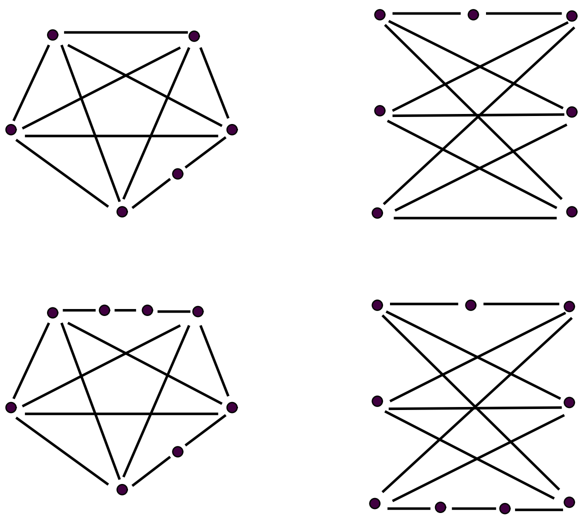
Teorema de Kuratowski

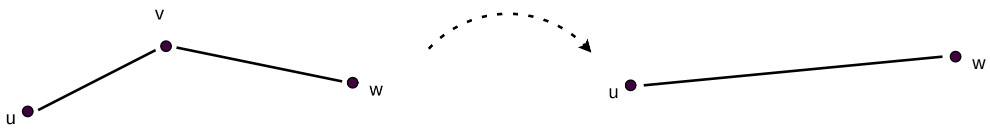
Hemos visto que los grafos K_5 y $K_{3,3}$ no son planares. Pero existen otros grafos no planares, por ejemplo los grafos



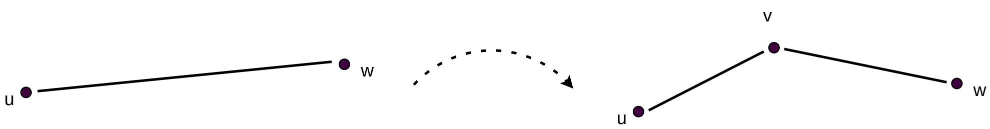
ya que si pudiéramos dibujar estos grafos en el plano de manera que sus ramas no se corten entonces podríamos obtener un dibujo plano de K_5 o de $K_{3,3}$.
En general, dado un grafo planar $G = (V, E)$ que tiene un vértice v de grado 2, si (u, v) y (v, w) son las dos únicas ramas que inciden en v, entonces el grafo $\overline{G}$ que se obtiene eliminando de G el vértice v y las dos ramas que inciden en él y agregando la rama (u, w) también es planar.

Definición: Diremos que G es *homeomorfo* a $\overline{G}$ si $\overline{G}$ se obtiene aplicando a G un número finito de transformaciones de cualquiera de los siguientes tipos:

I) eliminar de G un vértice v de grado 2 y reemplazar las dos únicas ramas (u, v) y (v, w) que inciden en v por una rama (u, w). (Si (u, w) fuese una rama de G entonces no la agregamos.)



II) eliminar una rama (u, w) de G y agregar un nuevo vértice v y las ramas (u, v) y (v, w).



Es claro que si G es homeomorfo a $\overline{G}$ entonces G es planar si y sólo si $\overline{G}$ lo es. Luego, si un grafo es homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$ entonces no es planar.

Además, como cualquier subgrafo de un grafo planar es planar, cualquier grafo que contenga un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$ no puede ser planar.
El teorema de Kuratowski muestra que vale la recíproca.

Teorema: (Kuratowski, 1930) Un grafo G es planar si y sólo si no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$.

Para poder demostrar el teorema necesitaremos antes algunas definiciones y resultados.

Lema 1: Sea G un grafo planar. Si F es una cara de un dibujo plano D de G entonces existe un dibujo plano de G en el cual F es la cara exterior.

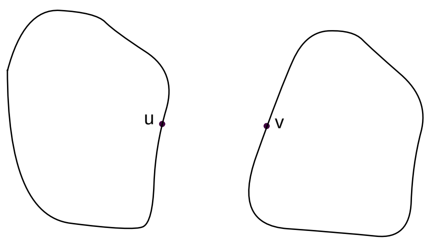
Demostración: Basta copiar D en la esfera unitaria de manera tal que el punto del infinito sea un punto interior de la cara F y luego aplicar la proyección estereográfica. □

Corolario: Sea G un grafo planar. Si x es un vértice de G entonces existe un dibujo plano de G en el cual x pertenece a la cara exterior y si e es una rama de G entonces existe un dibujo plano de G en el cual e pertenece a la cara exterior.

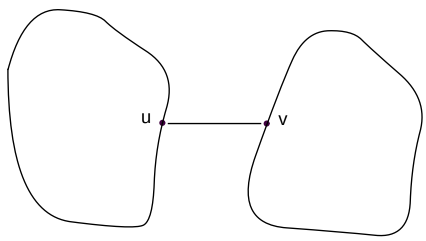
Demostración: Basta elegir una cara F de un dibujo plano D de G que contenga a x o a e y aplicar el lema 1. □

Lema 2: Sea G un grafo no planar y sea $e = (u, v)$ una rama de G. Si $G - \{e\}$ es planar entonces existe un camino de u a v en $G - \{e\}$.

