dx + \frac{1}{3} (-y \cdot z + x^2) \cdot dy + \frac{1}{3} (y^2 - z \cdot x) \cdot dz.$$

Veamos si todo funciona como debe, tomando la diferencial exterior de  $\theta$  :

$$\begin{aligned}d\theta &= \frac{1}{3} (2z \cdot dz - dx \cdot y - x \cdot dy) \wedge dx + \frac{1}{3} (-dy \cdot z - y \cdot dz + 2x \cdot dx) \wedge dy + \\ &\quad + \frac{1}{3} (2y \cdot dy - dz \cdot x - z \cdot dx) \wedge dz \\ &= \frac{2}{3} z \cdot dz \wedge dx - \frac{1}{3} x \cdot dy \wedge dx - \frac{1}{3} y \cdot dz \wedge dy + \frac{2}{3} x \cdot dx \wedge dy + \frac{2}{3} y \cdot dy \wedge dz - \frac{1}{3} z \cdot dx \wedge dz \\ &= \frac{2}{3} z \cdot dz \wedge dx + \frac{1}{3} z \cdot dz \wedge dx + \frac{1}{3} x \cdot dx \wedge dy + \frac{2}{3} x \cdot dx \wedge dy + \frac{1}{3} y \cdot dy \wedge dz + \frac{2}{3} y \cdot dy \wedge dz \\ &= y \cdot dy \wedge dz + z \cdot dz \wedge dx + x \cdot dx \wedge dy \\ &= \omega.\end{aligned}$$

Bastante tedioso por ser una 2-forma lineal! Esto muestra que si bien hallar la forma que "cae" sobre una dada es posible, en general las cuentas que hay que hacer son muy largas, y no hay manera de acortarlas.

### Variedades homeomorfas

Hay que notar primero que la biyección continua entre todo  $\mathcal{R}^n$  y la bola unitaria  $B^n = B(\mathbf{0}, 1)$

$$N : \mathcal{R}^n \longrightarrow B(\mathbf{0}, 1) \tag{2.25}$$

$$p \longmapsto \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\|p\|) \cdot \frac{p}{\|p\|}$$

es en realidad un homeomorfismo con inversa

$$N^{-1} : B(\mathbf{0}, 1) \longrightarrow \mathcal{R}^n$$

$$v \longmapsto \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \|v\|\right) \cdot \frac{v}{\|v\|},$$

y por lo que demostramos en la sección 2.1.2 (proposición 2.5) resulta que  $\mathcal{R}^n$  tiene entonces la misma cohomología que  $B(\mathbf{0}, 1)$ , es decir

$$H^k(\mathcal{R}^n) = \begin{cases} \mathcal{R} & k = 0 \\ 0 & k > 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Otro resultado obvio, por los mismos argumentos, es que todas las bolas de cualquier radio en  $\mathcal{R}^n$  tienen idéntica cohomología, ya que las traslaciones, y homotecias son todas homeomorfismos.

A partir de esto podemos enunciar el resultado siguiente, que generaliza convenientemente el caso anterior:

**PROPOSICIÓN 2.9** todos los abiertos convexos de  $\mathcal{R}^n$  tienen la cohomología de  $\mathcal{R}^n$  (es decir, como en 2.26), como consecuencia directa de ser todos homeomorfos.

**DEMOSTRACIÓN** podemos suponer que el origen está en el abierto, ya que si no está, con una traslación conveniente podemos conseguirlo. También podemos ver que basta hacer la demostración sobre un conjunto acotado, ya que si el abierto  $A \subset \mathcal{R}^n$  no es acotado, tomamos  $B = N(A)$  (la  $N$  de 2.25), y este nuevo abierto está dentro de la bola unitaria y tiene la misma cohomología por ser  $N$  un homeomorfismo (y por otro lado es claro que sigue siendo convexo).

Vamos a demostrar entonces que, dado un abierto convexo acotado  $A$  como en la figura 2.3, existe un homeomorfismo de éste con una bola conveniente, y con esto habremos probado la proposición.

Tomemos entonces el abierto  $A$ , y dentro de él el origen de coordenadas  $O$ . Por ser  $A$  abierto, existe una bola abierta  $B_\varepsilon$  centrada en  $O$  que está contenida completamente en  $A$ ; si llamamos  $S_a$  al conjunto

$$S_a = \{x \in A \mid \exists t \in \mathcal{R}, t > 0 \text{ y vale } x = t \cdot a\} \quad \text{”semirrecta” } \overline{Oa}$$

podemos observar que  $S_a$  es siempre no vacío, ya que  $a = 1 \cdot a$  está dentro de él.

