TEORIA DE GRAFOS

Algunas correcciones y agregados al Apunte 6a

1. La demostración de que $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ en el Lema 2 (página 2) es incorrecta. La demostración correcta es:

Definimos $\kappa(G)$ como el mínimo número de vértices que hay que sacar para desconectar a G o reducirlo a un vértice. Si G es disconexo o tiene un solo vértice definimos $\kappa(G) = 0$. Definimos $\lambda(G)$ como el mínimo número de ramas que hay que sacar para desconectar a G. Si G es disconexo o tiene un solo vértice definimos $\lambda(G) = 0$.

Caso 1: si G es disconexo o tiene un solo vértice entonces $\kappa(G) = 0$ y $\lambda(G) = 0$
Caso 2: si $\lambda(G) = 1$, sea (u, v) una rama que desconecta a G. Si gr $u \geq$ gr v entonces es fácil ver que suprimiendo u se desconecta G y por lo tanto $\kappa(G) = 1$.
Caso 3: Si $\lambda = \lambda(G) \geq 2$: Sean $e_1, \ldots, e_\lambda$ las λ ramas que desconectan a G, con $e_\lambda = (u, v)$ Sacamos un extremo de e_1 que sea distinto de u y de v, con lo cual queda eliminada e_1. Si queda alguna de las ramas $e_2, \ldots, e_{\lambda-1}$ sacamos un extremo de alguna de esas ramas que sea distinto de u y de v. Así continuamos sacando vértices hasta obtener un grafo G' que no contiene a ninguna de las ramas $e_1, \ldots, e_{\lambda-1}$ pero que contiene a e_λ. Notar que G' se obtiene de G sacando r vértices para un $r \leq \lambda - 1$.
Si G' es disconexo entonces $\kappa(G) \leq r < \lambda$.
Ejercicio: Probar que si G es conexo y $e = (u, v)$ es una rama de G entonces e es una rama de corte de G si y sólo si el único camino simple de u a v en G es $u \longrightarrow v$.
Veamos ahora que si G' es conexo entonces e_λ es una rama de corte de G'. En efecto, si $G' - \{e_\lambda\}$ fuese conexo entonces habría un camino simple de u a v en $G' - \{e_\lambda\}$ y por lo tanto ese sería un camino simple de u a v en $G - \{e_1, \ldots, e_{\lambda-1}\}$ distinto de $u \longrightarrow v$. Pero e_λ es una rama de corte en $G - \{e_1, \ldots, e_{\lambda-1}\}$. Absurdo.
Luego, G' es conexo y $G' - \{e_\lambda\}$ es disconexo, por lo tanto $\lambda(G') = 1$, de donde $\kappa(G') = 1$ por el caso 2. Entonces sacando un vértice a G' queda un grafo disconexo o reducido a un vértice y en consecuencia, sacando $r + 1$ vértices a G queda un grafo disconexo o reducido a un vértice lo que muestra que $\kappa(G) \leq r + 1 \leq \lambda$.

2. En la demostración del Teorema 3 (página 2) falta aclarar en qué se hace inducción.

Dados dos vértices distintos u y v de un grafo G conexo, definimos $d(u, v)$ como el número de ramas del camino más corto de u a v en G. La inducción se hace en $d(u, v)$: se prueba que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale

Si u y v son dos vértices distintos de G tales que $d(u, v) = k$ entonces existen dos caminos de u a v en G que son disjuntos por vértices.
En a) se prueba que la afirmación vale para $k = 1$ y en b) el paso inductivo.

3. En el Lema 4 (página 2) y en el Teorema 5 (página 3) el algoritmo depth-first search al que se hace referencia es el que se describe en el ej. 9 de la práctica 5.

4. Otra demostración del Teorema 5 (página 3): Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y sea $s \in V$. Sea $T = (V, E')$ el árbol dirigido con raíz s generado por el algoritmo search. Entonces u es un vértice de corte de G si y sólo si $u = s$ y tiene más de un hijo o bien $u \neq s$ y existe un hijo h de u tal que ni h ni ninguno de sus descendientes es adyacente a un antecesor de u.

