$$\pi = 3,14159265358979.....$$

Ricardo G. Durán

Universidad de Buenos Aires

20 de Abril, 2004

http://mate.dm.uba.ar/~rduran/

$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459$

230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384

460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294

895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914

564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631

558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046

652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179

310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983

367336244065664308602139494639522473719070217986094370277053921

717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134

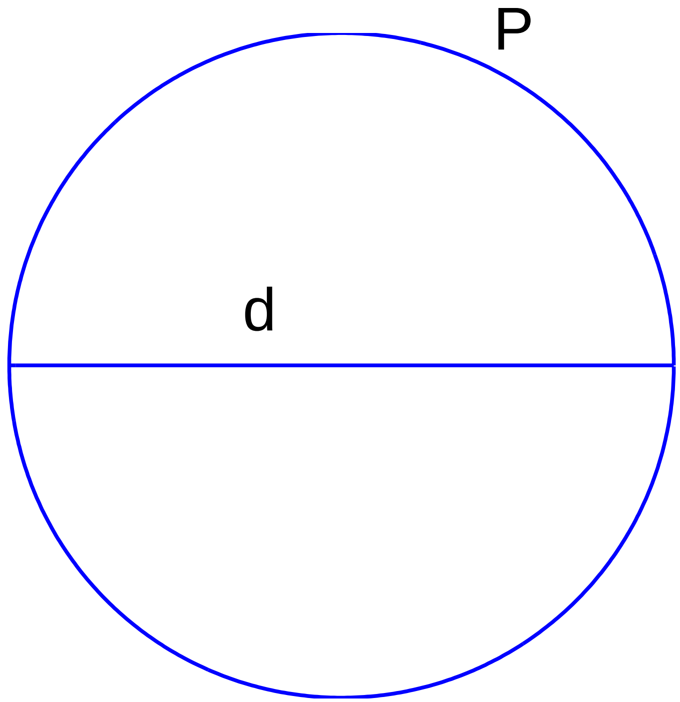
275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968

925892354201995611212902196086403441815981362977477130996051870

72113499999983729780499510597317328160963185950244594553469083

026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083

814206171776691473035982534904287554687311595628638823537875937 ...