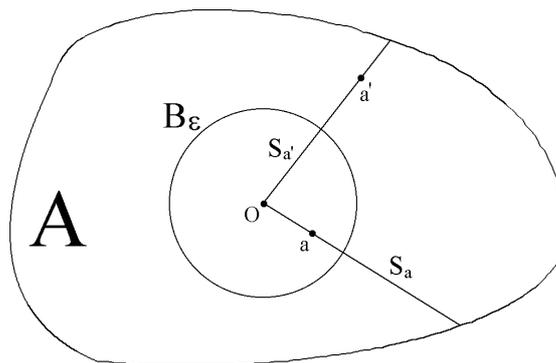


Figura 2.3: Un abierto convexo acotado en  $\mathcal{R}^n$ .

Por argumentos similares (usando el entorno  $B_\varepsilon$ ), para cada  $a \neq O$  en  $A$ , el conjunto

$$t_a = \left\{ t > 0 \mid \exists x \in S_a \text{ con } x = t \cdot \frac{a}{\|a\|} \right\}$$

es siempre no vacío, con lo cual podemos tomar

$$T_a = \sup_{x \in S_a} t_a \text{ para cada } a \neq O, \text{ "funcional de Minkowski de } A\text{"}$$

y entonces resulta casi evidente que  $T_a > \|a\| > 0$  para todo  $a \neq O$ , puesto que  $A$  es abierto. Podemos entonces tomar la transformación continua que deja el origen fijo

$$T : A \longrightarrow B_\varepsilon$$

$$\begin{aligned} a &\longmapsto \frac{\varepsilon}{T_a} \cdot a && \text{si } a \neq O, \\ O &\longmapsto O \end{aligned}$$

que cae dentro de  $B_\varepsilon$  puesto que

$$\|T(a)\| = \frac{\varepsilon}{T_a} \cdot \|a\| < \varepsilon,$$

y la continuidad se deduce utilizando que la composición e inversa de funciones que no se anulan es continua, junto con el hecho de que la función

$$a \longmapsto T_a$$

es continua (esto sale utilizando la subaditividad del supremo).

Pero esta transformación resulta en realidad un homeomorfismo del abierto con la bola, ya que la función

$$S : B_\varepsilon \longrightarrow A$$

$$\begin{aligned} b &\longmapsto \frac{T_b}{\varepsilon} \cdot b && \text{si } b \neq O, \\ O &\longmapsto O \end{aligned}$$

es claramente su inversa (que es continua por los mismos argumentos que antes).  $\square$

Podemos ir un poco más lejos y notar que como la cohomología sólo depende del tipo homotópico, deformaciones suaves (por ejemplo, deformation retracts) de conjuntos abiertos convexos, seguirán teniendo la misma  $H^*$ , y uno puede pensar en ellos como en convexos a los cuales se los ha estirado, aplastado, golpeado y retorcido (a placer del lector) sin "desgarrarlos" ni permitir que se doblen sobre si mismos al punto de tocarse.

Si recordamos que se dice que un espacio es *contractible* cuando existe un deformation retract de todo el espacio sobre un punto (y por ende el espacio tiene todos sus grupos de homotopía nulos), podemos concluir que todos los grupos de cohomología (salvo  $H^0$ , que como vimos al comienzo de esta sección es  $\mathcal{R}$  para el espacio de un punto) de un espacio contractible son triviales: ejemplos bastante obvios de espacios contractibles son la bola cerrada y la bola abierta de  $\mathcal{R}^n$ , ya que la función

$$(p, t) \longmapsto t \cdot p$$

es una homotopía entre estos conjuntos y el origen.

Con esto en mente, se obtiene la tercera demostración (extremadamente sencilla) del lema de Poincaré.