Demostración: Supongamos que no existe un camino de u a v en $G - \{e\}$. Entonces, si $\mathcal{C}_u$ es la componente conexa de u en $G - \{e\}$ se tiene que $v \notin \mathcal{C}_u$. Como $\mathcal{C}_u$ y $G - \mathcal{C}_u$ son subgrafos de $G - \{e\}$ entonces son planares. Sea D_1 un dibujo plano de $\mathcal{C}_u$ y sea D_2 un dibujo plano de $G - \mathcal{C}_u$. Sea F_1 una cara de D_1 que contiene a u y sea F_2 una cara de D_2 que contiene a v. Por el lema 1, existen dibujos planos de $\mathcal{C}_u$ y $G - \mathcal{C}_u$ tales que u y v pertenecen a las respectivas caras exteriores.

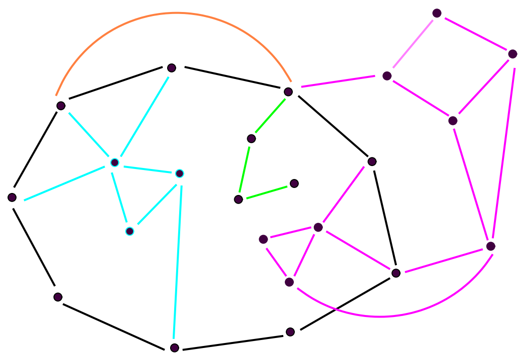


Pero entonces podíamos agregar la rama (u, v) y obtener así un dibujo plano de G.



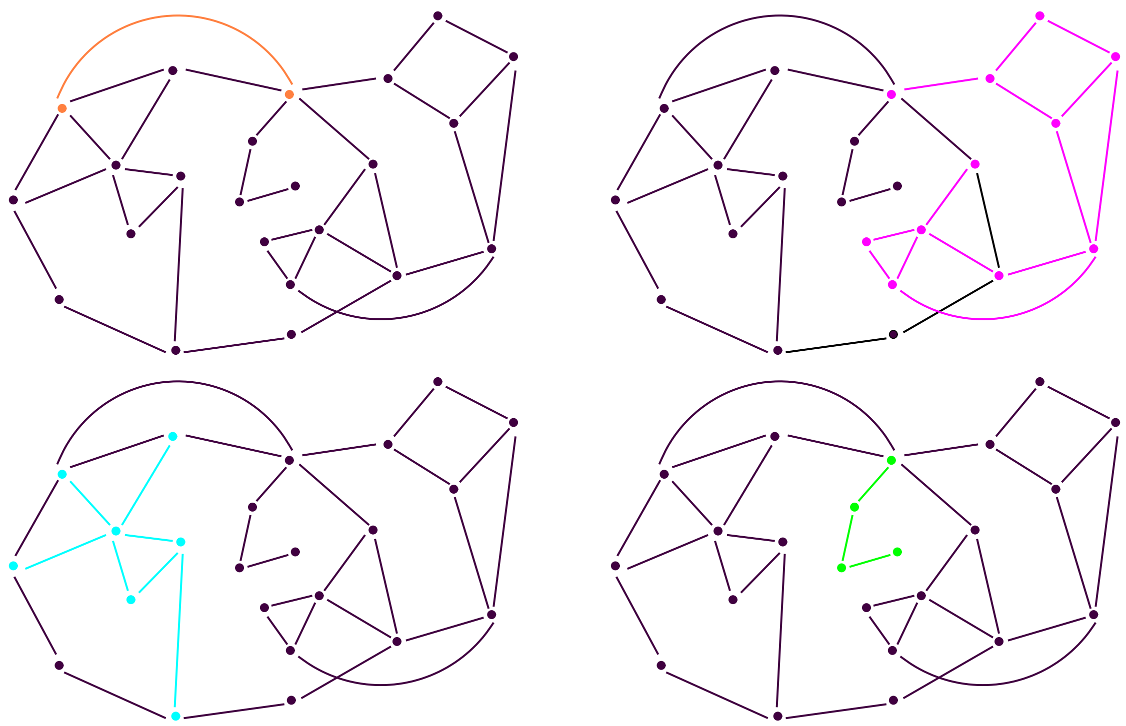
lo cual es absurdo pues G no era planar. □

Definiremos ahora la noción de apéndice que utilizaremos en la demostración del teorema. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, donde hemos fijado un ciclo $\mathcal{C}$, y sea $\sim$ la relación de equivalencia definida en el conjunto de ramas de G que no pertenecen al ciclo en la forma: $e_1 \sim e_2 \iff e_1 = e_2$ o existe un camino en G que no tiene ningún vértice interior perteneciente a $\mathcal{C}$, cuya primera rama es e_1 y cuya última rama es e_2. Dejamos como tarea para el lector verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
Ejemplo: En el siguiente grafo consideramos el ciclo $\mathcal{C}$ formado por las ramas negras. Entonces el conjunto de ramas de G que no pertenecen al ciclo se parte en 4 clases de equivalencia, cada una formada por las ramas de un mismo color.



Definición: Diremos que un subgrafo P de G es un *apéndice* si P es el subgrafo inducido por una clase de equivalencia de $\sim$ (es decir, las ramas de P son una clase de equivalencia de $\sim$ y los vértices son todos los extremos de esas ramas).

En el ejemplo anterior, G tiene 4 apéndices



Definición: Sea P un apéndice de G. Diremos que un vértice v de P es un *punto de contacto* (con el ciclo $\mathcal{C}$) si $v \in P \cap \mathcal{C}$.

