



R E C H E R C H E S

S U R

L A C O U R B U R E D E S S U R F A C E S .

P A R M . E U L E R .

Pour connoître la courbure des lignes courbes, la détermination du rayon osculateur en fournit la plus juste mesure, en nous présentant pour chaque point de la courbe un cercle, dont la courbure est précisément la même. Mais, quand on demande la courbure d'une surface, la question est fort équivoque, & point du tout susceptible d'une réponse absolue, comme dans le cas précédent. Il n'y a que les surfaces sphériques dont on puisse mesurer la courbure, attendu que la courbure d'une sphere est la même que celle de ses grands cercles, & que son rayon en peut être regardé comme la juste mesure. Mais pour les autres surfaces on n'en sauroit même comparer la courbure avec celle d'une sphere, comme on peut toujours comparer la courbure d'une ligne courbe avec celle d'un cercle; la raison en est évidente puisque, dans chaque point d'une surface, il peut y avoir une infinité de courbures différentes. On n'a qu'à considérer la surface d'un cylindre, où selon les directions paralleles à l'axe il n'y a aucune courbure, pendant que dans les sections perpendiculaires à l'axe, qui sont des cercles, la courbure est la même, & que toute autre section faite obliquement à l'axe donne une courbure particulière. Il en est de même de toutes les autres surfaces, où il peut même arriver que dans un sens la courbure soit convexe, & dans un autre concave, comme dans celles qui ressemblent à une selle.

Donc la question sur la courbure des surfaces n'est pas susceptible d'une réponse simple, mais elle exige à la fois une infinité de détermi-

mi-



minations: car, puisqu'on peut tracer par chaque point d'une surface une infinité de directions, il faut connoître la courbure selon chacune, avant qu'on puisse se former une juste idée de la courbure de la surface. Or, par chaque point d'une surface, on peut faire passer une infinité de sections, & cela non seulement par rapport à toutes les directions sur la surface même, mais aussi par rapport à leur inclinaison différente sur la surface. Mais, pour le sujet présent, il suffit de ne considérer de toutes ces infinies sections que celles qui sont perpendiculaires sur la surface, dont le nombre est pourtant encore infini. Pour cet effet, on n'a qu'à tirer à la surface la ligne droite perpendiculaire, & toutes les sections qui passent par cette ligne sont en même tems perpendiculaires à la surface, alors pour chacune de ces sections il faut chercher la courbure, ou le rayon osculateur, & l'assemblage de tous ces rayons nous donnera la juste mesure de la courbure de la surface au point donné, où il faut observer que chacun de ces rayons tombe sur la même direction qui est perpendiculaire à la surface, & que les arcs élémentaires de toutes ces sections appartiennent aux lignes les plus courbes qu'on peut tirer sur la surface.

Or, pour rendre ces recherches plus générales, je commencerai par déterminer le rayon osculateur pour une section quelconque plane, dont on coupe la surface; ensuite j'appliquerai cette solution aux sections qui sont perpendiculaires à la surface, dans un point donné quelconque; & enfin je comparerai entr'eux les rayons osculateurs de toutes ces sections, par rapport à leur inclinaison mutuelle, ce qui nous mettra en état d'établir une idée juste de la courbure des surfaces. Toutes ces recherches se réduisent donc aux problemes suivans.

P R O B L E M E I.

1. *Une surface dont la nature est connue étant coupée par un plan quelconque, déterminer la courbure de la section, qui en est formée.*

S O L U T I O N.

Planche III.
Fig. 1.

Qu'on rapporte la surface à un plan fixe qui soit celui de la planche, & y ayant baissé d'un point quelconque Z de la surface la per-



perpendiculaire ZY, & du point Y à un axe fixe AC la perpendiculaire YX, soient les trois coordonnées AX = x, XY = y, & YZ = z: & puisque la nature de la surface est connue, la quantité z fera égale à une certaine fonction des deux autres x & y. Supposons donc qu'on en tire par la différentiation $dz = p dx + q dy$,

de sorte que $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, & $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$. Que la section dont

on coupe la surface passe par le point Z, & que l'interfection de son plan avec notre plan fixe soit la ligne EF. Soit $z = ay - \xi x + \gamma$, équation qui détermine ce plan, & posant $z = 0$, l'équation $y = \frac{\xi x - \gamma}{a}$,

donnera l'interfection EF, d'où nous tirons: $AE = \frac{\gamma}{\xi}$: & la tan-

gente de l'angle CEF = $\frac{\xi}{a}$, donc le sinus = $\frac{\xi}{\sqrt{(aa + \xi\xi)}}$,

& le cosinus = $\frac{a}{\sqrt{(aa + \xi\xi)}}$. De là, en égalant les deux valeurs

de z, nous aurons une équation pour la section $ay - \xi dx = p dx + q dy$,

ou bien $\frac{dy}{dx} = \frac{\xi + p}{a - q}$. Mais, pour réduire cette équation à des

coordonnées rectangulaires, tirons de Y à l'interfection EF la perpendiculaire YT, & la droite ZT y sera aussi perpendiculaire.

Maintenant, puisque $EX = x - \frac{\gamma}{\xi}$, nous aurons

$$ET = \frac{ax + \xi y}{\sqrt{(aa + \xi\xi)}} - \frac{a\gamma}{\xi\sqrt{(aa + \xi\xi)}}, \quad \&$$

$$TY = \frac{ay - \xi x}{\sqrt{(aa + \xi\xi)}} + \frac{\gamma}{\sqrt{(aa + \xi\xi)}} = \frac{z}{\sqrt{(aa + \xi\xi)}},$$

$$\& \text{ partant } TZ = \frac{z\sqrt{(1 + aa + \xi\xi)}}{\sqrt{(aa + \xi\xi)}} = \frac{(ay - \xi x + \gamma)\sqrt{(1 + aa + \xi\xi)}}{\sqrt{(aa + \xi\xi)}}.$$



Posant donc

$$ET = \frac{ax + \xi y}{V(aa + \xi\xi)} - \frac{ay}{\xi V(aa + \xi\xi)} = t, \quad \&$$

$$TZ = \frac{(ay - \xi x + \gamma)V(aa + \xi\xi + 1)}{V(aa + \xi\xi)} = u,$$

nous pourrons regarder ces lignes t & u comme des coordonnées orthogonales de la section en question. Donc, si nous posons $du = s dt$, le rayon osculateur de la section au point M fera =

$$\frac{dt(1 + ss)^{\frac{3}{2}}}{ds} \text{ tant qu'il est tourné vers la base EF. Il ne}$$

s'agit donc à présent qu'à réduire cette expression aux coordonnées x & y . Pour cet effet, puisque

$$dt = \frac{adx + \xi dy}{V(aa + \xi\xi)}, \quad \& \quad du = \frac{ady - \xi dx}{V(aa + \xi\xi)} V(1 + aa + \xi\xi),$$

à cause de $\frac{dy}{dx} = \frac{\xi + p}{\alpha - q}$ nous en tirons

$$s = \frac{du}{dt} = \frac{ap + \xi q}{aa + \xi\xi - aq + \xi p} V(1 + aa + \xi\xi),$$

$$\text{donc } 1 + ss = \frac{(aa + \xi\xi)(aa + \xi\xi - 2aq + 2\xi p + (ap + \xi q)^2 + pp + qq)}{(aa + \xi\xi - aq + \xi p)^2}.$$

Ensuite, pour le différentiel de s , nous aurons

$$ds = \frac{(aa + \xi\xi)(a p + \xi q - q dp + p dq) V(1 + aa + \xi\xi)}{(aa + \xi\xi - aq + \xi p)^2}.$$