### 2.2.2. La cohomología de $S^n$

El caso  $n = 0$  como siempre es trivial, ya que  $S^0$  es el conjunto de dos puntos  $\{-1, 1\}$ , y entonces tenemos exactamente  $\mathcal{R}$  funciones distintas para cada punto, con lo cual

$$H^k(S^0) = \begin{cases} \mathcal{R} \oplus \mathcal{R} = \mathcal{R}^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Para los demás casos, lo primero que tenemos que recordar es que  $S^n$  es compacta y arcoconexa para todo  $n \in \mathbb{N}$ , así que vale

$$H^0(S^n) = \mathcal{R}$$

ya que según vimos al comenzar a definir las  $k$ -cohomologías en la sección 1.2.1, en el caso compacto  $H^0$  representa las componentes conexas de la variedad.

Ahora veremos como se calculan las demás: si recordamos la proyección estereográfica, es evidente que para todo  $n$ ,  $S^n$  tiene un cubrimiento abierto tal que cada uno de los abiertos es homeomorfo a  $\mathcal{R}^n$ , de la siguiente manera:

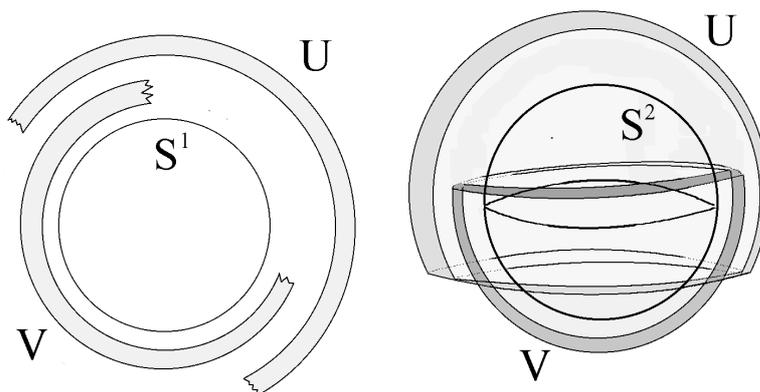


Figura 2.4: Un cubrimiento de  $S^n$  por un par de abiertos  $U$  y  $V$ .

En general puede pensarse a cada uno de los abiertos como un hemisferio mas un pedacito del otro ( $x_{n+1} < \varepsilon$  para un abierto y  $x_{n+1} > -\varepsilon$  para el otro), y podemos convencernos sin demasiado esfuerzo de que la intersección de ambos abiertos ( $-\varepsilon < x_{n+1} < \varepsilon$ ), por medio de un deformation retract conveniente (la proyección desde el centro, por ejemplo), es deformable a un cilindro abierto, con el radio del ecuador (y por lo tanto  $U \cap V$  es homeomorfo a  $S^{n-1} \times \mathcal{R}$ ).

Esto funciona bien aún en el caso  $n = 1$ , como puede verse en la figura 2.4, ya que allí  $U \cap V \approx S^0 \times \mathcal{R} \approx \mathcal{R} \amalg \mathcal{R}$ , al igual que  $U \amalg V$ ; por lo tanto a partir de las propiedades de este cubrimiento y utilizando la cohomología de  $\mathcal{R}$ , podemos hallar la cohomología de  $S^1$

por medio de la sucesión de Mayer-Vietoris (sección 2.1.3). Tenemos entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & S^1 & & \mathcal{R} \amalg \mathcal{R} & & \mathcal{R} \amalg \mathcal{R} \\
 & & & & & & \dots \swarrow \\
 \vdots & & & & & & \\
 H^2 & & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \swarrow & & \xrightarrow{d^*} & & \swarrow \\
 H^1 & & ? & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} \\
 & & \swarrow & & \xrightarrow{d^*} & & \swarrow \\
 H^0 & & 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{F^*} & \mathcal{R} \oplus \mathcal{R} & \xrightarrow{\Delta^*} & \mathcal{R} \oplus \mathcal{R} .
 \end{array}$$

El par  $(\alpha, \beta)$  en  $H^0(U) \oplus H^0(V)$  va a parar por medio de  $\Delta^*$  al par  $(\alpha - \beta, \alpha - \beta)$  en  $H^0(U \cap V)$ , lo que dice que **im**  $\Delta^*$  es unidimensional, y por ende también  $\ker d^*$  es unidimensional y por el teorema de la dimensión, **im**  $d^*$  es unidimensional. Pero por otro lado, como **im**  $F^* = \{0\}$ ,  $d^*$  debe ser un epimorfismo, lo que prueba que  $H^1(S^1) = \mathcal{R}$ . Todos los espacios (y los morfismos) de allí en adelante son triviales.