Observación: Todo apéndice P tiene al menos un punto de contacto. En efecto, elijamos una rama $e = (u, v) \in P$ y un vértice w del ciclo $\mathcal{C}$. Si $v \in \mathcal{C}$ entonces ese es un vértice de contacto pues $v \in P$. En caso contrario $v \neq w$ y, como G es conexo, existe un camino en G de v a w

$$v = u_1 \text{ ——— } u_2 \text{ ——— } \cdots \text{ ——— } u_{n-1} \text{ ——— } u_n = w$$

Sea j el primer índice tal que $u_j \in \mathcal{C}$ (existe pues $w \in \mathcal{C}$). Entonces $j \geq 2$ y el camino

$$u \text{ ——— } v = u_1 \text{ ——— } u_2 \text{ ——— } \cdots \text{ ——— } u_{j-1} \text{ ——— } u_j$$

no tiene ningún vértice interior perteneciente a $\mathcal{C}$. Luego, la rama (u_{j-1}, u_j) es equivalente a $e = (u, v)$ y por lo tanto pertenece a P. Luego $u_j \in P$ por ser extremo de una rama de P, de donde u_j es un vértice de contacto.

Lema 3: Si P es un apéndice de G y $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es el conjunto de sus vértices de contacto, entonces $P - U$ es conexo para todo $U \subseteq \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ (podría ser $U = \emptyset$).

Demostración: Sea U un subconjunto de $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ y sean $u, v \in P - U$. Si (u, v) es una rama de P, entonces ese es un camino de u a v en $P - U$. Si, en cambio, no lo es entonces existen dos ramas distintas e_1 y e_2 de P tal que u es un extremo de e_1 y v es un extremo de e_2. Como e_1 y e_2 son ramas de P entonces $e_1 \sim e_2$, de donde existe un camino $\mathcal{R}$ en G

$$\bullet \overset{e_1}{\text{———}} \bullet \text{ ——— } \cdots \text{ ——— } \bullet \overset{e_2}{\text{———}} \bullet$$

tal que ninguno de sus vértices internos pertenece a $\mathcal{C}$. Luego, $\mathcal{R}$ es un camino en P ya que todas las ramas de ese camino son equivalentes a e_2. Además, como los vértices interiores no pertenecen a $\mathcal{C}$ y los elementos de U son vértices de $\mathcal{C}$ entonces ninguno de los vértices interiores de $\mathcal{R}$ pertenece a U. Luego, como u es un extremo de e_1 y v es un extremo de e_2, entonces u puede ser el primer o el segundo vértice y v puede ser el anteúlitmo o el último vértice de $\mathcal{R}$ pero, sea cual sea la situación, siempre la parte de $\mathcal{R}$ que va de u a v es un camino en $P - U$.

Por ejemplo, si la situación es $\bullet \overset{e_1}{\text{———}} \overset{u}{\bullet} \text{ ——— } \cdots \text{ ——— } \bullet \overset{e_2}{\text{———}} \overset{v}{\bullet}$

entonces el camino que se obtiene quitando el primer vértice y la rama e_1 es un camino de u a v en $P - U$. $\square$

Ejercicios:

1. Probar que dos apéndices distintos no tienen ninguna rama en común y, si tienen vértices en común, éstos pertenecen al ciclo $\mathcal{C}$.

2. Probar que si G es planar y P es un apéndice de G entonces, en cualquier dibujo plano de G, P es interior al ciclo $\mathcal{C}$ (toda rama está en el interior del ciclo) o P es exterior a $\mathcal{C}$ (toda rama está en el exterior del ciclo).

3. Sea P es un apéndice de G con por lo menos tres puntos de contacto s, s' y t. Probar que existen $w \in P - \mathcal{C}$ y tres caminos en P disjuntos por vértices de s, s' y t a w respectivamente tales que ninguno de sus vértices interiores pertenece a $\mathcal{C}$.

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema.

Teorema: (Kuratowski, 1930) Un grafo G es planar si y sólo si no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$.

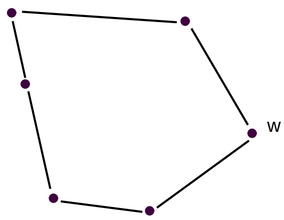
Demostración: ($\Rightarrow$) Ya vimos que cualquier grafo que contenga un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$ no puede ser planar.

($\Leftarrow$) Supongamos que exista un grafo no planar que no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$. De todos los grafos no planares que no contienen ningún subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$, sea $G = (V, E)$ uno con un mínimo número de ramas. Entonces valen

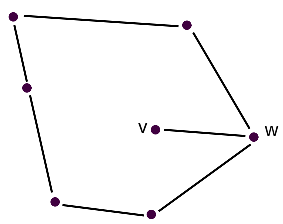
a) G es conexo.
Dem: Si G no fuese conexo entonces existiría al menos una componente conexa de G que no es planar y esta componente conexa tendría menos ramas que G y no contendría ningún subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$, lo cual no puede ocurrir.

b) Si e es una rama de G entonces $G - \{e\}$ es planar.
Dem: $G - \{e\}$ tiene menos ramas que G y no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$.

c) Todo vértice de G tiene grado mayor o igual que 3.
Dem: Como G es conexo y no es planar entonces no contiene vértices de grado cero. Supongamos que $\exists\, v \in V$ de grado 1. Sea (v, w) la única rama que incide en v. Entonces eliminando v y (v, w) obtendríamos un grafo G' que tiene menos ramas que G y no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$. Luego, este grafo debe ser planar. Sea D un dibujo plano de G' y sea F una cara de D que contiene a w.