P = Perímetro   d = diámetro

$$\boxed{\frac{P}{d} = \pi}$$

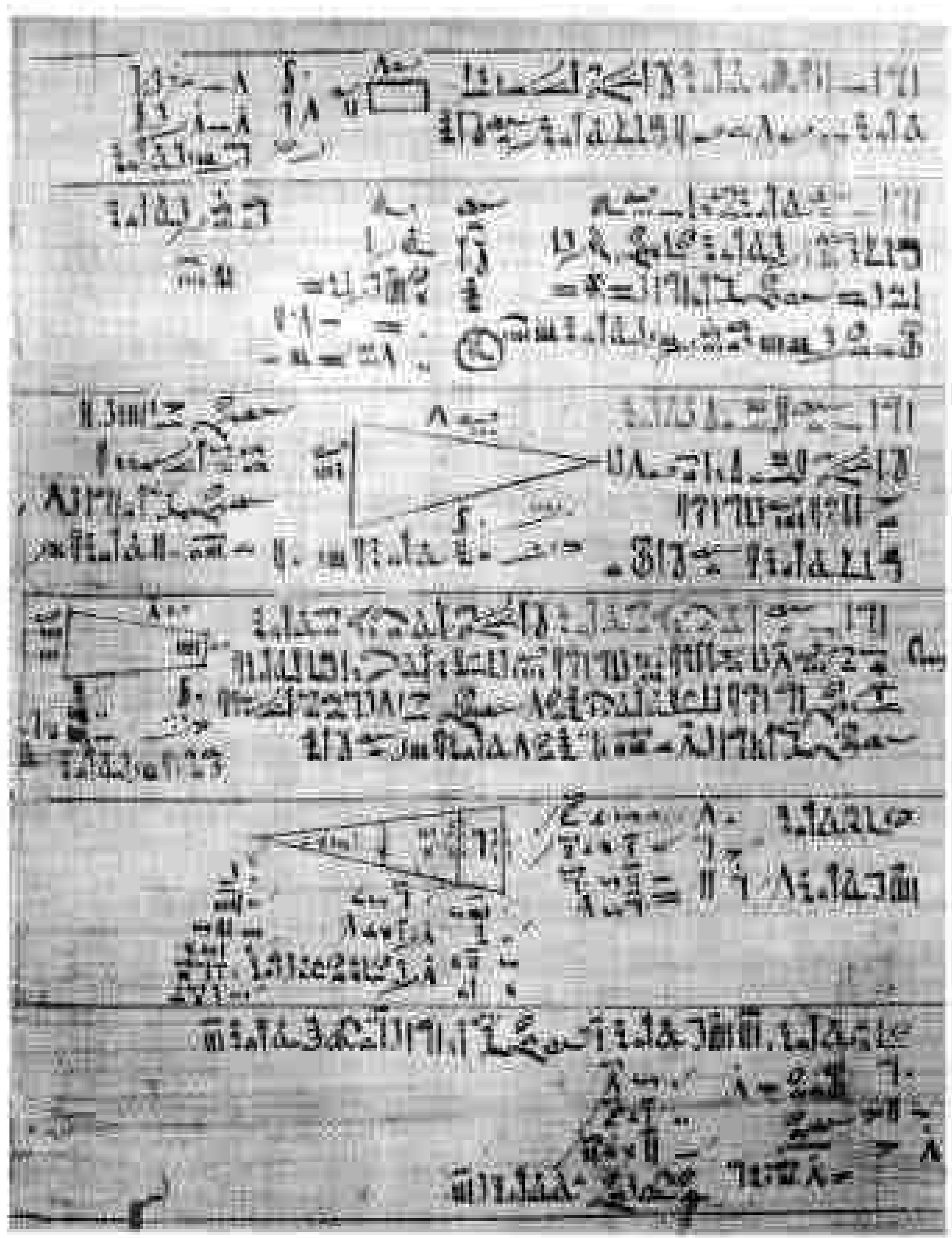
UN POCO DE HISTORIA

Reyes 7,23 y Crónicas 4,2: "Hizo una gran pileta de metal fundido, llamada el mar, de 10 codos de borde a borde, enteramente redondo y de 5 codos de alto. Un cordón de 30 codos medía su contorno".

Aquí se toma como 3 la relación entre el perímetro y el diámetro (o sea $\pi \sim 3$) . Se refiere a la construcción del gran templo del Rey Salomon realizada aproximadamente en el 950 AC.

El valor 3 como aproximación de π es muy malo, incluso para esa época: Los Egipcios y los pueblos de la Mesopotamia conocían mucho antes mejores aproximaciones. En un papiro Egipcio hay evidencia de