Pasemos ahora al caso  $n = 2$ : vamos a utilizar la cohomología de  $S^1$ , ya que como observamos arriba,  $U \cap V$  es homeomorfo a  $S^{n-1} \times \mathcal{R}$ , y según lo que probamos en la sección 2.1.2,

$$H^*(S^{n-1} \times \mathcal{R}) \simeq H^*(S^{n-1})$$

resulta que  $H^k(U \cap V) \simeq H^k(S^{n-1})$  en  $S^n$ . El diagrama ahora queda

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & S^2 & & \mathcal{R}^2 \amalg \mathcal{R}^2 & & S^1 \\
 & & & & & & \dots \swarrow \\
 \vdots & & & & & & \\
 H^3 & & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \swarrow & & \xrightarrow{d^*} & & \swarrow \\
 H^2 & & ? & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \swarrow & & \xrightarrow{d^*} & & \swarrow \\
 H^1 & & ? & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} \\
 & & \swarrow & & \xrightarrow{d^*} & & \swarrow \\
 H^0 & & 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{F^*} & \mathcal{R} \oplus \mathcal{R} & \xrightarrow{\Delta^*} & \mathcal{R} .
 \end{array}$$

Nuevamente resulta en todos los "escalones"  $d^*$  un epimorfismo, así que lo que hay que ver es quién es en cada caso **im**  $d^*$ . En el primer paso y por el mismo razonamiento que antes, como la dimensión de la imagen de  $\Delta^*$  es uno, la dimensión del núcleo de  $d^*$  es también uno y por el teorema de la dimensión debe ser **im**  $d^* = H^1(S^2) = \{0\}$ . Para el segundo escalón, como la imagen de  $\Delta^*$  es el cero, el núcleo de  $d^*$  también es cero y por ende **im**  $d^* = H^2(S^2) = \mathcal{R}$ . De allí en adelante da todo cero.

Con un razonamiento similar sobre  $S^n$  (si se quiere, por inducción) y mediante el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & S^n & & \mathcal{R}^n \amalg \mathcal{R}^n & & S^{n-1} \\
 & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & \swarrow \dots \\
 H^{n+1} & & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \swarrow & & \xrightarrow{d^*} & & \swarrow \\
 H^n & & ? & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \swarrow & & \xrightarrow{d^*} & & \swarrow \\
 H^{n-1} & & ? & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} \\
 \vdots & & \swarrow & & \dots & & \swarrow \\
 \vdots & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & \swarrow \dots \\
 H^1 & & ? & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \swarrow & & \xrightarrow{d^*} & & \swarrow \\
 H^0 & & 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{F^*} & \mathcal{R} \oplus \mathcal{R} & \xrightarrow{\Delta^*} & \mathcal{R}
 \end{array}$$

llegamos fácilmente a la siguiente conclusión:

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathcal{R} & \text{si } k = 0 \text{ ó } k = n \\ 0 & \text{en otro caso. } \square \end{cases}$$

**Nota sobre deformation retracts**

Una vez más (y por última vez) cabe recordar que como demostramos en la sección 2.1.2, la cohomología sólo depende del tipo homotópico y por ende podemos pensar en los conjuntos habituales de  $\mathcal{R}^{n+1}$  que se deforman continuamente sobre  $S^n$ , por medio de deformation retracts (como por ejemplo la bola punteada, todo el espacio sin un punto, o una "rosca") y por ende tienen la misma cohomología. Los ejemplos están a la mano, pero no hay demasiado que decir sobre ellos salvo casos específicos que no trataremos aquí.

Lo que sí haremos (para no caer en la tentación de contentarnos con el resultado "teórico" hallado arriba) es encontrar formas diferenciables que sean representantes explícitos de las cohomologías no nulas de las esferas,  $H^n(S^n)$ .