Remarquons à présent que

$$dp = dx \left(\frac{dp}{dx} \right) + dy \left(\frac{dp}{dy} \right), \quad \& \quad dq = dx \left(\frac{dq}{dx} \right) + dy \left(\frac{dq}{dy} \right),$$

d'où

d'où nous concluons :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(a - q) \left(\frac{dp}{dx}\right) + (\xi + p) \left(\frac{dp}{dy}\right)}{aa + \xi\xi - aq + \xi p} \sqrt{(aa + \xi\xi)}, \quad \&$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{(a - q) \left(\frac{dq}{dx}\right) + (\xi + p) \left(\frac{dq}{dy}\right)}{aa + \xi\xi - aq + \xi p} \sqrt{(aa + \xi\xi)},$$

& partant :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(aa + \xi\xi)^{\frac{3}{2}} \left((a - q)^2 \left(\frac{dp}{dx}\right) + (\xi + p)^2 \left(\frac{dq}{dy}\right) + 2(a - q)(\xi + p) \left(\frac{dp}{dy}\right) \right) \sqrt{(1 + aa + \xi\xi)}}{(aa + \xi\xi - aq + \xi p)^3}$$

à cause de $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{dp}{dy}\right)$, comme il est connu d'ailleurs. Par conséquent, le rayon osculateur de la section au point Z sera exprimé en sorte :

$$\frac{(aa + \xi\xi - 2aq + 2\xi p + (ap + \xi q)^2 + pp + qq)^{\frac{3}{2}}}{\left((a - q)^2 \left(\frac{dp}{dx}\right) + (\xi + p)^2 \left(\frac{dq}{dy}\right) + 2(a - q)(\xi + p) \left(\frac{dp}{dy}\right) \right) \sqrt{(1 + aa + \xi\xi)}}$$

Voilà donc la véritable expression du rayon osculateur pour une section quelconque, dont on coupe la surface proposée.

COROLLAIRE I.

2. L'inclinaison de cette section au plan fixe est mesurée par l'angle YTZ , dont la tangente est $\frac{YZ}{YT} = \sqrt{(aa + \xi\xi)}$, &

partant le sinus $= \frac{\sqrt{(aa + \xi\xi)}}{\sqrt{(1 + aa + \xi\xi)}}$, & le cosinus $=$

$\frac{1}{\sqrt{(1 + aa + \xi\xi)}}$, pendant que de l'angle CEF la tangente

Q 2

est



$$\text{est} = \frac{\xi}{a}; \text{ donc le sinus} = \frac{\xi}{\sqrt{aa + \xi\xi}}, \text{ \& le cosinus} \\ = \frac{a}{\sqrt{aa + \xi\xi}}.$$

C O R O L L A I R E II.

3. Par rapport à la section, il n'y a que les deux lettres a & ξ , qui entrent dans la détermination du rayon osculateur, la troisième lettre γ étant comprise dans la condition que la section passe par le point Z . Or ces deux lettres se réduisent aux deux angles CEF , & YTZ .

C O R O L L A I R E III.

4. Si nous posons ces angles $CEF = \zeta$, & $YTZ = \theta$, nous aurons $\xi = a \operatorname{tang} \zeta$, & $\sqrt{aa + \xi\xi} = \operatorname{tang} \theta$, d'où il s'enfuit $a = \operatorname{cof} \zeta \operatorname{tang} \theta$, & $\xi = \sin \zeta \operatorname{tang} \theta$; & de plus $\sqrt{1 + aa + \xi\xi} = \frac{1}{\operatorname{cof} \theta}$. Mais cette substitution ne rend pas plus simple l'expression que nous venons de trouver pour le rayon osculateur.

P R O B L E M E II.

Fig. 2.

5. Si le plan de la section est perpendiculaire à la surface au point Z , déterminer le rayon osculateur de cette section au même point Z .

S O L U T I O N.

Pour cet effet on n'a qu'à tirer du point Z la ligne ZP , qui soit perpendiculaire à la surface, & faire en sorte que le plan de la section passe par cette ligne ZP . Qu'on considère deux autres sections faites par le point Z , l'une & l'autre perpendiculaire au plan de la planche, l'intersection de l'une étant la ligne YM parallèle à l'axe AL , & celle de l'autre YN y soit perpendiculaire. Pour la première de ces deux sections, la quantité $XY = y$ doit être prise constante, & l'équation $dz = p dx$ donnera pour la sousnormale

YM



$YM = \frac{z dz}{dy} = pz$. Or, pour l'autre section, prenant x constan-

te, l'équation $dx = q dy$ donne la sousnormale $YN = \frac{z dz}{dy} = qz$.

Tirant maintenant par les points M & N les lignes MP & NP parallèles aux coordonnées XY & AX qui s'entrecoupent au point P, la droite ZP sera perpendiculaire à l'une & l'autre de nos deux sections, & partant elle sera aussi perpendiculaire à la surface au point Z. Il faut donc que les sections dont il est question dans le problème passent par cette ligne ZP, qui donnera en même tems la position du rayon osculateur, que nous cherchons. Nous n'avons donc qu'à faire passer l'intersection EF par le point P. Soit ζ l'angle PEL, que fait cette intersection avec l'axe AL, de sorte que $\xi = a \operatorname{tang} \zeta$; & puisque la perpendiculaire tirée de N sur EP seroit $= NP \sin \zeta = pz \sin \zeta$, nous en concluons la perpendiculaire $YT = z(p \sin \zeta - q \operatorname{cof} \zeta)$,

& partant la tangente de l'angle $YTZ = \frac{1}{p \sin \zeta - q \operatorname{cof} \zeta}$, qui

sera la valeur de $\operatorname{tang} \theta$, & de là nous tirons $a = \frac{\operatorname{cof} \zeta}{p \sin \zeta - q \operatorname{cof} \zeta}$,

& $\xi = \frac{\sin \zeta}{p \sin \zeta - q \operatorname{cof} \zeta}$: donc, puisque $\xi : a = \sin \zeta : \operatorname{cof} \zeta$,

l'une & l'autre donne $dp - aq = 1$. Or, substituant ces valeurs pour a & ξ dans l'expression trouvée pour le rayon osculateur, le numérateur deviendra

$$\frac{(1 + pp + qq)^{\frac{3}{2}} (1 + (p \sin \zeta - q \operatorname{cof} \zeta)^2)^{\frac{3}{2}}}{(p \sin \zeta - q \operatorname{cof} \zeta)^3},$$

& pour le dénominateur

$$V(1 + aa + \xi\xi) = \frac{V(1 + (p \sin \zeta - q \operatorname{cof} \zeta)^2)}{p \sin \zeta - q \operatorname{cof} \zeta},$$



& l'autre facteur :

$$\frac{((1+qq)\text{cf}\zeta\text{pqcf}\zeta)^2 \left(\frac{dp}{dx}\right) + ((1+pp)\zeta\text{pqcf}\zeta)^2 \left(\frac{dq}{dy}\right) + 2((1+qq)\text{cf}\zeta\text{pqcf}\zeta)((1+pp)\zeta\text{pqcf}\zeta) \left(\frac{dp}{dy}\right)}{(p \sin \zeta - q \cos \zeta)^2}$$

& partant le rayon osculateur au point Z sera

$$-(1 + (p \sin \zeta - q \cos \zeta)^2)(1 + pp + qq)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{((1+qq)\text{cf}\zeta\text{pqcf}\zeta)^2 \left(\frac{dp}{dx}\right) + ((1+pp)\zeta\text{pqcf}\zeta)^2 \left(\frac{dq}{dy}\right) + 2((1+qq)\text{cf}\zeta\text{pqcf}\zeta)((1+pp)\zeta\text{pqcf}\zeta) \left(\frac{dp}{dy}\right)}{(p \sin \zeta - q \cos \zeta)^2}$$

C O R O L L A I R E I.