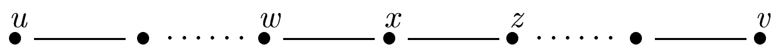


Entonces podríamos agregar el vértice v y la rama (v, w) y obtener un dibujo plano de G

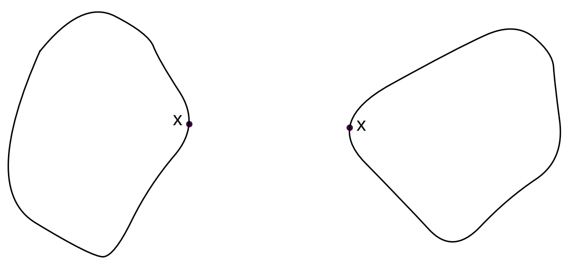


Supongamos ahora que $\exists\, v \in V$ de grado 2. Entonces, aplicando una transformación del tipo I) obtendríamos un grafo no planar $\overline{G}$ con menos ramas que G que no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$ (todo subgrafo de $\overline{G}$ es homeomorfo a un subgrafo de G).

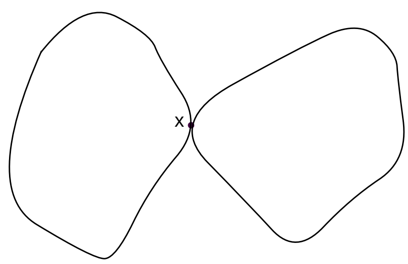
d) Si $x \in V$ entonces $G - \{x\}$ es conexo.
Dem: Sea $x \in V$ y supongamos que $G - \{x\}$ no es conexo. Sea H una componente conexa de $G - \{x\}$ y sea K su complemento. Sea G_1 el grafo que se obtiene agregando a H el vértice x y todas las ramas $(x, y) \in E$ tales que $y \in H$ y sea G_2 el grafo que se obtiene agregando a K el vértice x y todas las ramas $(x, y) \in E$ tales que $y \in K$. Entonces G_1 y G_2 son subgrafos de G y por lo tanto no contienen ningún subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$. Además, G_1 y G_2 tienen menos ramas que G. En efecto, sean $u \in H$ y $v \in K$. Como G es conexo, existe un camino de u a v en G y como u y v pertenecen a distinta componente conexa en $G - \{x\}$, ese camino debe pasar por x



Por lo tanto, si w es el vértice anterior a x en ese camino y z es el siguiente, se tiene que $w \in H$ y $z \in K$, de donde (w, x) no es una rama de G_2 y (x, z) no es una rama de G_1. Luego, G_1 y G_2 son planares y, por el corolario del lema 1, existen un dibujo plano de G_1 y un dibujo plano de G_2 tales que x pertenece a la cara exterior de ambos.



Ahora, "pegando" estos dos dibujos obtendríamos un dibujo plano de G



e) G es 3-conexo, es decir, si u y x son dos vértices de G entonces $G - \{u, x\}$ es conexo.
Dem: Supongamos que $\exists\, u, x$ tales que $G - \{u, x\}$ no es conexo. Sea $v \neq u, x$ tal que $(u, v) \in E$ (un tal v existe pues el grado de u es mayor o igual que 3). Sea H la componente conexa de $G - \{u, x\}$ que contiene a v y sea K su complemento.

Sea G_1 el grafo que se obtiene agregando a H los vértices u y x, la rama (u, x) y todas las ramas $(u, y) \in E$ y $(x, y) \in E$ tales que $y \in H$. Análogamente, sea G_2 el grafo que se obtiene agregando a K los vértices u y x, la rama (u, x) y todas las ramas $(u, y) \in E$ y $(x, y) \in E$ tales que $y \in K$. Si (u, x) no fuese una rama de G la agregamos igual tanto a G_1 como a G_2. Notar que entonces, para probar que G_1 y G_2 tienen menos ramas que G deberemos ver que hay al menos dos ramas de G que no no pertenecen a G_1 y al menos dos ramas de G que no pertenecen a G_2.

Sea $y \in K$. Como $G - \{x\}$ es conexo entonces existe un camino de v a y en $G - \{x\}$ y ese camino necesariamente pasa por u pues $v \in H$ e $y \notin H$. Sea h el vértice anterior y w el siguiente a u en ese camino.

$$\overset{v}{\bullet} \;\text{———}\; \bullet \cdots\cdots \overset{h}{\bullet} \;\text{———}\; \overset{u}{\bullet} \;\text{———}\; \overset{w}{\bullet} \cdots\cdots \bullet \;\text{———}\; \overset{y}{\bullet}$$

Entonces $w \in K$ pues pertenece a la misma componente conexa de $G - \{u, x\}$ que y (la parte de este camino que va de w a y es un camino en $G - \{u, x\}$). Análogamente, $h \in H$. Por lo tanto, la rama (u, w) no pertenece a G_1 y la rama (h, u) no pertenece a G_2. Además, la parte de este camino que va de v a u es un camino en $G_1 - \{(u, x)\}$ y la parte que va de u a y es un camino en $G_2 - \{(u, x)\}$.