Para ello sólo debemos encontrar una  $n$ -forma diferenciable cerrada sobre la esfera, que no sea exacta, ya que la  $n$ -ésima cohomología de  $S^n$  es unidimensional: consideremos  $\mathcal{R}^{n+1}$  con la carta usual  $(x_1, \dots, x_{n+1})$ , y tomemos su restricción a  $S^n$ . Como subvariedad, la esfera está determinada por la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1. \tag{2.27}$$

Vamos a olvidarnos por un momento del caso particular de la esfera de radio 1, y recordemos que el "elemento de volumen" (es decir una  $(n + 1)$ -forma de  $\mathcal{R}^{n+1}$  normalizada

para que al integrar sobre una subvariedad de dimensión  $n+1$  dada de  $\mathcal{R}^{n+1}$  nos de realmente su volumen) es

$$\Omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dx_{n+1}$$

pero que esta no es la única forma de escribirlo: podemos dar una descripción alternativa pensando en coordenadas "esféricas" y dar una descripción que sea pensar al espacio como "capas", donde cada capa es la cáscara de una esfera de radio  $r$ ; es decir buscar coordenadas sobre cada esfera y una coordenada "radial". De esta manera tendríamos una descripción del elemento de volumen con una  $n$ -forma definida sobre la esfera, y una 1-forma radial.

Esto se hace escribiendo la ecuación para la esfera de radio  $r$ , pensando ahora a  $r$  como una coordenada

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = r^2,$$

y si tomamos la diferencial exterior obtenemos

$$x_1 \cdot dx_1 + \dots + x_{n+1} \cdot dx_{n+1} = r \cdot dr,$$

pero como  $r$  es siempre positivo, podemos escribir a la forma "radial" en función de las otras de la siguiente manera:

$$dr = \frac{1}{r} \cdot (x_1 \cdot dx_1 + \dots + x_{n+1} \cdot dx_{n+1}).$$

Lo que buscamos ahora es una  $n$ -forma  $\omega$  tal que

$$dr \wedge \omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dx_{n+1} = \Omega \quad (2.28)$$

ya que una tal forma estará definida sobre la esfera de radio  $r$ , y completa nuestra descripción del espacio como "capas".

Esencialmente se trata de un producto, y tenemos que sacarnos de encima las coordenadas  $x_i$ ; la manera astuta de hacerlo es recordar que hay una relación entre la coordenada radial  $r$  y éstas, con lo cual está claro que  $\omega$  también debe ser lineal en las  $x_i$ , y debe tener un factor de "corrección"  $\frac{1}{r}$  para eliminar el término en  $r^2$  que aparecerá. Un poco (bastante) de experimentación nos da

$$\omega = \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \cdot x_i \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{n+1}.$$

Pero pensemos un poco en lo que hemos encontrado: se supone que es una  $n$ -forma que da una descripción de la  $n$ -esfera de radio  $r$ , pensada como subvariedad de dimensión  $n$ , y como tal (salvo un factor constante) debería ser un elemento de superficie de ésta. Pero si esto es cierto, la integral sobre toda la esfera debería ser no nula: veamos si es así (llamando  $S^n(r)$  a la  $n$ -esfera de radio  $r$ ,  $B^{n+1}(r)$  a la bola de radio  $r$  de  $\mathcal{R}^{n+1}$  y  $\delta i$  al pull-back de la inclusión de  $S^n(r)$  en  $\mathcal{R}^{n+1}$ )

$$\int_{S^n(r)} \delta i(\omega) = \int_{B^{n+1}(r)} d\omega \quad (\text{por el teorema de Stoke}); \quad (2.29)$$

calculemos entonces su diferencial exterior:

$$\begin{aligned}
d\omega &= \frac{-dr}{r^2} \wedge \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \cdot x_i \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{n+1} + \\
&\quad + \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \cdot dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{n+1} \\
&= -\frac{1}{r} \cdot dr \wedge \omega + \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1} \\
&= \frac{1}{r} \cdot n \cdot \Omega \quad \text{por 2.28,}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

lo que nos lleva nuevamente a 2.29 para la obtener

$$\begin{aligned}
\int_{S^n(R)} \delta i(\omega) &= \frac{1}{R} \int_{S^n(R)} R \cdot \delta i(\omega) \\
&= \frac{1}{R} \int_{S^n(R)} \delta i(r \cdot \omega) \\
&= \frac{1}{R} \int_{B^{n+1}(R)} d(r \cdot \omega) \\
&= \frac{1}{R} \int_{B^{n+1}(R)} (dr \wedge \omega + r \cdot d\omega) \\
&= \frac{1}{R} \int_{B^{n+1}(R)} dr \wedge \omega + \frac{1}{R} \int_{B^{n+1}(R)} r \cdot d\omega,
\end{aligned}$$

luego (recordando que  $dr \wedge \omega = \Omega$  y que  $r \cdot d\omega = n \cdot \Omega$ )

$$\begin{aligned}
\int_{S^n(R)} \delta i(\omega) &= \frac{1}{R} \int_{B^{n+1}(R)} \Omega + \frac{n}{R} \int_{B^{n+1}(R)} \Omega \\
&= \frac{(n+1)}{R} \cdot Vol(B^{n+1}(R))
\end{aligned}$$

que es claramente no nulo.