$$\pi \sim 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3.16$$



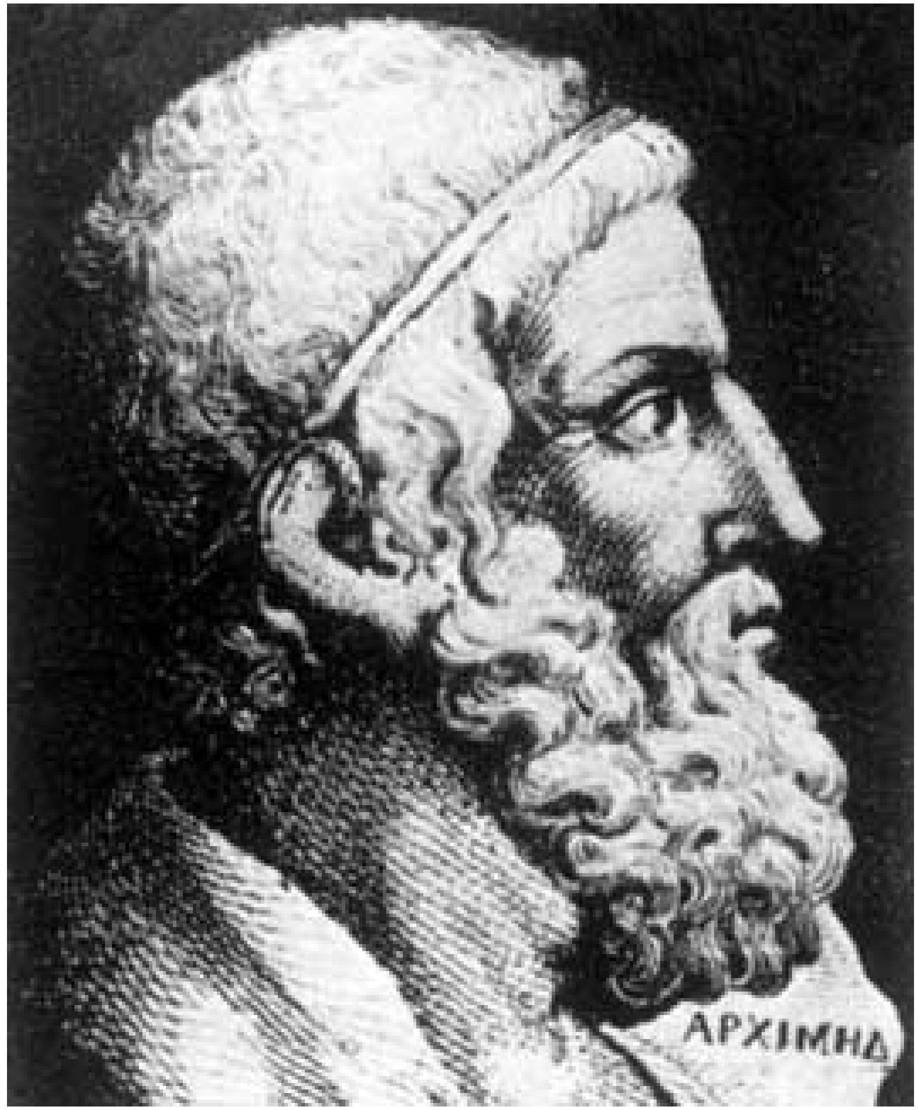
Es casi seguro que todos estas aproximaciones fueron encontradas midiendo.