De la misma manera, como $G - \{u\}$ es conexo, existe un camino de v a y en $G - \{u\}$ y necesariamente ese camino pasa por x. Sea z el vértice anterior a x en ese camino y sea k el siguiente

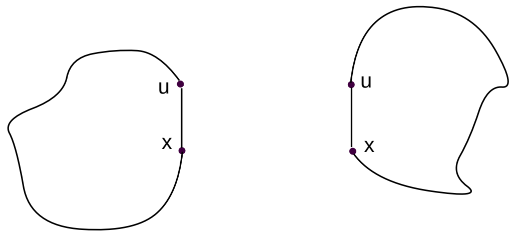
$$\overset{v}{\bullet} \;\text{———}\; \bullet \cdots\cdots \overset{z}{\bullet} \;\text{———}\; \overset{x}{\bullet} \;\text{———}\; \overset{k}{\bullet} \cdots\cdots \bullet \;\text{———}\; \overset{y}{\bullet}$$

Entonces $z \in H$ y $k \in K$. Por lo tanto la rama (z, x) no pertenece a G_2 y la rama (x, k) no pertenece a G_1. Además, la parte de este camino que va de v a x es un camino en $G_1 - \{(u, x)\}$ y la parte que va de x a y es un camino en $G_2 - \{(u, x)\}$.

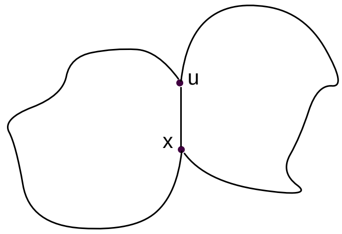
Luego, G_1 y G_2 tienen menos ramas que G, ya que hay al menos dos ramas de G que no pertenecen a G_1 y al menos dos ramas de G que no pertenecen a G_2.

Veamos ahora que G_1 no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$. Si (u, x) es una rama de G entonces G_1 es un subgrafo de G y esto es obvio. Si, en cambio, (u, x) no es una rama de G entonces basta observar que como $G_1 - \{(u, x)\}$ y $G_2 - \{(u, x)\}$ son subgrafos de G entonces G_1 es homeomorfo al subgrafo de G que se obtiene reemplazando la rama (u, x) de G_1 por un camino de u a x en $G_2 - \{(u, x)\}$ (un tal camino existe pues en $G - \{(u, x)\}$ hay un camino de u a y y un camino de y a x).

De la misma manera se ve que G_2 no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$. Luego, G_1 y G_2 son planares y, por el corolario del lema 1, existen un dibujo plano de G_1 y un dibujo plano de G_2 tales que la rama (u, x) pertenece a la cara exterior de ambos.



Ahora, “pegando” estos dos dibujos obtendríamos un dibujo plano de G

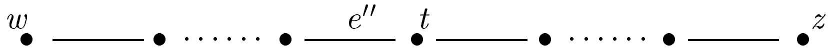


Probaremos ahora que G contiene un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$, lo cual es una contradicción.

Sea $e = (u, v)$ una rama de G. Entonces $G - \{e\}$ es planar. Luego, por el lema 2, existe un camino de u a v en $G - \{e\}$. Por lo tanto, $G - \{e\}$ es conexo (ya que G lo es y existe un camino de u a v en $G - \{e\}$). Además, en $G - \{e\}$ los vértices u y v no son adyacentes. Si la máxima cantidad de caminos de u a v en $G - \{e\}$ que son disjuntos por vértices fuese 1 entonces, por el teorema de Menger, sacando 1 vértice se desconectaría u de v, es decir, $\exists\, x \neq u, v$ tal que u y v pertenecen a distinta componente conexa de $G - \{e\} - \{x\}$. Como u tiene grado mayor o igual que 3 entonces $\exists\, w \neq v, x$ tal que $(u, w) \in E$.
Por otro lado, como $G - \{u, x\}$ es conexo y $v, w \in G - \{u, x\}$, entonces existe un camino $\mathcal{R}$ de w a v en $G - \{u, x\}$, luego en $G - \{e\} - \{x\}$. Pero como (u, w) es una rama de $G - \{e\} - \{x\}$, entonces agregando a $\mathcal{R}$ la rama (u, w) tendríamos un camino de u a v en $G - \{e\} - \{x\}$, lo cual es una contradicción.
Luego, existen al menos dos caminos de u a v en $G - \{e\}$ que son disjuntos por vértices. Por lo tanto, hay al menos un ciclo en $G - \{e\}$ que contiene a u y a v.

Consideremos un dibujo plano de $G - \{e\}$ en el cual v pertenezca a la cara exterior. De todos los ciclos en $G - \{e\}$ que contienen a u y a v sea $\mathcal{C}$ uno tal que la cantidad de ramas contenidas en su interior sea máxima. Consideremos ahora los apéndices de $G - \{e\}$ determinados por $\mathcal{C}$.

Recordemos que todo apéndice tiene al menos un punto de contacto. Supongamos que x es el único punto de contacto de un apéndice P. Como $x \in P$ entonces x es extremo de una rama $e' = (x, w)$ de P y $w \in P - \mathcal{C}$. Sea $z \neq x$ un vértice del ciclo. Como $G - \{x\}$ es conexo existe un camino de w a z en $G - \{x\}$. Sea t el primer vértice de ese camino que pertenece al ciclo (podría ser $t = z$).



Entonces, el camino

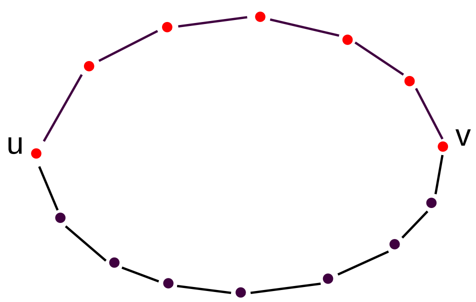
no contiene ningún vértice interior que pertenezca al ciclo. Luego, $e' \sim e''$, de donde $e'' \in P$ y por lo tanto $t \in P \cap \mathcal{C}$. Luego t es un punto de contacto y $t \neq x$, lo que es una contradicción. Esto prueba que todo apéndice tiene al menos dos puntos de contacto.