Volvamos entonces a nuestro problema original: encontrar una  $n$ -forma diferenciable cerrada, no exacta, sobre la esfera. Si miramos con cuidado la cuenta anterior, esta nos presenta un candidato ideal para la forma, ya que  $\omega$  no puede ser exacta, pues si lo fuera, una nueva aplicación del teorema de Stoke (teniendo en cuenta que el borde de la esfera  $\partial S^n(1) = \partial S^n$  es nulo) diría

$$\int_{S^n} \delta i(\omega) = \int_{\partial S^n} d\alpha = 0,$$

pero esto es absurdo pues como vimos recién esta integral **no** es cero.

Por otra parte el hecho de que se trate de una  $n$ -forma sobre una variedad de dimensión  $n$  nos dice que debe ser cerrada sobre ella; más explícitamente (volviendo a la cuenta en 2.30, y mirando a  $\omega$  como forma sobre la esfera):

$$d(\delta i(\omega)) = \delta i(d\omega) = \frac{1}{r} \cdot n \cdot \delta i(\Omega) = \frac{1}{r} \cdot n \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dx_{n+1}, \tag{2.31}$$

y de la relación 2.27 que define  $S^n$  obtenemos

$$x_1 \cdot dx_1 + \dots + x_{n+1} \cdot dx_{n+1} = 0$$

que reemplazada en 2.31 nos da el resultado buscado, es decir

$$d(\delta i(\omega)) = 0.$$

Por lo tanto una  $n$ -forma diferenciable que es base de la cohomología de la  $n$ -esfera  $H^n(S^n)$  (obviando la formalidad del pull-back) es

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \cdot x_i \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{n+1}.$$

## 2.3. El teorema del punto fijo de Brouwer

En este último tramo vamos a demostrar un teorema básico de topología algebraica, que nos dará una idea de las posibles aplicaciones y ramificaciones de la teoría desarrollada a lo largo de estas notas. El teorema es básico no sólo por lo simple sino por lo profundo de sus implicaciones, ya que impone severas restricciones a las maneras de deformar (en forma continua) un compacto convexo, y por ende de la estructura de este conjunto visto como espacio topológico.

Llamando  $E^n$  a la bola cerrada unitaria de  $\mathcal{R}^n$ , tenemos el  
**TEOREMA (BROUWER)** toda función continua  $f : E^n \rightarrow E^n$  tiene (al menos) un punto fijo.

**DEMOSTRACIÓN** es bastante sencilla ya que utiliza esencialmente las cohomologías de  $E^n$  y  $S^{n-1}$ , y podemos hacerla por el absurdo en dos pasos, a saber:

1. Suponemos que  $f$  no tiene ningún punto fijo, y entonces mostramos que se puede definir a partir de ella una función continua  $r$  sobre la bola cerrada, a valores en la cáscara, de manera que sea la identidad sobre esta última.
2. Probamos mediante  $r$  que  $S^{n-1}$  es un deformation retract de  $E^n$ , obteniendo que los dos espacios tienen el mismo tipo homotópico, y por ende la misma cohomología (lo cual no es cierto, según probamos a través de toda la sección 2.2).

Vamos entonces a demostrar los dos incisos, con lo cual habremos demostrado el teorema.

1. Si la función  $f : E^n \rightarrow E^n$  cumple

$$f(p) \neq p \quad \forall p \in E^n,$$

está claro que el vector  $f(p) - p$  es no nulo y por ende define una dirección en el espacio: definimos la función  $r : E^n \rightarrow S^{n-1}$  tomando la intersección entre la semirrecta  $S_p$  que comienza en  $f(p)$  y pasa por  $p$ , y la superficie de la esfera, según puede verse en el caso  $n = 2$  mediante el siguiente dibujo:

Como la expresión para  $r$  es una combinación lineal de  $p$  y  $f(p)$

$$s \cdot (f(p) - p) + p,$$

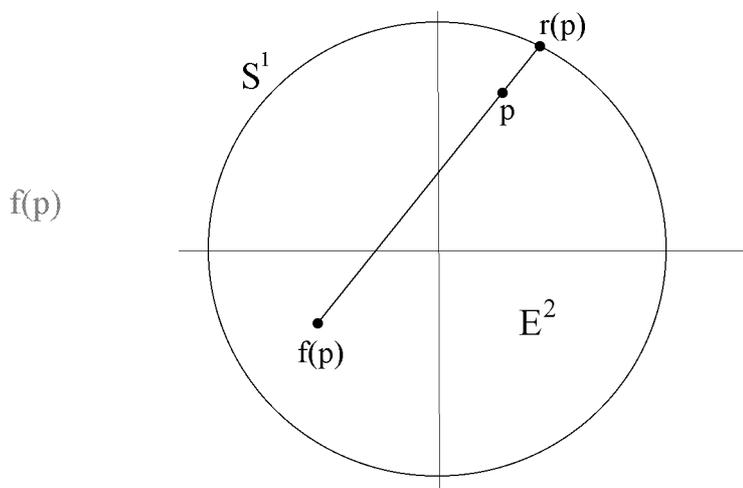


Figura 2.5: La retracción entre la esfera y su borde (extraído de MASSEY, W. "Algebraic Topology: an introduction").

y  $s$  es una solución del polinomio cuadrático que se obtiene planteando la intersección de la semirrecta con  $S^{n-1}$

$$\| s \cdot (f(p) - p) + p \|^2 = 1,$$

resulta bastante claro que es una función continua (y además es evidente del dibujo que sobre la superficie de la esfera es la identidad).

2. Ahora usamos la convexidad de la bola para construir el deformation retract entre la bola y su superficie definiendo

$$f : E^n \times I \longrightarrow E^n$$

$$(p, t) \longmapsto t \cdot r(p) + (1 - t) \cdot p.$$

Es claro que  $f$  está bien definida, es continua y además valen

$$\left. \begin{array}{l} f(p, 0) = p \\ f(p, 1) = r(p) \end{array} \right\} p \in E^n$$

$$f(a, t) = a \quad \forall a \in S^{n-1}, t \in I.$$

Todo esto nos dice que  $f$  es una homotopía entre  $r$  y la identidad de la bola, que deja fijos los puntos de su superficie, lo cual nos dice (a partir de los respectivos morfismos inducidos en los grupos de homotopía) que ambos espacios tienen los mismos grupos de homotopía, y por ende el mismo tipo homotópico.  $\square$

De naturaleza algo más técnica es el siguiente

**COROLARIO:** Sea  $C \subset \mathcal{R}^n$  un compacto convexo no vacío. Supongamos que  $g : C \rightarrow C$  es continua. Entonces  $g$  tiene al menos un punto fijo.

**DEMOSTRACIÓN** podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que  $C$  contiene al origen de  $\mathcal{R}^n$  (vía una traslación). Sea  $P$  el subespacio de dimensión **mínima** que contiene al convexo (el cual se obtiene prolongando todos los segmentos contenidos en el convexo que comienzan en el origen -demostración?-), de dimensión  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ). Probaremos que  $C$  es homeomorfo a  $E^m$  vía una aplicación  $F_C : C \rightarrow E^m$ , y el resultado se obtiene entonces trivialmente aplicándole el teorema de Brouwer a la función

$$f = F_C \circ g \circ F_C^{-1} : E^m \rightarrow E^m.$$

Para construir  $F_C$ , sólo resta observar que  $C$  **como subespacio topológico de  $P$**  contiene al menos un punto interior; esta afirmación "suena" verdadera luego de un poco de meditación en el plano, pero requiere una demostración algo sutil: supongamos que no es así; entonces  $C \subset P$  es cerrado y nunca denso, es decir, magro en  $P$ . Definimos

$$C_n = \{t.c : c \in C, \quad 1 \leq t \leq n\},$$

para  $n \in \mathbb{N}$ . Por la misma construcción de  $P$ , es claro que  $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ . Por ser  $P$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita, es completo, y por ende de segunda categoría: si vemos que todos los  $C_n$  son magros cuando  $C$  es magro, llegamos a la contradicción. Supongamos entonces que  $C_n$  tiene un punto interior  $p$ ; entonces existe una  $m$ -bola  $B_p$  centrada en  $p$  y contenida en  $C_n$ . Pero podemos aplastar  $B_p$  de la siguiente manera

$$B'_p = \frac{1}{n}B_p$$

obteniendo así un punto  $p' = \frac{1}{n}p \in C$  y un entorno abierto  $B'_p$  de  $p'$  contenido en  $C$ , contradiciendo la hipótesis sobre  $C$ .