6. Voilà donc la grandeur du rayon osculateur, tant pour tous les points de la surface que pour toutes les sections faites perpendiculairement à la surface dans chacun de ses points, le point Z de la surface étant déterminé par les quantités p & q , & la diversité des sections par l'angle ζ .

C O R O L L A I R E II.

7. Le point Z de la surface étant donné avec la position de la droite ZP, qui y est perpendiculaire à la surface, chaque ligne droite EF tirée par le point P fournit une telle section faite selon le plan EPZ.

Remarque.

8. Parmi toutes ces sections nous pourrions regarder comme la principale celle dont la ligne EF passe par le point Y de la base, & partant dont le plan même est perpendiculaire sur la base. Alors, puisque l'intervalle YT évanouit, pour l'angle FEL = ζ , nous avons cette détermination $p \sin \zeta - q \cos \zeta = 0$, & partant

$$\sin \zeta = \frac{q}{\sqrt{pp + qq}}, \quad \& \quad \cos \zeta = \frac{p}{\sqrt{pp + qq}}$$

substituant ces valeurs, nous aurons pour le rayon osculateur de cette section



section principale

$$\frac{-(pp + qq)(1 + pp + qq)^{\frac{3}{2}}}{pp \left(\frac{dp}{dx}\right) + qq \left(\frac{dq}{dy}\right) + 2pq \left(\frac{dp}{dy}\right)},$$

laquelle expression est d'autant plus remarquable, qu'elle paroît la plus simple de toutes les sections faites par le point Z. Cependant cette autre section, où l'intervalle $PT = p \cos \zeta + q \sin \zeta$ évanouit, & l'intersection EF est perpendiculaire à la ligne PY, semble encore surpasser en simplicité celle-là. Car, puisque $\sin \zeta = \frac{p}{V(pp + qq)}$,

& $\cos \zeta = \frac{q}{V(pp + qq)}$, le rayon osculateur est exprimé par cette formule

$$\frac{-(pp + qq)(1 + pp + qq)^{\frac{3}{2}}}{qq \left(\frac{dp}{dx}\right) + pp \left(\frac{dq}{dy}\right) - 2pq \left(\frac{dp}{dy}\right)},$$

où il est bon d'observer que cette section est perpendiculaire à la précédente.

PROBLEME III.

2. Une surface quelconque étant proposée, trouver le rayon Planche IV
Fig. 3 osculateur pour une section EPZ, qui fait avec la section principale YPZ un angle donné = φ .

SOLUTION.

Pour la position de la section principale YPZ, nous venons de trouver $YM = pz$, & $MP = qz$, donc $YP = zV(pp + qq)$, & partant

$$\sin YPM = \frac{p}{V(pp + qq)}, \quad \& \quad \cos YPM = \frac{q}{V(pp + qq)}.$$

Et



Ensuite, à cause de $ZP = z\sqrt{(1 + pp + qq)}$, nous aurons

$$\sin YPZ = \frac{1}{\sqrt{(1 + fp + qq)}}, \quad \& \quad \cos YPZ = \frac{\sqrt{(pp + qq)}}{\sqrt{(1 + fp + qq)}}.$$

Soit à présent Φ l'angle que fait la nouvelle section EPZ avec la principale YPZ, que nous supposons être tournée vers l'axe AL, de sorte que, si l'angle Φ tendoit à l'autre côté on le devoit prendre négatif. Or, pour introduire dans le calcul cette inclinaison Φ , puisque le plan YPZ est perpendiculaire à la base, tirons YS en sorte, que l'angle PYS soit droit, afin que cette ligne YS soit perpendiculaire au plan YPZ: qu'on tire de plus dans ce plan la ligne YR perpendiculaire: soit PZ, & nous aurons

$$YR = \frac{z\sqrt{(pp + qq)}}{\sqrt{(1 + fp + qq)}}, \quad \& \quad PR = \frac{z(pp + qq)}{\sqrt{(1 + fp + qq)}},$$

& parce que la ligne SR sera aussi perpendiculaire à la ligne PZ, qui est l'intersection de nos deux plans, l'angle YRS en mesure l'inclinaison, de sorte que $YRS = \Phi$. De là on tire

$$YS = YR \tan \Phi = \frac{z \tan \Phi \sqrt{(fp + qq)}}{\sqrt{(1 + pp + qq)}},$$

& partant

$$PS = z\sqrt{\left(fp + qq + \frac{\tan^2 \Phi (fp + qq)}{1 + fp + qq}\right)} = \frac{z\sqrt{((fp + qq)(1 + fp + qq) + \tan^2 \Phi)}}{\sqrt{(1 + fp + qq)}},$$

d'où nous concluons l'angle EPY, en sorte que

$$\tan EPY = \frac{\tan \Phi}{\sqrt{(1 + pp + qq)}}.$$

Donc, puisque $\tan YPM = \frac{p}{q}$, nous aurons

$$\tan EPM = \frac{p\sqrt{(1 + pp + qq)} - q \tan \Phi}{q\sqrt{(1 + pp + qq)} + p \tan \Phi} = \cot PEL = \frac{\cos \zeta}{\sin \zeta},$$

en posant comme ci-dessus l'angle LEP = ζ .

Pofons



Posons pour abrégé

$$V(pp + qq)(1 + pp + qq + \text{tang } \Phi^2) = r,$$

& nous trouvons:

$$p \sin \zeta - q \cos \zeta = \frac{(pp + qq) \text{tang } \Phi}{r} = \frac{\text{tang } \Phi V(pp + qq)}{V(1 + pp + qq + \text{tang } \Phi^2)},$$

donc

$$1 + (p \sin \zeta - q \cos \zeta)^2 = \frac{\sec \Phi^2 (1 + pp + qq)}{1 + pp + qq + \text{tang } \Phi^2}.$$

Ensuite

$$(1 + qq) \cos \zeta - pq \sin \zeta = \frac{p - q \text{tang } \Phi V(1 + pp + qq)}{r} \cdot V(1 + pp + qq),$$

$$\& (1 + pp) \sin \zeta - pq \cos \zeta = \frac{q + p \text{tang } \Phi V(1 + pp + qq)}{r} \cdot V(1 + pp + qq),$$

à cause de

$$\sin \zeta = \frac{qV(1 + pp + qq) + p \text{tang } \Phi}{r}, \quad \& \cos \zeta = \frac{pV(1 + pp + qq) - q \text{tang } \Phi}{r},$$

Substituons maintenant ces valeurs dans l'expression précédente, & le rayon osculateur de la section EPZ sera:

$$\frac{-(pp + qq)(1 + pp + qq)^{\frac{3}{2}} \sec \Phi^2}{\left(\frac{dp}{dx}\right)(p - q \text{tang } \Phi V(1 + pp + qq))^2 + \left(\frac{dq}{dy}\right)(q + p \text{tang } \Phi V(1 + pp + qq))^2 + 2\left(\frac{dp}{dy}\right)(p - q \text{tang } \Phi V(1 + pp + qq))(q + p \text{tang } \Phi V(1 + pp + qq))}$$

COROLLAIRE I.