Además, si un apéndice P tiene exactamente dos puntos de contacto, entonces P es una rama. En efecto, sean x e y los dos puntos de contacto de P. Si P tiene dos o más ramas entonces existe $w \in P$ tal que $w \neq x, y$. Luego, $w \notin \mathcal{C}$ y w es el extremo de alguna rama $e' \in P$. Sea $z \neq x, y$ un vértice del ciclo. Entonces $z \neq w$.
Como $G - \{x, y\}$ es conexo existe un camino de w a z en $G - \{x, y\}$. Sea t el primer vértice de ese camino que pertenece al ciclo y consideremos la parte del camino que va de w a t.

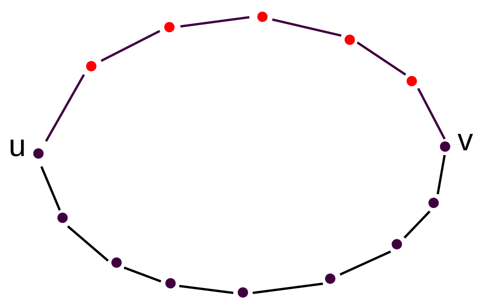
Notar que t es el único vértice de este camino que pertenece al ciclo.
Si $e_1 = e'$ entonces $e_2 \sim e'$ y si $e_1 \neq e'$ entonces, el camino

no contiene ningún vértice interior que pertenezca al ciclo y por lo tanto también resulta que $e_2 \sim e'$. Luego, como $e' \in P$ se tiene que $e_2 \in P$, de donde $t \in P \cap \mathcal{C}$ y $t \neq x, y$, cosa que no puede ocurrir.

Como $G - \{e\}$ es planar y estamos considerando un dibujo plano de $G - \{e\}$ entonces, por el ejercicio 2, un apéndice es exterior al ciclo o es interior al ciclo.
Veamos ahora cómo son los apéndices exteriores. Convengamos en que u y v dividen al ciclo en dos partes, la norte y la sur. Utilizaremos la notación $[u, v]_N$ o $(u, v)_N$ para indicar el conjunto de vértices que se encuentran en la parte norte del ciclo, en el primer caso incluyendo los vértices u y v y en el segundo no.



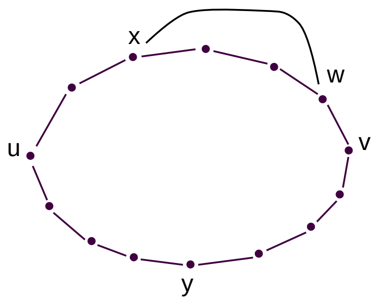
$[u, v]_N$



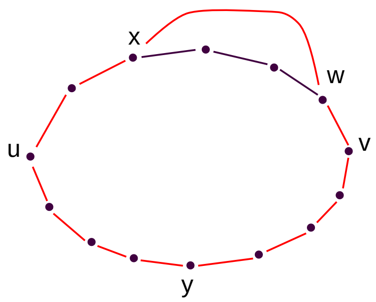
$(u, v)_N$

Análogamente indicaremos con $[u, v]_S$ o $(u, v)_S$ la parte sur del ciclo, en el primer caso incluyendo los vértices u y v y en el segundo no.

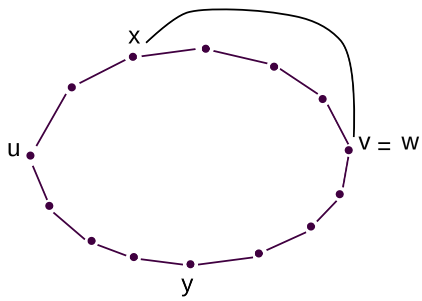
Sea P un apéndice exterior que tiene un punto de contacto $(u, v)_N$ y otro $(u, v)_S$. Un tal apéndice existe pues de lo contrario se podría agregar la rama $e = (u, v)$ y obtener un dibujo planar de G.
Sean x e y los puntos de contacto en $(u, v)_N$ y en $(u, v)_S$ respectivamente que están más cerca de u. Si P tuviera un punto de contacto $w \neq x, y$ entonces este punto estaría en $(u, v)_N$ o en $(u, v)_S$ o sería igual a u o a v.
Supongamos que está en $(u, v)_N$. Por el lema 3, existe un camino en P de x a w que no pasa por ningún punto de contacto distinto de x y w y, como v pertenece a la cara exterior, el camino es de la forma



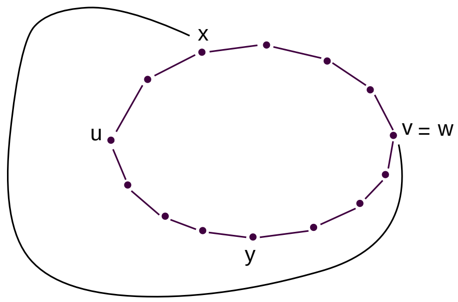
Pero entonces existiría un ciclo que contiene a u y a v con más ramas interiores que $\mathcal{C}$.