Dem: $(\Rightarrow)$ Sea u un vértice de corte en G.

1) Si $u = s$: si tuviera un solo hijo entonces s sería una hoja de T y por lo tanto $T - \{s\}$ sería conexo. Luego $G - \{s\}$ sería conexo porque T es un spanning tree de G.

2) Si $u \neq s$: supongamos que para todo hijo h de u valiera que h o alguno de sus descendientes fuese adyacente a un antecesor de u. Sean $h_1, h_2, \ldots, h_n$ los hijos de u. Para cada i sea $A_i = \{h_i\} \cup \{\text{descendientes de } h_i\}$ y sea $v_i \in A_i$ tal que v_i es adyacente a un antecesor w_i de u. Como $e_1 = (w_1, v_1)$ es una rama de G que no pertenece a T entonces el árbol $T_1 = T + e_1 - (u, h_1)$ es un spanning tree de G que no contiene a la rama (u, h_1). Como $e_2 = (w_2, v_2)$ es una rama de G que no pertenece a T_1 entonces el árbol $T_2 = T_1 + e_2 - (u, h_2)$ es un spanning tree de G que no contiene a la ramas (u, h_1), (u, h_2). Continuando de esta manera obtenemos un spanning tree T_n de G que contiene una sola rama que incide en u (la rama $(p(u), u)$). Luego, u es una hoja de T_n y por lo tanto $T_n - \{u\}$ es conexo. Luego $G - \{u\}$ sería conexo.

$(\Leftarrow)$ Si $u = s$ y tiene un sólo hijo veremos que s es un vértice de corte:
Sean h_1, h_2 dos hijos de s. Basta mostrar que todo camino en G de h_1 a h_2 pasa por s. Sea $A = \{h_1\} \cup \{\text{descendientes de } h_1\}$. Si $\mathcal{C}$ es un camino en G de h_1 a h_2

$$h_1 \text{———} v_1 \text{———} v_2 \text{———} v_3 \cdots\cdots\cdots\cdots v_n \text{———} h_2$$

Como $h_1 \in A$ y $h_2 \notin A$ entonces existe $e = (v, w) \in \mathcal{C}$ tal que $v \in A$ y $w \notin A$. Luego, v es descendiente de w o w es descendiente de v, pero como $w \notin A$ esto último no puede ocurrir. Por lo tanto, $v \in A$ y w es un antecesor de v que no pertenece a A de donde resulta que w es un antecesor de h_1 y por lo tanto $w = s$. Luego $\mathcal{C}$ pasa por s.
Supongamos ahora que $u \neq s$ y existe un hijo h de u tal que ni h ni ninguno de sus descendientes es adyacente a un antecesor de u. Veremos que u es un vértice de corte: basta probar que todo camino en G de h a $p(u)$ pasa por u. Consideremos el conjunto $A = \{h\} \cup \{\text{descendientes de } h\}$ y sea $\mathcal{C}$ un camino en G de h a $p(u)$

$$h \text{———} v_1 \text{———} v_2 \text{———} v_3 \cdots\cdots\cdots\cdots v_n \text{———} p(u)$$

Como $h \in A$ y $p(u) \notin A$ entonces existe $e = (v, w) \in \mathcal{C}$ tal que $v \in A$ y $w \notin A$. Luego, v es descendiente de w o w es descendiente de v, pero como $w \notin A$ esto último no puede ocurrir. Por lo tanto, $v \in A$ y w es un antecesor de v que no pertenece a A de donde resulta que $w = u$ o w es un antecesor de u. Pero w no puede ser un antecesor de u pues $v \in A$, v es adyacente a w y por hipótesis ni h ni ninguno de sus descendientes es adyacente a un antecesor de u. Luego $w = u$ y por lo tanto $\mathcal{C}$ pasa por u.

5. La definición correcta de low (w) (página 4) es

$$\text{low}\ (w) = \text{mín}\ \{df(u)\,/\,u = w \text{ o } u \text{ es adyacente en } G - E' \text{ a algún nodo de } A(w)\}$$

donde $A(w) = \{w\} \cup \{\text{descendientes de } w\}$ y E' es el conjunto de ramas del árbol dirigido con raíz generado por el search.