10. Pour abrégé cette formule, posons $V(1 + pp + qq) = u$,
& l'expression pour notre rayon osculateur deviendra:

$$\frac{-u^3 (pp + qq) \sec \Phi^2}{(p - q \text{tang } \Phi)^2 \left(\frac{dp}{dx}\right) + (q + p \text{tang } \Phi)^2 \left(\frac{dq}{dy}\right) + 2(p - q \text{tang } \Phi)(q + p \text{tang } \Phi) \left(\frac{dp}{dy}\right)},$$



qui se réduit à celle-ci :

$$\frac{-u^3(pp+qq)}{(p \operatorname{cof} \Phi - qu \sin \Phi)^2 \left(\frac{dp}{dx}\right) + (q \operatorname{cof} \Phi + pu \sin \Phi)^2 \left(\frac{dq}{dy}\right) + 2(p \operatorname{cof} \Phi - qu \sin \Phi)(q \operatorname{cof} \Phi + pu \sin \Phi) \left(\frac{dp}{dy}\right)}$$

COROLLAIRE II.

11. Si nous posons ensuite

$$p \operatorname{cof} \Phi - qu \sin \Phi = s(q \operatorname{cof} \Phi + pu \sin \Phi),$$

notre expression pour le rayon osculateur deviendra encore plus simple, & se réduit à celle-ci :

$$\frac{-u^3(pp+qq)}{(q \operatorname{cof} \Phi + pu \sin \Phi)^2 \left(ss \left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dy}\right) + 2s \left(\frac{dp}{dy}\right) \right)},$$

où l'on a $\frac{\sin \Phi}{\operatorname{cof} \Phi} = \frac{p - sq}{u(q + sp)}$, & de là cette expression devient

$$\frac{-u(1 + qq + 2spq + ss(1 + pp))}{ss \left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dy}\right) + 2s \left(\frac{dp}{dy}\right)},$$

où, prenant s à volonté, on en connoitra aisément l'inclinaison Φ , que la section fait avec la section principale.

COROLLAIRE III.

12. Ici il se présente d'abord deux sections fort remarquables, l'une où $s = 0$, ou bien $\operatorname{tang} \Phi = \frac{p}{qu}$, donc

$$\sin \Phi = \frac{p}{V(pp+qq)(1+qq)}, \quad \& \quad \operatorname{cof} \Phi = \frac{qV(1+pp+qq)}{V(pp+qq)(1+qq)},$$

pour laquelle le rayon osculateur est $= \frac{-u(1+qq)}{\left(\frac{dq}{dy}\right)}$.

L'autre

L'autre section est où $s = \infty$, & $\text{tang } \phi = \frac{-q}{pu}$, donc

$$\sin \phi = \frac{p}{V(pp+qq)(1+pp)}, \text{ \& } \cos \phi = -\frac{pV(1+pp+qq)}{V(pp+qq)(1+pp)},$$

pour laquelle le rayon osculateur est $= -\frac{u(1+pp)}{\left(\frac{dp}{dx}\right)}$. Or la

tangente de l'inclinaison mutuelle de ces deux sections est $= -\frac{1}{pq}$, en supposant celle de la dernière avec la principale plus grande.

C O R O L L A I R E IV.

13. Pour le même point Z de la surface, tous les rayons osculateurs des diverses sections ne sauroient être égaux entr'eux, à moins que ces trois formules $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, $\left(\frac{dq}{dy}\right)$, $\left(\frac{dp}{dy}\right)$, ne soient proportionnelles à ces trois expressions $1+pp$, $1+qq$, pq : ou bien à moins que ces trois équations n'ayent lieu.

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = R(1+pp); \left(\frac{dq}{dy}\right) = R(1+qq), \text{ \& } \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right) = Rpq,$$

ou $p q \left(\frac{dp}{dx}\right) = (1+pp)\left(\frac{dq}{dy}\right)$, & $p q \left(\frac{dq}{dy}\right) = (1+qq)\left(\frac{dp}{dx}\right)$.

Remarque.

14. La dernière formule est la plus commode pour en faire l'application à des cas proposés quelconques. L'équation pour la surface étant réduite par la différentiation à cette forme $dz = p dx + q dy$, on aura pour le rayon osculateur d'une section quelconque faite perpendiculairement à la surface au point Z sera exprimé par cette formule



$$\frac{-(1 + qq + 2spq + ss(1 + pp))\sqrt{(1 + pp + qq)}}{\left(\frac{dq}{dy}\right) + 2s\left(\frac{dp}{dy}\right) + ss\left(\frac{dp}{dx}\right)},$$

où la lettre s marque toutes les valeurs possibles, chaque valeur appartenant à une section déterminée : savoir, ayant fixé la section principale, qui est en même tems perpendiculaire à la base, la section qui répond à la lettre s est inclinée à celle-là d'un angle Φ , en sorte que

$$\text{tang } \Phi = \frac{p - sq}{(q + sp)\sqrt{(1 + pp + qq)'}}$$

en supposant cet angle tourné vers l'axe A L. Ou bien cet angle Φ étant donné, il faut prendre s en sorte qu'il soit

$$s = \frac{p \cos \Phi - q \sin \Phi \cdot \sqrt{(1 + pp + qq)'}}{q \cos \Phi + p \sin \Phi \cdot \sqrt{(1 + pp + pp)'}}$$

Quelques exemples serviront à nous mieux éclaircir sur cette recherche.

EXEMPLE I.

15. Soit le solide proposé un cylindre couché par son axe sur le plan fixe de la base, & posant le rayon de sa base $= a$, on aura cette équation $z = \sqrt{(aa - yy)}$, d'où l'on tire par la différentiation $dz = \frac{-y dy}{\sqrt{(aa - yy)'}}$, de sorte

que $p = 0$, & $q = \frac{-y}{\sqrt{(aa - yy)'}}$, donc

$$\sqrt{(1 + pp + qq)} = \frac{a}{\sqrt{(aa - yy)'}}$$

& les formules différentielles

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = 0; \quad \left(\frac{dq}{dy}\right) = \frac{-aa}{(aa - yy)^{\frac{3}{2}}}$$

La section principale étant perpendiculaire à l'axe du cylindre pour une

une autre section quelconque, qui est inclinée à la principale de l'angle Φ , il faut prendre $s = \frac{a \operatorname{tang} \Phi}{\sqrt{aa - yy}}$: & alors le rayon osculateur sera :

$$= \frac{(1 + qq + ss)}{aa : (aa - yy)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{aa - yy}} = \frac{1 + qq + ss}{a} (aa - y^2),$$

qui se réduit à cette forme : $a(1 + \operatorname{tang} \Phi^2) = \frac{a}{\operatorname{cof} \Phi^2}$; d'où l'on voit que pour la section principale le rayon osculateur est $= a$, à cause de $\Phi = 0$, & pour la section qui y est perpendiculaire & passe par l'axe du cylindre, il devient infini : ce qui marque que la section est une ligne droite.

Remarque.

16. Si, au lieu d'une base circulaire, on donne au cylindre une base quelconque, l'abscisse x , avec la lettre p , n'entre pas non plus en compte ; & puisque l'équation pour ce corps est la même que celle pour la base $dz = q dy$, où q est une fonction de y , on trouve pour tous les rayons osculateurs à chaque point cette expression

$$= \frac{dy (1 + qq) \sqrt{1 + qq}}{dq \operatorname{cof} \Phi^2},$$

d'où l'on voit comment la courbure décroît à mesure que les sections s'écartent de la principale qui est perpendiculaire à l'axe, & où le rayon osculateur est le plus petit $= \frac{dy}{dq} (1 + qq)^{\frac{3}{2}}$.

E X E M P L E II.