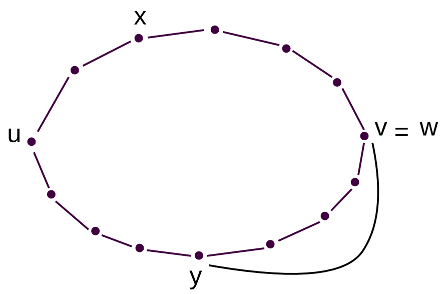
Lo mismo sucede si $w = u$ o si está en $(u, v)_S$ (ya que también debe haber un camino de y a w que no contiene ningún punto de contacto distinto de y y w).
Veamos ahora que ocurre si $w = v$. En este caso habría un camino en P de x a v que no contiene ningún punto de contacto salvo x y v. Si fuera de la forma



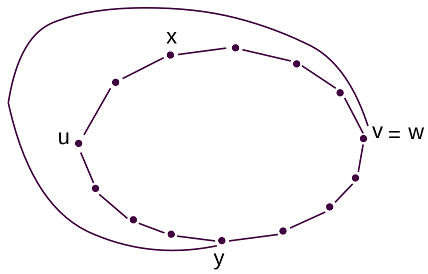
también existiría un ciclo que contiene a u y a v con más ramas interiores que $\mathcal{C}$.
Supongamos entonces que es de la forma



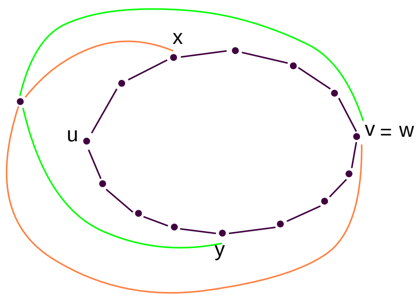
Por otra parte, también debe haber un camino en P de y a v que no contiene ningún punto de contacto salvo y y v. Si ese camino es de la forma



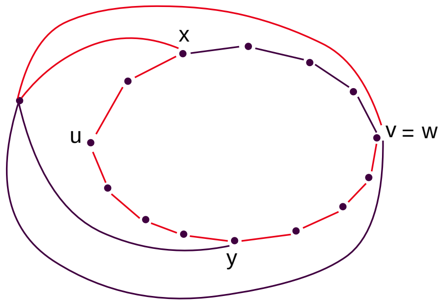
existiría un ciclo que contiene a u y a v con más ramas interiores que $\mathcal{C}$. Supongamos entonces que es de la forma



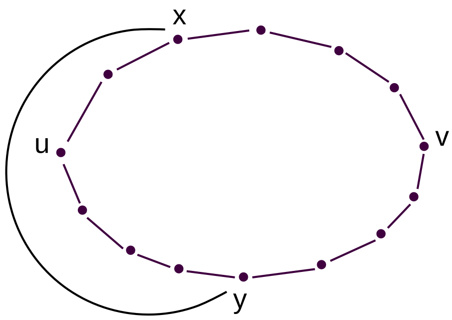
Entonces se tienen dos caminos que necesariamente deben cortarse en un vértice pues estámos considerando un dibujo plano de $G - \{e\}$



Pero entonces nuevamente existiría un ciclo que contiene a u y a v con más ramas interiores que $\mathcal{C}$

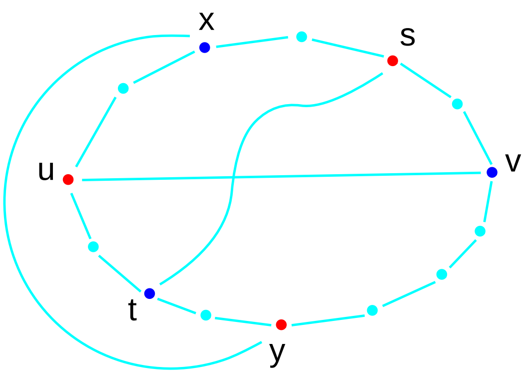


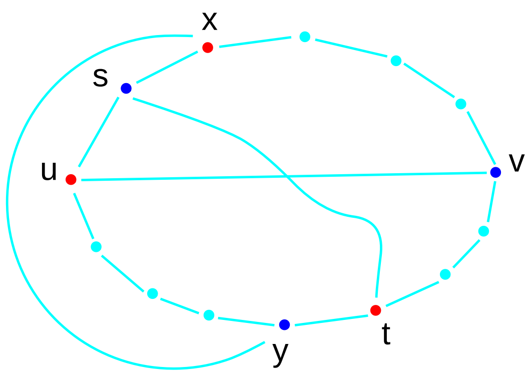
Luego, P tiene sólo dos puntos de contacto, x en $(u,v)_N$ e y en $(u,v)_S$, y por lo tanto es una rama.



