APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE AUTOVALORES

Ricardo G. Durán
Universidad de Buenos Aires

- Ecuación de las ondas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta\phi &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times (0,T) \\ \phi &= 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,T) \end{aligned}$$

mas condiciones iniciales.

Por ejemplo, si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, esta es la ecuación que modela la deformación de una membrana elástica que ocupa la región Ω

Si buscamos soluciones periódicas:

$$\phi(x,t) = u(x)e^{i\omega t}$$

reemplazando en la ecuación obtenemos

$$-\omega^2 u(x)e^{i\omega t} - \Delta u(x)e^{i\omega t} = 0$$

o sea, queda el problema de autovalores

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta u &= \omega^2 u \qquad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}}$$

Este problema tiene infinitas soluciones $\omega_1, \omega_2, \ldots$ llamadas "Frecuencias propias de vibración" de la membrana.

Por otra parte, si actúa una fuerza periódica $f(t) = \cos(\omega t)$, o sea,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = \cos(\omega t)$$

Cuando ω es cercana a alguna de las frecuencias propias ω_j, la amplitud de la solución crece con el tiempo. En la práctica esto puede producir grandes oscilaciones.

Un ejemplo clásico es el del "Tacoma narrows bridge" que se cayó en 1940 debido a las grandes oscilaciones.

Los autovalores interesan en numerosas aplicaciones.

<u>EJEMPLOS</u>:

-Estructuras

-Acústica (diseño de instrumentos y de salas de concierto).

MÉTODOS NUMÉRICOS

PROBLEMA MODELO

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \lambda\, u \qquad \text{en } \Omega \\
u &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

$$\|u\|_0 = 1$$

Solutions: $(\lambda_j, u_j), 0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_j \leq ...$

$$u_j \in H^{1+r}(\Omega)$$

$r = 1$ if Ω is convex and $r < \frac{\pi}{\omega}$ (with ω being the largest inner angle of Ω) otherwise.

APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Se basa en la forma débil:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega u\, v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

El método se basa en reemplazar el espacio $H_0^1(\Omega)$ por un subespacio de dimensión finita.

Por ejemplo: Espacio de funciones lineales a trozos ("poligonales") asociadas a una triangulación $\mathcal{T}_h$ (h indica el tamaño de la partición):

$$V_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega) : \; v_h|_T \in \mathcal{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

Si $\{\phi_j\}$ es una base de V_h (por ejemplo la base de Lagrange), la solución buscada u_h se escribe en esa base:

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} U_j \phi_j$$

y el problema se reduce a uno de autovalores generalizados:

$$\boxed{AU = \lambda BU}$$

donde $A, B \in \mathbf{R}^{N\times N}$ están dadas por

$$a_{ij} = \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j$$

y

$$b_{ij} = \int_\Omega \phi_i\, \phi_j$$

Si los coeficientes de B se calculan con integración numérica interpolando el integrando en los vértices, o sea,

$$b_{ij} \sim \tilde{b}_{ij} = \int_\Omega I_h(\phi_i\, \phi_j)$$

donde $I_h v$ es la funcion lineal a trozos que coincide con v en los nodos.

Obtenemos el problema

$$\boxed{AU = \lambda \tilde{B} U}$$

donde la matriz $\tilde{B}$ es diagonal.

Este procedimiento es usual y se llama "condensación de masa" ("mass lumping").

OBSERVACIÓN: En mallas uniformes coincide con Diferencias Finitas

ESTIMACIONES DE ERROR

Se dividen en dos clases:

<u>ESTIMACIONES A PRIORI</u>

OBJETIVOS:

- Demostrar convergencia y dar el orden del error.
- Decir de que depende el error.

Típicamente son de la forma

$$\|error\| \leq Ch^{\alpha} |||u|||$$

En el caso de problemas de autovalores hay una teoría general que dice que si

$$\|T - T_h\| \longrightarrow 0$$

Entonces, "el espectro de T_h converge al de T"

A partir de la teoría general, en el caso de elementos finitos se obtiene,

$$\|u - u_h\|_1 = O(h^r)$$

$$\|u - u_h\|_0 = O(h^{2r})$$

$$|\lambda - \lambda_h| = O(h^{2r})$$

$r = 1$ if Ω is convex and $r = \frac{\pi}{\omega}$ (with ω being the largest inner angle of Ω) otherwise.

ESTIMACIONES A POSTERIORI

OBJETIVOS:

- Obtener información cuantitativa.
- Generación automática de mallas adaptadas.

En el caso de autovalores tenemos (DPR):

Estimador de error:

$$\eta = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}.$$

Donde las contribuciones locales η_T son:

$$\eta_T = \left(h_T^2 \lambda_h^2 \|u_h\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F \|J_F\|_{0,F}^2 \right)^{1/2},$$

siendo J_F el salto de la derivada normal:

$$J_F = \nabla \left(v_h|_{T_{\text{out}}} \right) \cdot n_F - \nabla \left(v_h|_{T_{\text{in}}} \right) \cdot n_F.$$

Los dos teoremas que siguen muestran que el error es equivalente al estimador salvo términos de mayor orden.

Theorem 1: Hay una constante C que depende sólo del ángulo mínimo de la triangulación tal que:

$$|e|_{1,\Omega} \leq C\eta + \left(\frac{\lambda + \lambda_h}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \|e\|_{0,\Omega}.$$

Obs.: El segundo término es de mayor orden.

Theorem 2: Sea T^* la union de T y los vecinos T' que comparten un lado con T. Hay una constante C que depende sólo del ángulo mínimo de la triangulación tal que:

$$\eta_T \leq C \left(|e|_{1,T^*} + h_T \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,T^*} \right).$$

Obs.: Nuevamente el segundo término es de mayor orden.

Resultados similares se prueban para el estimador:

$$\tilde{\eta}_T = \left(\frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F \|J_F\|_{0,F}^2 \right)^{1/2},$$

es decir que la parte del residuo "volumétrico" puede eliminarse del estimador. Este estimador resulta equivalente al ZZ usado habitualmente por los ingenieros.