17. Soit le solide proposé un cône, dont l'axe est couché sur le plan fixe selon la direction AL, le sommet étant en A, & l'équation sera $z = \sqrt{nnxx - yy}$, posant nx pour le rayon de la section perpendiculaire à l'axe du cône au point X. Donc, puisque $dz = \frac{nnx dx - y dy}{\sqrt{nnxx - yy}}$, nous aurons



$$p = \frac{nnx}{V(nnxx - yy)}; \quad \& \quad q = \frac{-y}{V(nnxx - yy)},$$

& partant $V(1 + pp + qq) = \frac{nxV(1 + nn)}{V(nnxx - yy)}$. Ensuite les formules différentielles

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-nnx}{(nnxx - yy)^{\frac{1}{2}}}; \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{nnxy}{(nnxx - yy)^{\frac{3}{2}}}, \quad \left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{-nny}{(nnxx - yy)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où l'expression générale pour le rayon osculateur résulte

$$\frac{nnxx - 2nnsxy + nm(1 + nn)ssxx - ssyy}{ax - 2sxy + ssy} \cdot \frac{xV(1 + nn)}{n}$$

Or, pour la section principale, le point P où tombe la perpendiculaire ZP on a AL = (1 + nn)x, & LP = 0, de sorte que la section principale se trouve dans le plan ZYL. Donc, pour toute autre section qui y est inclinée de l'angle Φ , il faut prendre

$$s = \frac{nxy \sin \Phi V(1 + nn) + nnx \cos \Phi V(nnxx - yy)}{n^3 xx \sin \Phi V(1 + nn) - y \cos \Phi V(nnxx - yy)},$$

& si l'on substitue cette valeur dans l'expression trouvée pour le rayon osculateur, on aura

$$\frac{yy + n^4 xv}{(n \sin \Phi V(nnxx - yy) - y \cos \Phi V(1 + nn))^2} nxV(1 + nn).$$

Sans restreindre la solution on peut supposer $y = 0$, où la section principale passe par l'axe du cone, & pour toute autre section perpendiculaire à la surface du cone, le rayon osculateur sera

$$= \frac{nxV(1 + nn)}{\sin^2 \Phi}.$$

E X E M P L E III.

18. Soit le solide proposé un ellipsoïde quelconque exprimé par l'équation $zz = aa - mxx - nyy$, dont le centre étant

en A, les trois demi-axes principaux sont $AB = \frac{a}{\sqrt{m}}$, $AC = \frac{a}{\sqrt{n}}$, & $AD = a$, perpendiculaires entr'eux: où les quarts elliptiques BAC, BAD, & CAD représentent les trois sections principales faites par le centre A. Maintenant, pour un point quelconque Z de la surface, l'équation $z = \sqrt{(aa - mxx - nyy)}$, entre les coordonnées $AX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, donne

$$p = \frac{-mx}{\sqrt{(aa - mxx - nyy)}} = \frac{-mx}{z}; \quad q = \frac{-ny}{\sqrt{(aa - mxx - nyy)}} = \frac{-ny}{z}.$$

Donc, tirant par Z la droite ZP perpendiculaire à la surface elliptique, on aura

$$AL = x + pz = (1 - m)x, \quad \& \quad PL = y + qz = (1 - n)y,$$

& la section principale en Z se faisant selon le plan PYZ, son intersection avec la base BAC, ou bien la ligne PY, fera avec l'axe AB

un angle dont la tangente est $= \frac{XY - LP}{LX} = \frac{ny}{mx}$. Or toutes

les autres sections faites par le point Z doivent passer par la ligne ZP; posant donc ϕ l'inclinaison d'une telle section quelconque à la principale PZY, le rayon osculateur de cette section en Z sera déterminé de la manière suivante.

$$\sqrt{(1 + pp + qq)} = \frac{\sqrt{(aa - m(1 - m)xx - n(1 - n)yy)}}{\sqrt{(aa - mxx - nyy)}} = u.$$

Posant donc pour abrégier

$$\sqrt{(aa - m(1 - m)xx - n(1 - n)yy)} = v,$$

on a $u = \frac{v}{z}$. Ensuite nous avons:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{-m(aa - nyy)}{z^3}; \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{-mny}{z^3}; \quad \left(\frac{dq}{dy}\right) = \frac{-n(aa - mxx)}{z^3},$$

$$\& \quad pp + qq = \frac{mmxx - nnyy}{z^2}.$$



Servons nous plutôt de la formule trouvée dans le §. 10. que de celle, qui en a été dérivée, & ayant

$$p \cos \Phi - q \sin \Phi = \frac{-m \cdot x}{z} \cos \Phi + \frac{m \cdot y}{z} \sin \Phi = \frac{-m \cdot x z \cos \Phi + m \cdot y z \sin \Phi}{z z},$$

$$q \cos \Phi + p \sin \Phi = \frac{-n \cdot y}{z} \cos \Phi - \frac{m \cdot x}{z} \sin \Phi = \frac{-n \cdot y z \cos \Phi - m \cdot x z \sin \Phi}{z z},$$

le rayon osculateur sera exprimé par une fraction, dont le numérateur est $= v^3 z z (m m x x + n n y y)$, & le dénominateur

$$\begin{aligned} &+ m(a a - n y y)(m m x x z z \cos \Phi^2 - 2 m n x y z z \sin \Phi \cos \Phi + n n y y v v \sin \Phi^2) \\ &+ n(a a - m x x)(n n y y z z \cos \Phi^2 + 2 m n x y v z \sin \Phi \cos \Phi + m m x x v v \sin \Phi^2) \\ &+ 2 m n x y (m n y z z \cos \Phi^2 + (m m x x - n n y y) v z \sin \Phi \cos \Phi - m n x y v v \sin \Phi^2) \end{aligned}$$

qui se réduit à cette forme :

$$\begin{aligned} &+ z z \cos \Phi^2 (a a (m^3 x x + n^3 y y) - m n (m - n)^2 x x y y) \\ &- 2 m n (m - n) x y v z^3 \sin \Phi \cos \Phi \\ &+ m n v v z z \sin \Phi^2 (m x x + n y y), \end{aligned}$$

Donc, divisant le numérateur & le dénominateur par $z z$, nous aurons le rayon osculateur :

$$\frac{v^3 (m n x x + n n y y)}{a a (m^3 x x + n^3 y y) \cos \Phi^2 - m n (m - n)^2 x x y y \cos \Phi^2 - 2 m n (m - n) x y v \sin \Phi \cos \Phi + m n v v (m x x + n y y) \sin \Phi^2}$$

Ou bien, si nous posons ce rayon osculateur $= R$, nous aurons

$$\frac{1}{R} = \frac{a a (m^3 x x + n^3 y y) - m n (m - n)^2 x x y y}{v^3 (m m x x + n n y y)} \cos \Phi^2 - \frac{2 m n (m - n) x y v}{v v (m m x x + n n y y)} \sin \Phi \cos \Phi + \frac{m n (m x x + n y y)}{v (m m x x + n n y y)} \sin \Phi^2$$

C O R O L L A I R E I.

19. Si nous posons $m = 1$, & $n = 1$, nous aurons le cas d'un globe dont le rayon $= a$, & puisque $v = a$, le rayon

osculateur sera $\frac{a^3 (x x + y y)}{a a (x x + y y) \cos \Phi^2 + a a (x x + y y) \sin \Phi^2} = a$,

tout comme la nature de ce solide l'exige.



COROLLAIRE II.

20. Si $m = n$, & partant $AB = AC = \frac{a}{\sqrt{n}}$, donc notre solide sera un sphéroïde allongé ou aplati, formé par la révolution de l'ellipse ABD autour de l'axe AD , la base ABC devenant un cercle. Dans ce cas le rayon osculateur sera

$$R = \frac{v^3}{na \cos \Phi^2 + nv \sin \Phi^2} = \frac{(naa + (1-n)az)^{\frac{3}{2}}}{na \cos \Phi^2 + vna \sin \Phi^2 + n(1-n)az \sin \Phi^2}.$$

Donc, pour le point D , où $x = 0$, $y = 0$, $z = a$, & $v = a$, on aura $R = \frac{a}{n}$; mais, pour tous les points pris dans le cercle BC , ou l'équateur où $z = 0$, il y aura

$$R = \frac{a\sqrt{n}}{\cos \Phi^2 + n \sin \Phi^2}.$$

COROLLAIRE III.