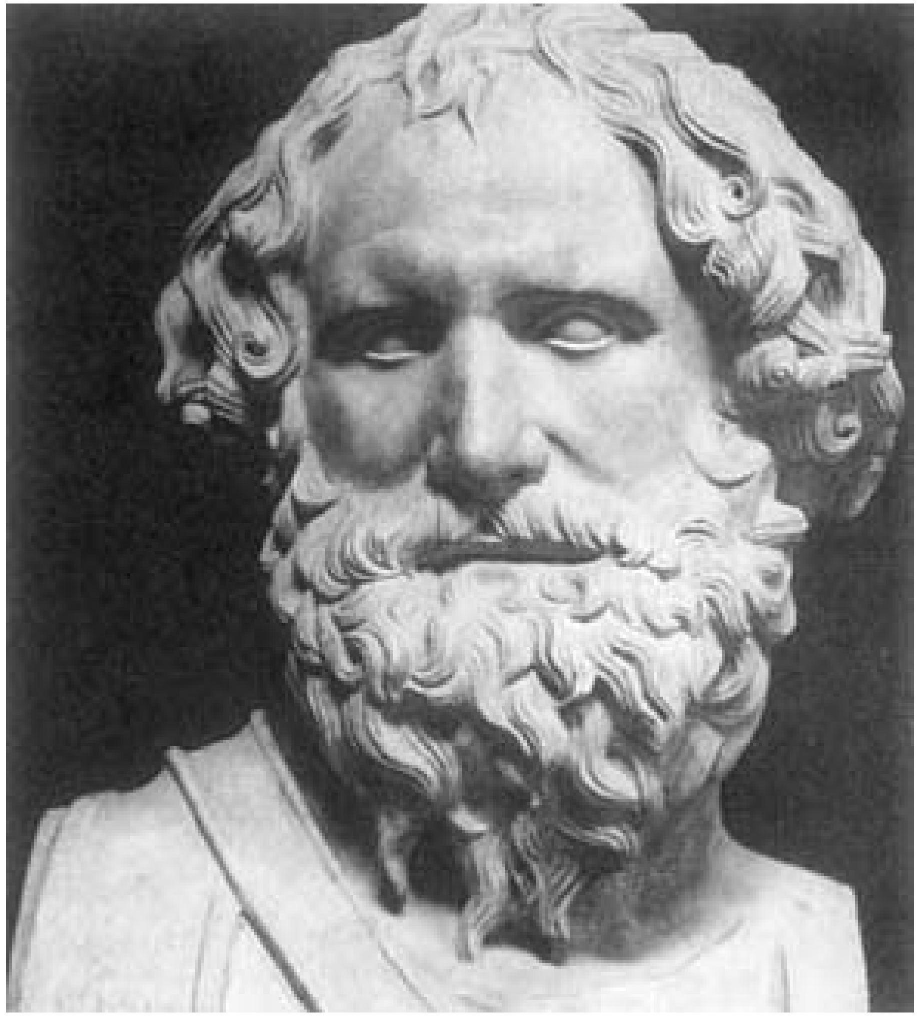
El primer cálculo teórico del valor de π parece haber sido hecho por Arquímedes (287-212 AC), quien demostró que

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Tomando el promedio se obtiene

$$\pi \sim 3,1418$$


ΑΡΧΙΜΗΔ



Posteriormente, muchos matemáticos obtuvieron aproximaciones mas precisas, por ejemplo:

Ptolemy ($\sim$ 150) 3.1416

Zu Chongzhi (430-501) 355/113

al-Khwarizmi ($\sim$ 800) 3.1416

al-Kashi ($\sim$ 1430) 14 cifras

Vite (1540-1603) 9 cifras

Roomen (1561-1615) 17 cifras

Van Ceulen ($\sim$ 1600) 35 cifras

A partir del siglo XVII se desarrollaron otros métodos para aproximar π. Por ejemplo:

Wallis (1616-1703):

$$2/\pi = (1.3.3.5.5.7....)/(2.2.4.4.6.6....)$$

James Gregory (1638- 1675)

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ...$$

Esta igualdad es también atribuida a Leibniz.