6. Modificación del algoritmo depth-first search que incluye el cálculo de low:

1. **Inicializar:** $A = \{s\}$, $df(s) = 1$, $df(v) = 0\,\forall v \neq s$, $\text{low}(s) = 1$, $k = 1$
2. **While** $A \neq \emptyset$ **do:** de todos los vértices que están en A sea u el último que ingresó.
   If $\nexists v$ adyacente a u tal que $df(v) = 0$ **then** $A = A - \{u\}$
   Else elegir un nodo v adyacente a u tal que $df(v) = 0$,
      $k = k + 1$
      $df(v) = k$
      $p(v) = u$
      $A = A \cup \{v\}$
      Calcular $\text{low}(v)$
      Para cada $w \in A\,/\;\; \text{low}(w) > \text{low}(v)$, actualizar $\text{low}(w) = \text{low}(v)$

donde $\text{low}(v)$:

1. $j = 1$, $\text{low}(v) = df(v)$
2. If $j \geq df(u)$ then return $\text{low}(v)$.
   Else: sea $w\,/\,df(w) = j$.
      If (v, w) es una rama de G then $\text{low}(v) = j$ and return $\text{low}(v)$.
      Else: $j = j + 1$, GOTO 2.

7. Algoritmo para hallar los blocks de un grafo conexo (página 4).

Sea G un grafo conexo con por lo menos dos vértices. Diremos que B es un block de G sii B es un subgrafo conexo de G que no tiene ningún vértice de corte y todo subgrafo conexo de G que contiene a B tiene al menos un vértice de corte.
Si B es un block de G entonces B es $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ o B es biconexo.

El siguiente algoritmo halla los blocks de G:

1. Elegir $s \in V$ y hallar, usando el algoritmo depth-first search
   $C = \{\text{vértices de corte de } G\}$
   El árbol T que es un árbol dirigido con raíz s y un spanning tree de G
   $df(v)$ y $\text{low}(v)$, para cada $v \in V$

2. Ordenar C en orden decreciente de $df(v)$ ($v \in C$). (Luego $C = \{v_1, \ldots, v_k\}$ con $df(v_i) \geq df(v_{i+1})$)

3. Inicializar $i = 0$, $j = 1$, $T' = T$

4. Si no existe un hijo w de v_j en T' tal que $\text{low}(w) \geq df(v_j)$ ir a 6.

5. Elegir un hijo w de v_j en T' tal que $\text{low}(w) \geq df(v_j)$
   $i = i + 1$
   $V_i = \{v_j\} \cup \{$vértices del subárbol T'_w de T' que cuelga de w
   $T' = T' - T'_w$
   GOTO 4.

6. $j = j + 1$

7. Si $j \leq k$ ir a 4.

8. If $T' = \emptyset$ then $m = i$
   Else: $m = i + 1$, $V_m = \{$vértices de $T'\}$

9. Return $V_1, \ldots, V_m$

Ejercicio: Probar que al terminar el algoritmo los blocks de G son los subgrafos inducidos por $V_1, \ldots, V_m$

8. Teorema de Menger (página 5).

Sea $G = (V, E)$ un grafo (respectivamente un grafo dirigido) y sean s y t dos vértices de G. Diremos que $U \subseteq E$ es un conjunto de ramas que desconecta o separa s de t si y en $G - U$ no existe ningún camino (respectivamente camino dirigido) de s a t.
Diremos que dos caminos (respectivamente caminos dirigidos) de s a t son disjuntos por ramas si no tienen ninguna rama en común. Diremos que k caminos (respectivamente caminos dirigidos) $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ de s a t son disjuntos por ramas si $\mathcal{C}_i$ y $\mathcal{C}_j$ son disjuntos por ramas $\forall i \neq j$.