21. Mais en général, quelle que soit la forme de l'ellipsoïde pour un point quelconque M de la base BMC , où $z = 0$, & $aa = mxx + nyy$, donc $vv = mrx + nyy$, l'expression pour le rayon osculateur y sera

$$R = \frac{v^3}{vv \cos \Phi^2 + nna \sin \Phi^2},$$

& partant, pour la section principale qui est perpendiculaire à la base où $\Phi = 0$, on a $R = v$, & pour la section faite par la base même $R = \frac{v^3}{nna}$, qui est le rayon osculateur de la courbe BMC au point M .

Remarque.

22. Dans ce cas il est remarquable que les rayons osculateurs ne sauroient être immédiatement tirés pour le sommet D . Il y faudroit



droit mettre $x = 0$, & $y = 0$, donc $z = a$, & $v = a$. Or, faisant ces substitutions, tant le numérateur que le dénominateur de notre formule évanouir, & on n'en sauroit tirer aucune conclusion. La raison en est que dans ce cas la section principale à laquelle se rapportent les autres par l'angle ϕ , devient indéterminée, puisque toutes les sections faites par le sommet D sont également perpendiculaires à la base BAC. Donc, pour en fixer une qui soit la principale ne posons d'abord que $y = 0$, & considérons le point N où

$$z = \sqrt{aa - mxx}, \quad \& \quad v = \sqrt{aa - m(1 - m)xx}.$$

Maintenant il n'est pas douteux, que la section principale ne se trouve dans le plan BNDA, & que pour toute autre section inclinée à celle-ci de l'angle ϕ , le rayon osculateur ne soit :

$$\frac{mmv^3}{m^3aa \cos^2\phi + mmvv \sin^2\phi} = \frac{v^3}{m^3aa \cos^2\phi + mvv \sin^2\phi}.$$

A présent posons aussi $x = 0$, pour avoir le sommet D, dont on considère la section principale dans le plan DAB, & puisque $v = a$,

$$\text{nous aurons } R = \frac{a}{m \cos^2\phi + n \sin^2\phi}.$$

Donc, pour la section faite dans le plan DAB, le rayon osculateur sera $= \frac{a}{m}$, le même que de la courbe BD au point D; & pour

la section faite dans le plan DCA, il sera $= \frac{a}{n}$, le même que de la courbe CD au point D.

C O N C L U S I O N.

23. Après ces exemples rapportés pour éclaircir les recherches précédentes, on peut tirer la conclusion suivante pour juger de la courbure de toutes les surfaces en général. Qu'on considère le plan qui touche la surface au point où l'on veut connoître la courbure. Soit le plan de la planche ce plan, qui touche la surface au point Z, & toutes les sections



sections pour lesquelles je viens de définir les rayons osculateurs, seront perpendiculaires à ce plan, & le couperont par quelque ligne droite EF, ou MN, qui passe par le point Z; de sorte que toutes les sections possibles soient représentées par quelque ligne droite tirée par le point Z, sur le plan touchant. Soit EF la section, que j'ai nommée ci-dessus la principale, & considérant une autre section quelconque MN, qui fasse avec celle-là un angle $EZM = \Phi$, & puisque le rayon osculateur de cette section MN a été trouvé au §. 10.

$$\frac{-u^3(pp+qq)}{(p \cos \Phi - q u \sin \Phi)^2 \left(\frac{dp}{dx}\right) + (q \cos \Phi + p u \sin \Phi)^2 \left(\frac{dq}{dy}\right) + 2(p \cos \Phi - q u \sin \Phi)(q \cos \Phi + p u \sin \Phi) \left(\frac{dp}{dy}\right)}$$

le dénominateur de cette expression se développe en cette forme:

$$\begin{aligned} &+ \cos^2 \Phi \cdot \left(pp \left(\frac{dp}{dx}\right) + qq \left(\frac{dq}{dy}\right) + 2pq \left(\frac{dp}{dy}\right) \right) \\ &+ 2u \sin \Phi \cos \Phi \left(-pq \left(\frac{dp}{dx}\right) + pq \left(\frac{dq}{dy}\right) + (pp - qq) \left(\frac{dp}{dy}\right) \right) \\ &+ uu \sin^2 \Phi \cdot \left(qq \left(\frac{dp}{dx}\right) + pp \left(\frac{dq}{dy}\right) - 2pq \left(\frac{dp}{dy}\right) \right) \end{aligned}$$

où il faut remarquer que les quantités u, p, q , avec les formules $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, $\left(\frac{dq}{dy}\right)$, & $\left(\frac{dp}{dy}\right)$, appartiennent uniquement à la détermination du point Z, & sont par conséquent communes à toutes les sections, dont la variété est renfermée dans le seul angle Φ . Donc en général, l'expression de tous les rayons osculateurs pour quelque surface que ce soit, doit toujours avoir cette forme

$$\frac{V}{P \cos^2 \Phi + Q \sin^2 \Phi + 2R \sin \Phi \cos \Phi},$$

qui, à cause de $\cos \Phi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\Phi$, $\sin \Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\Phi$,
& $\sin \Phi \cos \Phi = \frac{1}{2} \sin 2\Phi$, se réduit à celle-ci

$$\frac{1}{L + M \cos 2\Phi + N \sin 2\Phi}$$

qui me fournit les réflexions suivantes.

I Réflexion.

24. C'est donc cette formule qui renferme la nature de la courbure des surfaces à chacun de leurs points. Il est évident que cette formule peut varier à l'infini, à cause de l'infinité des valeurs dont chacune de ces trois lettres L, M, & N, est susceptible, & deux élémens d'une même ou de différentes surfaces ne sauroient être estimés avoir la même courbure, à moins que ces trois lettres n'aient les mêmes valeurs de part & d'autre ou qu'elles n'y soient réductibles en augmentant ou diminuant l'angle Φ d'une quantité constante. Car, puisque la section EF est arbitraire, l'identité de courbure en deux élémens subsiste également, quoique les angles Φ de l'un & de l'autre ne commencent point de la même section, pourvu que la loi suivant laquelle les rayons osculateurs augmentent ou diminuent soit la même dans tous les deux.

II Réflexion.

25. Mais il faut ici principalement observer, que, dès qu'on connoit les rayons osculateurs pour trois sections différentes, ceux pour toutes les autres en sont parfaitement déterminés. Soient a, b, c , les rayons osculateurs pour les trois sections, qui répondent aux angles α, β, γ , pris pour Φ , & ces trois équations:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= L + M \cos 2\alpha + N \sin 2\alpha; \\ \frac{1}{b} &= L + M \cos 2\beta + N \sin 2\beta, & \& \\ \frac{1}{c} &= L + M \cos 2\gamma + N \sin 2\gamma, \end{aligned}$$

nous



nous découvriront les valeurs des trois lettres L, M, & N, lesquelles étant substituées dans notre formule déterminent les rayons osculateurs pour toutes les autres sections. Par conséquent dès que deux élémens se ressemblent par rapport aux trois rayons osculateurs, qui répondent à des sections également inclinées entr'elles de part & d'autre, toute la courbure de ces deux élémens est parfaitement la même.

III Réflexion.