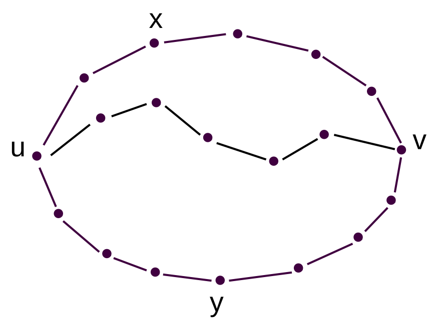
Si todos los apéndices exteriores que tienen un punto de contacto en $(u,v)_N$ y otro en $(u,v)_S$ se pudieran dibujar en el interior del ciclo sin intersecar ninguna rama entonces, podríamos agregar la rama $e=(u,v)$ en el exterior y obtener un dibujo planar de G. Luego debe existir un apéndice exterior P con un punto de contacto x en $(u,v)_N$ y un punto de contacto y en $(u,v)_S$ que no puede dibujarse en el interior del ciclo. Por lo que vimos antes, P es una rama. Luego debe darse alguno de los siguientes casos:

1) Existe un apéndice interior Q que contiene un punto de contacto s en $(x,v)_N$ y un punto de contacto t en $(u,y)_S$ o existe un apéndice interior Q que contiene un punto de contacto con s en $(u,x)_N$ y un punto de contacto t en $(y,v)_S$. En ambos casos, por el lema 3, existe un camino en Q de s a t que no contiene ningún otro punto de contacto.
En este caso, agregando la rama $e=(u,v)$ resulta que G contiene un subgrafo homemorfo a $K_{3,3}$:

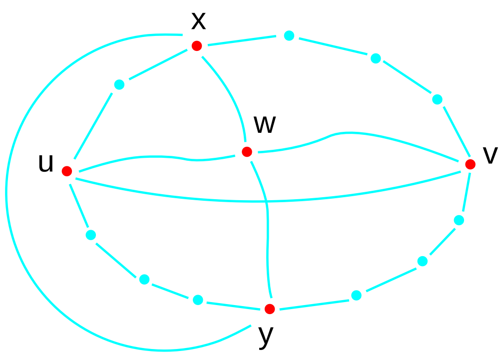




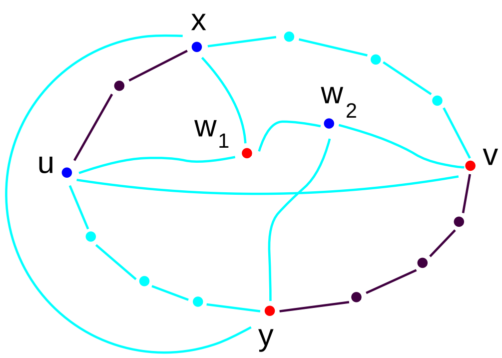
2) Existe un apéndice interior Q cuyos únicos puntos de contacto son x, y, u y v. Por el lema 3, debe existir un camino $\mathcal{R}$ en Q de u a v que no contiene ningún otro punto de contacto



Pero también debe existir un camino de x a y que no contiene ninún otro punto de contacto y, necesariamente ese camino debe tener al menos un vértice en común con $\mathcal{R}$ pues estamos considerando un dibujo plano de $G - \{e\}$. Si estos caminos tienen un único vértice w en común entonces, agregando la rama $e = (u, v)$ resulta que G tiene un subgrafo homeomorfo a K_5

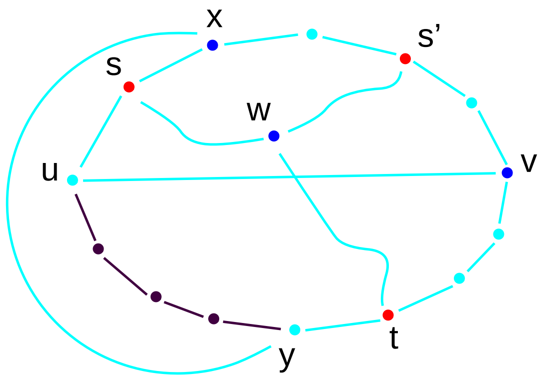


Si, en cambio, tienen más de un vértice en común, sean w_1 el primero y w_2 el último de estos vértices comunes, entonces agregando la rama $e = (u, v)$ resulta que G tiene un subgrafo homemorfo a $K_{3,3}$

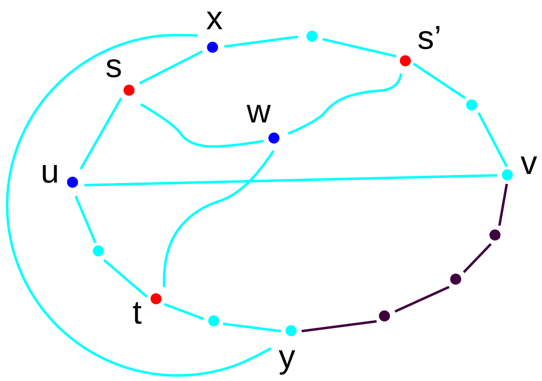


3) Existe algún apéndice interior Q que tiene un punto de contacto s en $[u, x)_N$, un punto

de contacto s' en $(x,v)_N$ y un punto de contacto t en $[y,v)_S$. Luego, por el ejercicio 3 existe $w \in Q - \mathcal{C}$ y tres caminos en Q disjuntos por vértices de s, s' y t a w respectivamente tales que ninguno de sus vértices interiores pertenece al ciclo. En este caso agregando la rama $e = (u,v)$ resulta que G tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$



Lo mismo ocurre si existe algún apéndice interior Q que tiene un punto de contacto s en $(u,x)_N$, un punto de contacto s' en $(x,v]_N$ y un punto de contacto t en $(u,y]_S$



o si existe algún apéndice interior Q que tiene un punto de contacto t en $[y,v)_S$, un punto de contacto t' en $(u,y)_S$ y un punto de contacto s en $[u,x)_N$ o si existe algún apéndice interior Q que tiene un punto de contacto t en $(y,v)_S$, un punto de contacto t' en $(u,y]_S$ y un punto de contacto s en $(x,v]_N$.

Tarea: Verificar que estos son todos los casos posibles.

Luego, en todos los casos G contiene un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$, lo cual es una contradicción. □