Sea $G = (V, E)$ un grafo (respectivamente un grafo dirigido) y sean s y t dos vértices no adyacentes de G. Diremos que $U \subseteq V$ es un conjunto de vértices que desconecta o separa s de t si $s, t \notin U$ y en $G - U$ no existe ningún camino (respectivamente camino dirigido) de s a t.
Diremos que dos caminos (respectivamente caminos dirigidos) de s a t son disjuntos por vértices si no tienen ningún vértice en común salvo s y t. Diremos que k caminos (respectivamente caminos dirigidos) $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ de s a t son disjuntos por vértices si $\mathcal{C}_i$ y $\mathcal{C}_j$ son disjuntos por vértices $\forall i \neq j$.

Teorema 1. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido y sean s y t dos vértices de G. Entonces el máximo número de caminos dirigidos de s a t que son disjuntos por ramas es igual al mínimo número de ramas que hay que sacar para desconectar s de t.

Dem: la hicimos cuando vimos las aplicaciones de Ford-Fulkerson

Teorema 2. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean s y t dos vértices de G. Entonces el máximo número de caminos de s a t que son disjuntos por ramas es igual al mínimo número de ramas que hay que sacar para desconectar s de t.

Dem: está en la práctica como ejercicio.

Teorema 3. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido y sean s y t dos vértices no adyacentes de G. Entonces el máximo número de caminos dirigidos de s a t que son disjuntos por vértices es igual al mínimo número de vértices que hay que sacar para desconectar s de t.

Dem: Sea P el máximo número de caminos dirigidos de s a t que son disjuntos por vértices y sea N el mínimo número de vértices que hay que sacar para desconectar s de t.

$P \leq N$ pues para desconectar s de t necesitamos sacar al menos un vértice de cada uno de los P caminos.

A partir de G construímos un grafo dirigido G' de la siguiente manera:
Para cada vértice u de G, $u \neq s, t$, ponemos dos vértices u' y u'' en G' y una rama $u' \longrightarrow u''$
Para cada rama $u \longrightarrow v$ de G ponemos una rama

$$\begin{cases} s \longrightarrow v' & \text{si } u = s \\ u'' \longrightarrow t & \text{si } v = t \\ u'' \longrightarrow v' & \text{si } u \neq s \text{ y } v \neq t \end{cases}$$

Asignamos capacidad 1 a cada rama de G' y hallamos el máximo flujo x en G' y su correspondiente mínimo corte ∂A.
Luego, los caminos formados por las ramas que tienen flujo 1 se corresponden con $|x|$ caminos dirigidos de s a t en G que son disjuntos por vértices. En efecto, como de u' sale sólo una rama y esa rama tiene capacidad 1 entonces a lo sumo puede haber una rama con flujo 1 que llegue a u' y como en u'' entra sólo una rama y esa rama tiene capacidad 1 entonces a lo sumo puede haber una rama con flujo 1 que salga de u''.
Por lo tanto $|x| \leq P$.

Además, como sacando las ramas de ∂A se desconecta s de t en G' entonces sacando un extremo que sea distinto de s y t de cada una de esas ramas se desconecta s de t en G'. Por lo tanto sacando $|\partial A|$ vértices en G se desconecta s de t en G (si en G' sacamos u' o u'' entonces en G sacamos u).
Luego, $N \leq |\partial A|$ y como la capacidad de ∂A es igual a $|\partial A|$ pues las ramas tienen capacidad 1 entonces se tiene que

$$|x| \leq P \leq N \leq \text{ capacidad de } \partial A = |x|$$

de donde $P = N$.

Teorema 4. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean s y t dos vértices no adyacentes de G. Entonces el máximo número de caminos de s a t que son disjuntos por vértices es igual al mínimo número de vértices que hay que sacar para desconectar s de t.

Dem: A partir de G construír el grafo dirigido G' que resulta de reemplazar cada rama $u \longrightarrow v$ de G por dos ramas $u \longrightarrow v$ y $v \longrightarrow u$ y aplicar a G' el teorema 3.

Nota: El teorema 4 fue demostrado por Menger en 1927, mucho antes de que se conociera el algoritmo de Ford y Fulkerson. La demostración original de Menger se encuentra en el Apunte 6b.