26. De notre formule générale nous pourrons assigner les sections auxquelles répondent le plus grand & le plus petit rayon osculateur. La méthode des plus grands & plus petits nous fournissant cette égalité

$$- 2M \sin 2\phi + 2N \cos 2\phi = 0,$$

nous en tirons $\tan 2\phi = \frac{N}{M}$. Donc, si ζ est l'angle dont la tangente est $= \frac{N}{M}$, l'angle $180^\circ + \zeta$, convient également, & de là nous trouvons ces deux valeurs pour l'angle ϕ .

$$\text{I. } \phi = \frac{1}{2}\zeta, \quad \& \quad \text{II. } \phi = 90^\circ + \frac{1}{2}\zeta,$$

dont l'un répond au plus grand rayon osculateur & l'autre au plus petit: d'où l'on tire cette conséquence bien importante, que, quelle que soit la courbure d'un élément, les deux sections, dont l'une contient la plus grande courbure & l'autre la plus petite, sont toujours normales entr'elles.

IV Réflexion.

27. Donc, si le plus grand rayon osculateur convient à la section EF, le plus petit se trouvera certainement dans la section GH, qui y est perpendiculaire, & réciproquement. Supposons donc que EF soit une de ces sections, où le rayon osculateur est le plus grand ou le plus petit; & pour toute autre section MN, qui y est inclinée de



l'angle $EZM = \phi$, le rayon osculateur sera nécessairement $= \frac{1}{L + M \cos 2\phi}$, la quantité N devant évanouir pour cette situation, puisque d'ailleurs les plus grand & plus petit ne répondroient point aux valeurs $\phi = 0$, & $\phi = 90^\circ$, comme nous le supposons.

V Réflexion.

28. Pour comparer donc les courbures de deux élémens entr'elles, on n'a qu'à chercher pour chacun les sections qui donnent le plus grand & le plus petit rayon osculateur, & si l'on trouve ces deux rayons les mêmes dans l'une & l'autre, on peut prononcer hardiment, que ces deux élémens sont doués de la même courbure. Et partant, pour connoître la véritable courbure d'un élément quelconque de surface, il suffit d'en chercher le plus grand & le plus petit rayon osculateur: puisque ceux de toutes les autres sections en sont déterminés parfaitement, en sorte qu'aucune variété n'y sauroit plus avoir lieu.

VI Réflexion.

30. Soit le plus grand rayon osculateur $= f$, qui convienne à la section EF , & le plus petit $= g$, pour la section GH perpendiculaire à la précédente. Cela posé, pour toute autre section MN inclinée à la première EF de l'angle $EZM = \phi$, le rayon osculateur qui soit $= r$, sera déterminé uniquement des deux précédens, & l'angle ϕ de la manière suivante. La formule générale

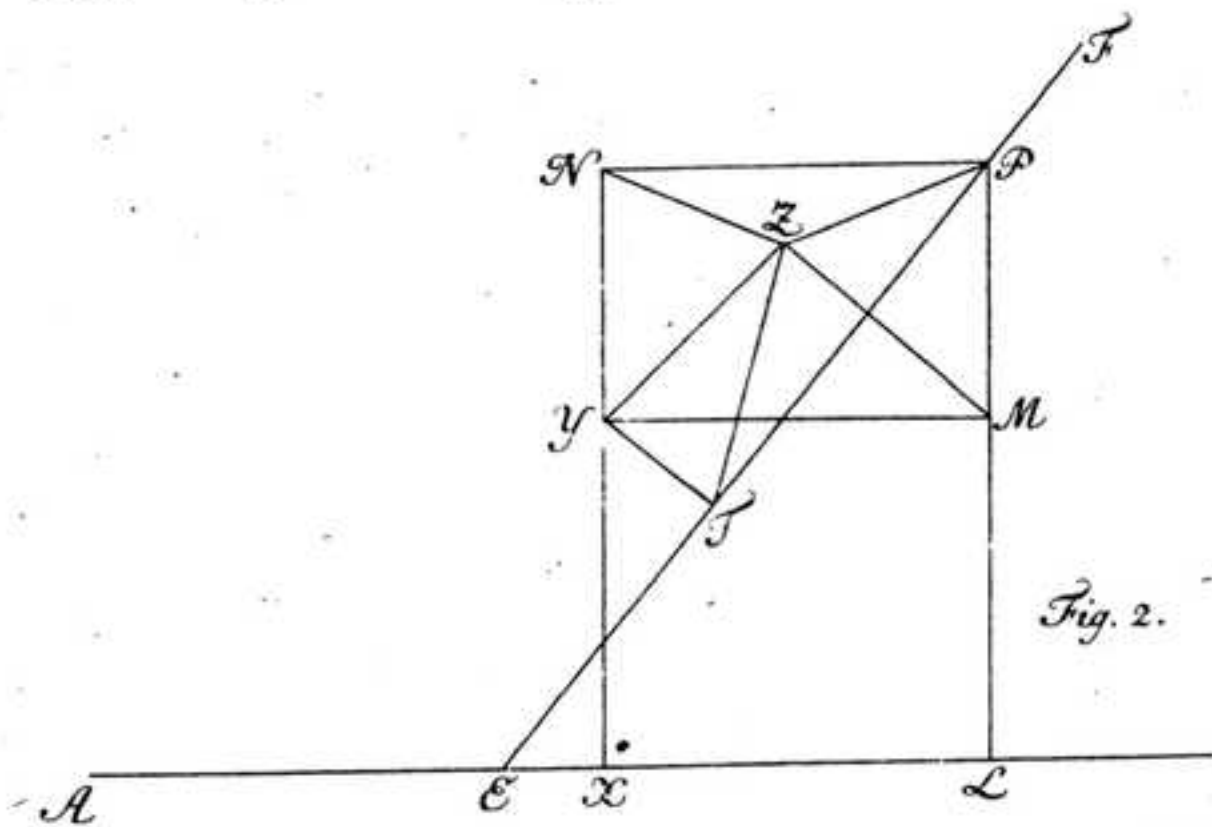
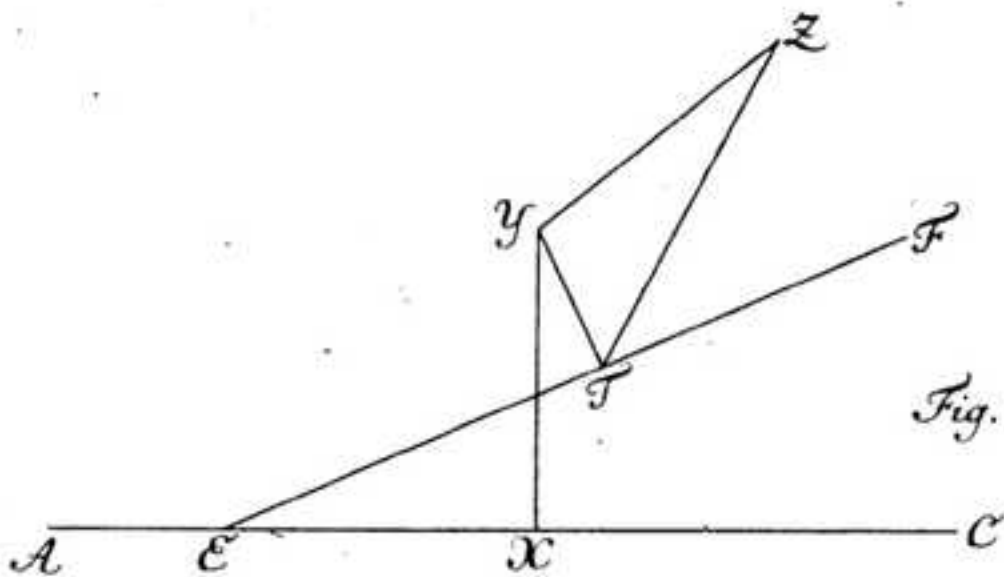
$$r = \frac{1}{L + M \cos 2\phi},$$

posant $\phi = 0$, donne $L + M = \frac{1}{f}$, or posant $\phi = 90^\circ$,

il en résulte $L - M = \frac{1}{g}$, d'où l'on tire $L = \frac{f+g}{2fg}$, & $M = \frac{-(f-g)}{2fg}$,

& partant nous aurons: $r = \frac{2fg}{f + g - (f - g) \cos 2\phi}$.