Sea  $x_0$  algún punto interior de  $C$ ; si trasladamos el origen a  $x_0$ , podemos considerar la funcional de Minkowski del abierto convexo  $C - \partial C$  como subconjunto de  $E^m \simeq P$  (ver la sección **Variedades homeomorfas** en el Cap 3.1.1) para definir  $\tilde{F}_C$ , y esta aplicación manda  $C - \partial C$  en el interior de la bola en forma inyectiva y continua; es sencillo probar que se extiende a una aplicación continua  $F_C$  definida sobre todo  $C$ , que manda  $\partial C$  en  $S^{m-1}$  también en forma inyectiva. Que esta aplicación es un homeomorfismo ahora se deduce de la compacidad de  $C$ .  $\square$

Pueden verse algunas aplicaciones del teorema de Brouwer a modelos económicos en el libro de Franklin [6].

Mediante este último corolario se puede probar un importante teorema de punto fijo en dimensión infinita (que no demostraremos).

Recordemos primero la definición de *ELC* :

**DEFINICIÓN (ELC)** Un espacio topológico  $X$  se dice localmente convexo sii  $X$  es un espacio vectorial sobre  $\mathcal{R}$  ó  $\mathbb{C}$ , y existe una familia  $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$  tal que la topología de  $X$  es la más débil que hace todas las  $\rho_\alpha$  continuas, y además la suma y el producto por escalares de los vectores de  $X$  son operaciones continuas (es decir,  $X$  tiene la topología más débil que lo hace *EVT* y hace todas las funcionales  $\rho_\alpha$  continuas).

**EJEMPLO 1:** El ejemplo clásico de *ELC* **no** normable es el de las funciones holomorfas definidas sobre un abierto conexo  $D \subset \mathbb{C}$ , con la topología de convergencia uniforme sobre compactos.

**TEOREMA (LERAY-SCHAUDER-TYCHONOFF)** Sea  $X$  un espacio topológico localmente convexo, y sea  $C \subset X$  un compacto convexo no vacío. Entonces toda función continua  $T : C \rightarrow C$  tiene al menos un punto fijo.

Puede verse la demostración en [5][Vol I, p. 453-457], o bien en [7].

Hay una infinidad de aplicaciones físicas de este último teorema, por ejemplo, a la mecánica estadística (ver [10][p.72-86]), o bien a problemas de scattering (ver [2] o [3]), trabajando sobre subconjuntos del espacio del Ejemplo 1 de más arriba.

Hemos elegido estos teoremas para finalizar, por una razón evidente: son una clara demostración de la utilidad de los grupos de cohomología dentro de la teoría general de topología de variedades diferenciables, ya que además de proveer información útil sobre la estructura intrínseca de las mismas, tienen la notable cualidad de ser en general mucho más sencillos (como hemos visto) de calcular que los grupos de homotopía de éstas, y por tanto una herramienta más accesible para su estudio.

# Bibliografía

- [1] BOTT, Raoul and TU, Loring W. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer Verlag, New York Inc, 1982.
- [2] CHEW, G. *The Analytic S-Matrix*. Benjamin, New York, 1966.
- [3] DE ALFARO, V. and REGGE, T. *Potential Scattering*. North-Holland Publications, Amsterdam, 1965.
- [4] DE RHAM, G. *Variétés différentiables*. Hermann, Paris, 1960.
- [5] DUNFORD, N. y SCHWARTZ, J. *Linear Operators*. Wiley (Interscience), 1957.
- [6] FRANKLIN, J. *Methods of Mathematical Economics*. Springer, New York, 1980.
- [7] HILTON, P. y WYLIE, S. *Homology Theory*. Cambridge University Press, London and New York.
- [8] KEILHAUER, Guillermo. *Geometría Diferencial I*. Cursos y Seminarios del Departamento de Matemática de la Universidad de Buenos Aires. Fascículo 38, 1995.
- [9] MASSEY, William S. *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer-Verlag, New York Inc, 1977.
- [10] RUELLE, D. *Statistical Mechanics*. Benjamin, New York, 1969.
- [11] STEENROD, Norman. *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press.
- [12] WARNER, Frank W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.