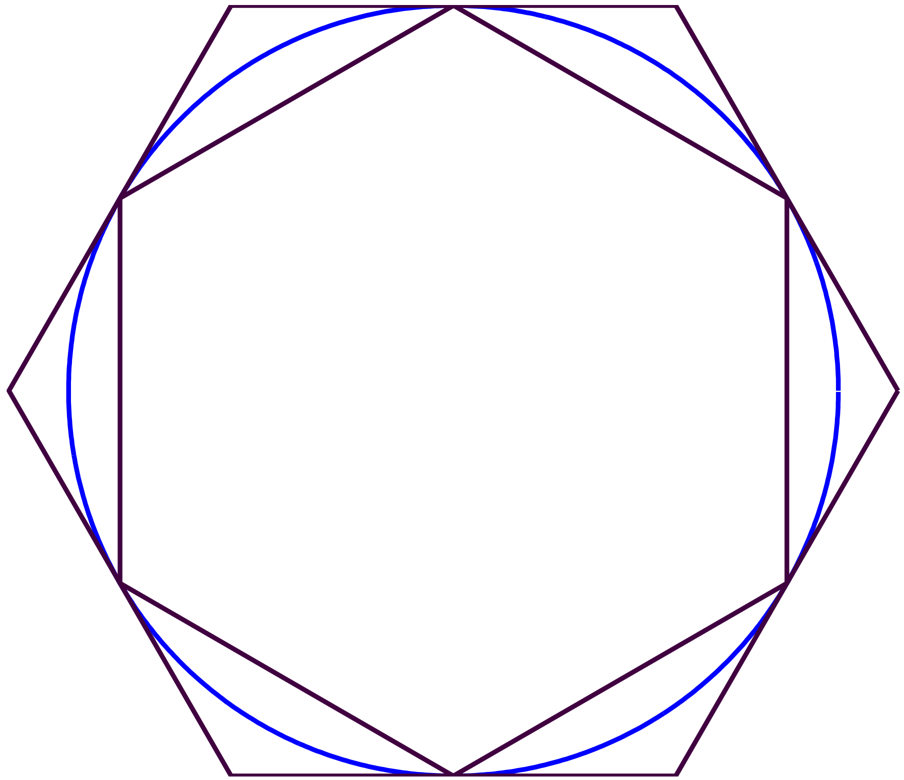
Recien en 1761, Lambert (1728-1777) demostró que π es un número irracional, o sea, no puede escribise como una fracción, o equivalentemente, tiene un desarrollo infinito no periódico. En 1947 Niven dió una demostración elemental.

¿CÓMO LO CALCULÓ ARQUÍMEDES?

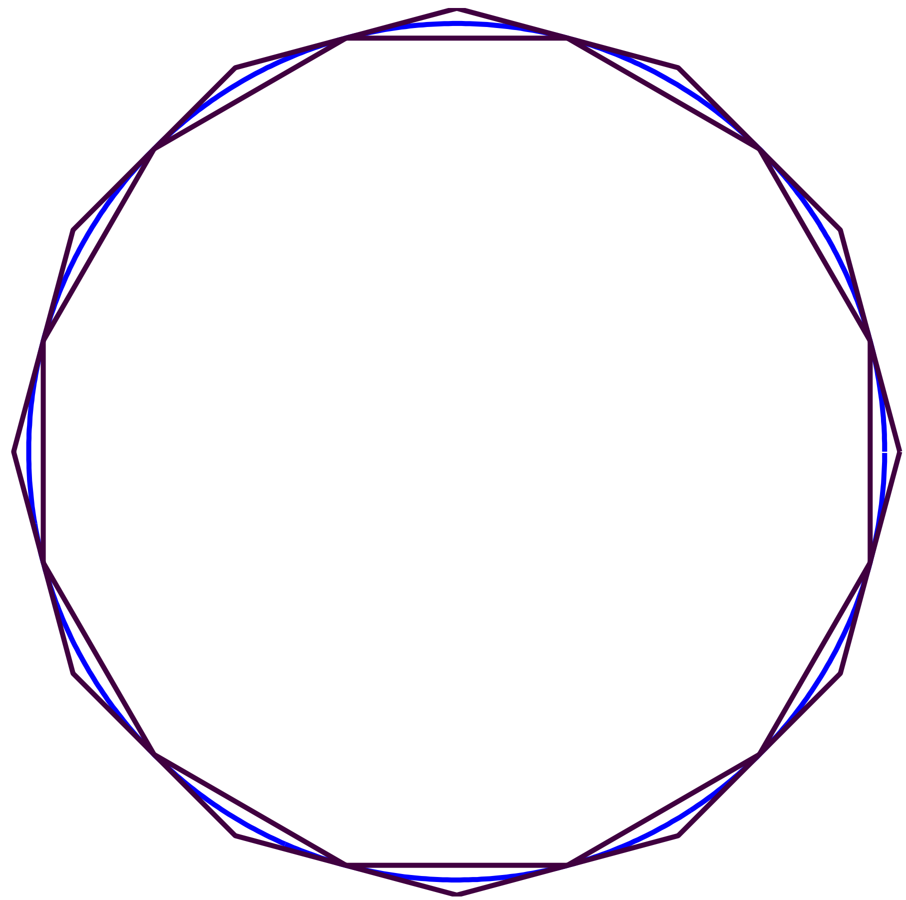
APROXIMANDO LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA POR LA LONGITUD DE POLÍGONOS POR ADENTRO Y POR AFUERA.