Pour



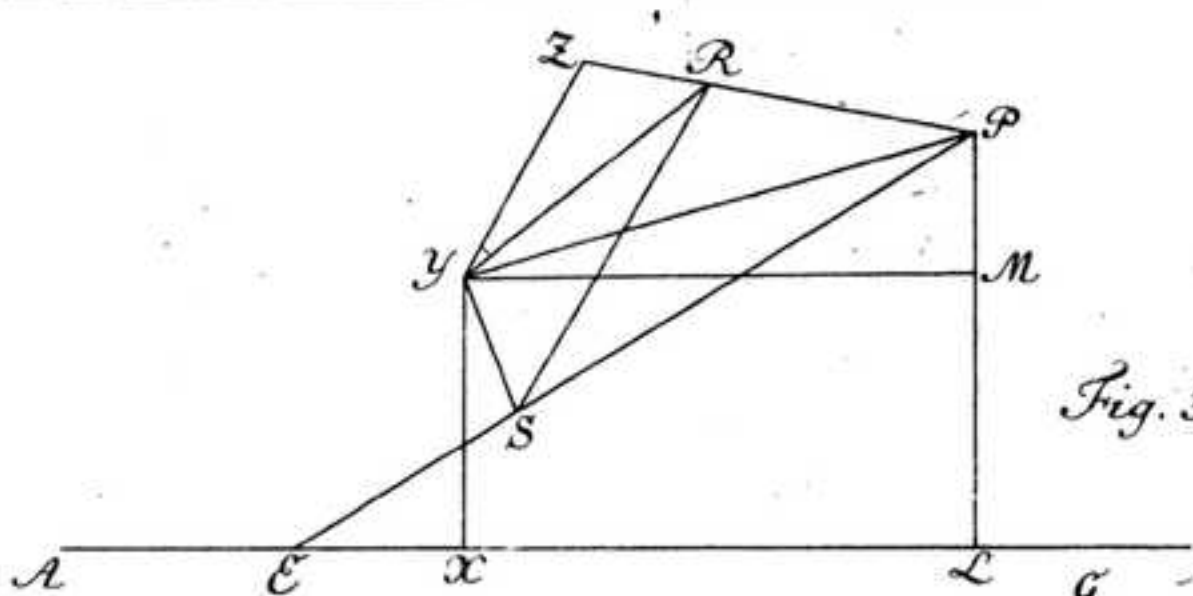


Fig. 3.

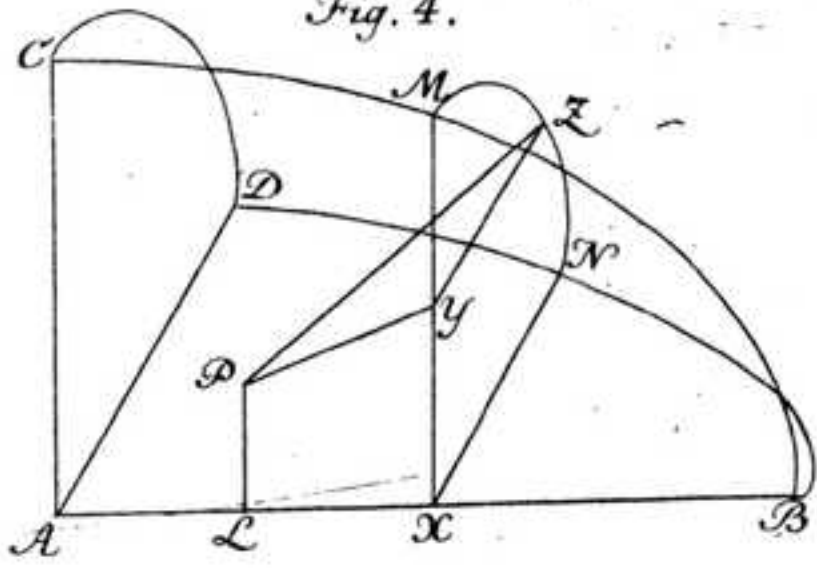


Fig. 4.

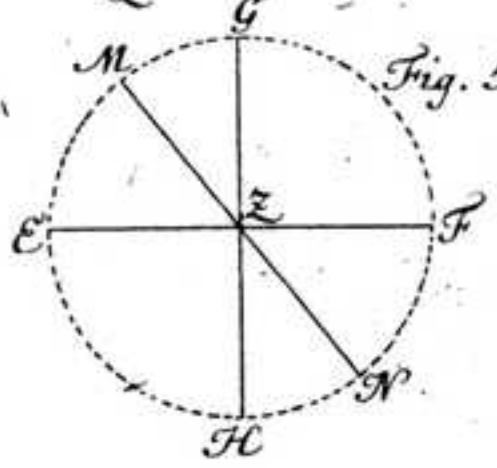


Fig. 5.

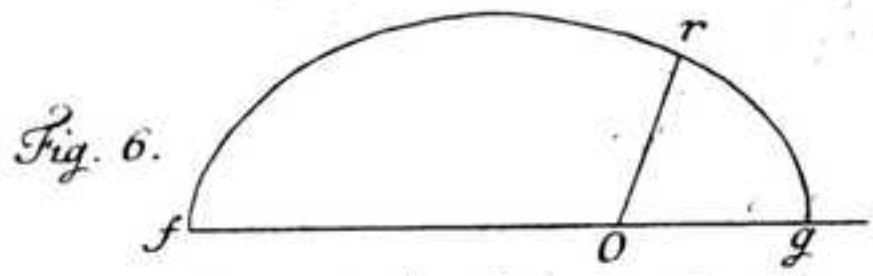


Fig. 6.



Pour donner une construction aisée de cette formule, qu'on joigne ensemble le plus grand rayon osculateur & le plus petit en prenant $Of = f$, & $Og = g$, & qu'on décrive sur la ligne fg , une demi-ellipse dont un foyer soit au point O : alors, pour la section MN on n'a qu'à prendre l'angle fOr , le double de l'angle EZM , & la ligne Or sera égale au rayon osculateur pour la section MN . Ainsi le jugement sur la courbure des surfaces, quelque compliqué qu'il ait paru au commencement, se réduit pour chaque élément à la connoissance de deux rayons osculateurs, dont l'un est le plus grand & l'autre le plus petit dans cet élément; ces deux choses déterminent entièrement la nature de la courbure en nous découvrant la courbure de toutes les sections possibles, qui sont perpendiculaires sur l'élément proposé.

Mais, pour juger du plus grand ou plus petit rayon osculateur, il faut avertir, que ce jugement doit être réglé sur le réciproque du rayon osculateur $\frac{1}{R}$, en sorte que, si R est tantôt positif tantôt négatif, la valeur $R = \infty$, ou $\frac{1}{R} = 0$, n'est ni un plus grand ni un plus petit.

Enfin on comprend aisément, que, comme dans les lignes courbes il y a certaines irrégularités par rapport aux points doubles & multiples, il en faut reconnoître de semblables dans les surfaces, qui ne sont pas assujetties à notre règle d'ailleurs générale.