DE ESTA MANERA OBTUVO APROXIMACIONES SUCESIVAS. ESTO ES LO QUE HOY LLAMAMOS “MÉTODO ITERATIVO”.

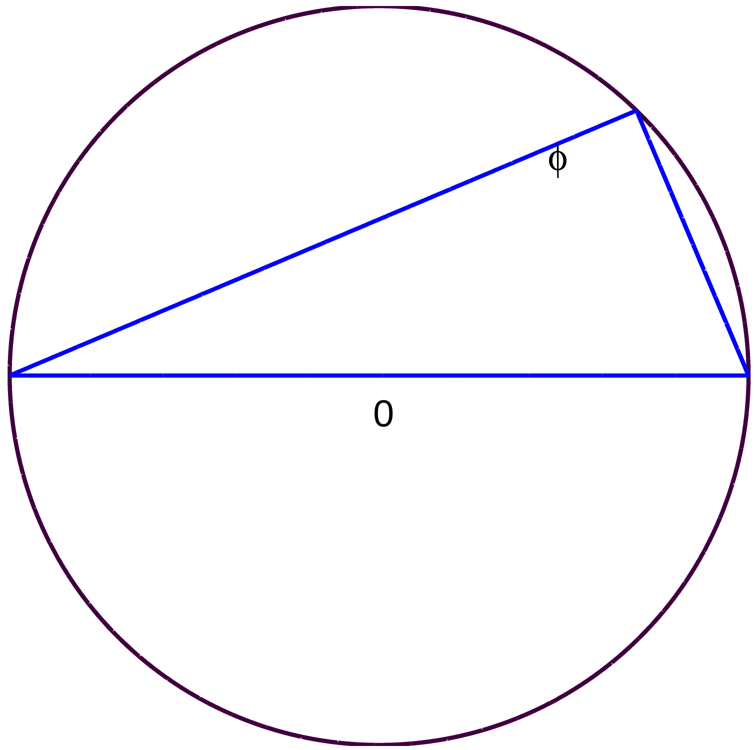
6 LADOS



12 LADOS

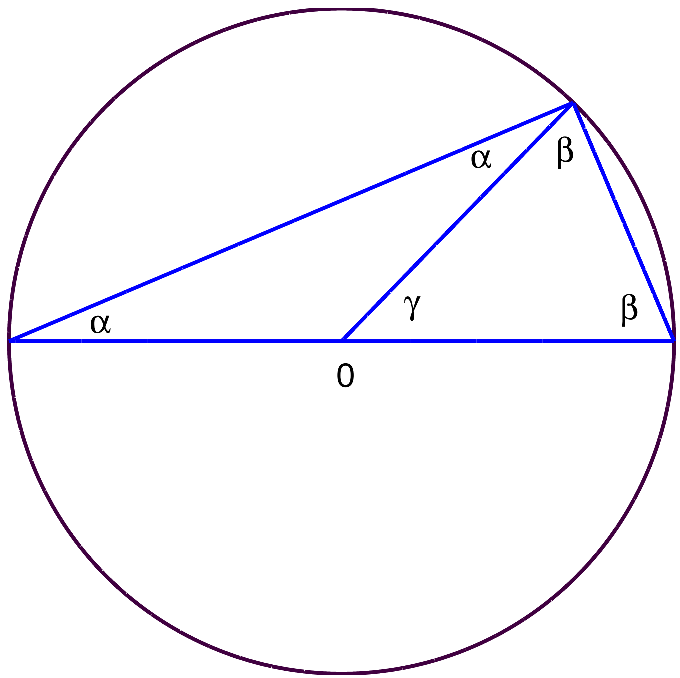


USAREMOS:



EL ÁNGULO ϕ ES RECTO

DEMOSTRACIÓN:

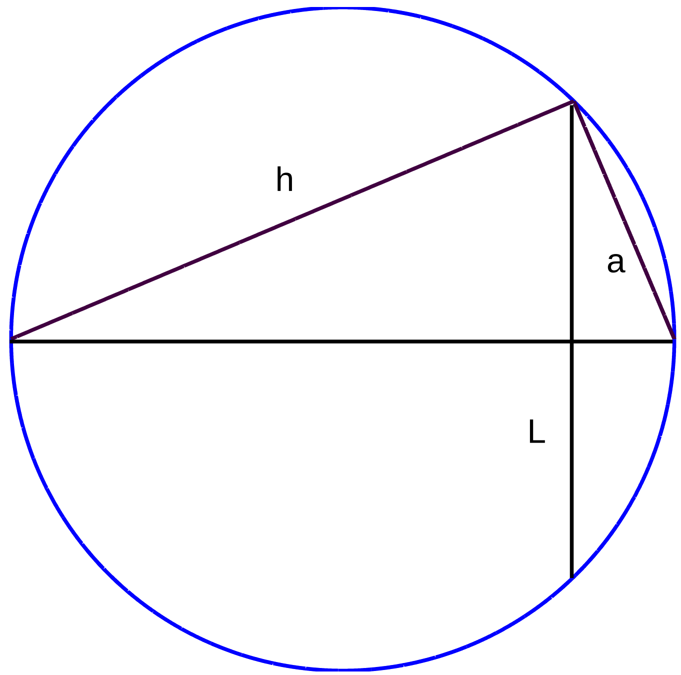


$$2\beta + \gamma = 180^0$$

$$2\alpha + 180^0 - \gamma = 180^0 \Longrightarrow 2\alpha = \gamma$$

$$\Longrightarrow 2\beta + 2\alpha = 180^0$$

$$\Longrightarrow \beta + \alpha = 90^0$$



diámetro $= 1$

PROBLEMA: Hallar a conociendo L

AREA DEL TRIÁNGULO $= \frac{\mathsf{ah}}{2} = \frac{L}{4}$

o sea,

$$\mathsf{a}h = \frac{L}{2}$$

y elevando al cuadrado

$$\mathsf{a}^2h^2 = \frac{L^2}{4}$$

Por otro lado, usando el Teorema de Pitágoras:

$$\mathsf{a}^2 + h^2 = 1$$

Entonces,

$$h^2 = 1 - \mathsf{a}^2$$

y reemplazando en la otra ecuación

$$\mathsf{a}^2(1 - \mathsf{a}^2) = \frac{L^2}{4}$$

O sea, $x = \mathsf{a}^2$ es raíz de la ecuación cuadrática

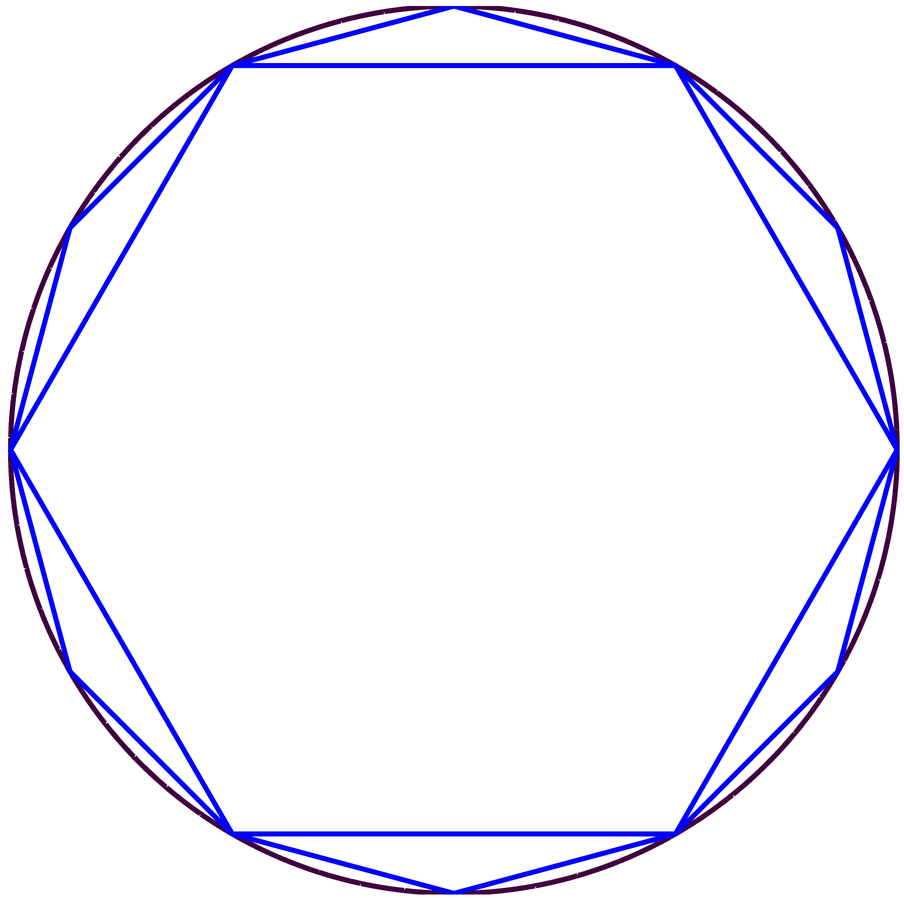
$$x^2 - x + \frac{L^2}{4} = 0$$

Análogamente, despejando h^2, se ve que ésta es la otra raíz de la misma ecuación, y como $\mathrm{a} < h$ resulta:

$$\mathrm{a}^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - L^2}}{2}$$

y por lo tanto,

$$\mathrm{a} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - L^2}}}{\sqrt{2}}$$



Entonces, si llamamos ℓ_n a la longitud del lado del polígono de n lados inscripto en el círculo, tenemos la relación:

$$\ell_{2n} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \ell_n^2}}}{\sqrt{2}}$$

o

$$\ell_{2n} = \frac{\ell_n}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{1 - \ell_n^2}}}$$

Partiendo de $\ell_6 = \frac{1}{2}$, calculamos ℓ_{12}, ℓ_{24}, ℓ_{48}, ℓ_{96}

Arquímedes calculó hasta ℓ_{96}. Nosotros (gracias a la computadora!) podemos seguir y calcular ℓ_N para valores de $N = 3 \times 2^k$ mucho mas grandes.

El perímetro $P_N = N\ell_N$ es una aproximación de π mejor cuanto más grande sea N.

Número de lados	Perímetro
6	3.00000000000000
12	3.10582854123025
24	3.13262861328124
48	3.13935020304687
96	3.14103195089051
192	3.14145247228546
384	3.14155760791186
768	3.14158389214832
1536	3.14159046322805
3072	3.14159210599927
6144	3.14159251669216
12288	3.14159261936538

Número de lados	Perímetro
24576	3.14159264503369
49152	3.14159265145076
98304	3.14159265305503
196608	3.14159265345610
393216	3.14159265355637
786432	3.14159265358143
1572864	3.14159265358770
3145728	3.14159265358927
6291456	3.14159265358966
12582912	3.14159265358976
25165824	3.14159265358978
50331648	3.14159265358979