

Estimaciones de error en elementos anisotrópicos y aplicaciones

Ricardo G. Durán

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Mayo 20, 2005

<http://mate.dm.uba.ar/~rduran/>

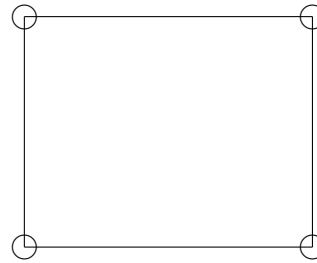
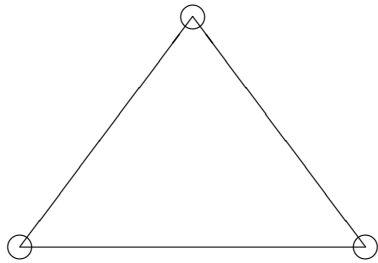
Trabajo en colaboración con Gabriel Acosta
y Ariel Lombardi

- Estimaciones del error de interpolación de Lagrange.
- Condiciones de regularidad en triángulos y cuadriláteros.
- Diferencias entre los casos 2D y 3D.
- Necesidad de otras interpolaciones.
- Una interpolación de promedios.
- Aplicación a problemas de capa límite.
- Ejemplos numéricos y comparación entre mallas graduadas y mallas de Shishkin.

INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

CONSIDERAMOS:

K triángulo (3 nodos) o cuadrilátero (4 nodos)



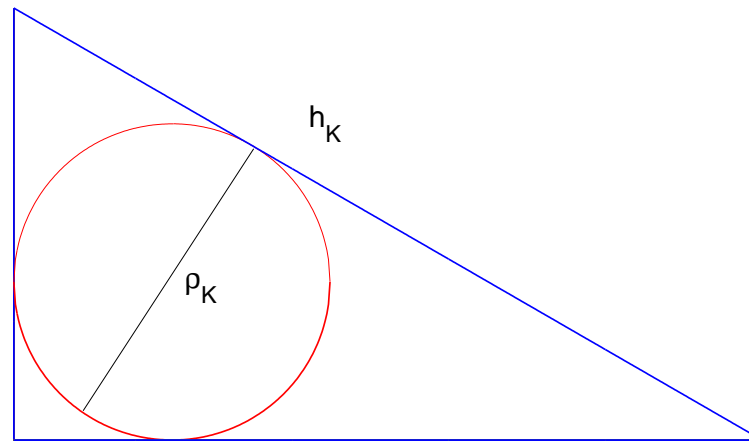
Si P_i son los nodos, la interpolada de Lagrange se define por:

$$u_I(P_i) = u(P_i)$$

ESTIMACIONES DE ERROR

Se empezaron a desarrollar alrededor de 1970

La teoría clásica se basa en la “Regularidad” de los elementos:



$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$$

h_K diámetro exterior, ρ_K diámetro interior.

Es decir que en la cota del error

$$|u - u_I|_{1,K} \leq Ch_K |u|_{2,K}$$

o sea,

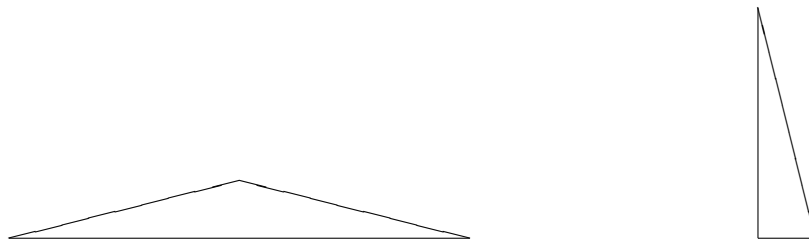
$$\int_K |\nabla(u - u_I)|^2 \leq Ch_K^2 \int_K |D^2u|^2$$

$C = C(\sigma) \rightarrow \infty$ cuando $\sigma \rightarrow \infty$.

PERO SE SABE QUE ESO ES UNA FALLA DE LOS PRIMEROS ARGUMENTOS QUE SE USARON

O SEA, LA HIPÓTESIS DE REGULARIDAD NO ES ESENCIAL!

EN EL CASO DE TRIÁNGULOS: SE PUEDE REEMPLAZAR POR LA CONDICIÓN DE “ÁNGULO MÁXIMO”



Primeros trabajos: Babuska-Aziz, Jamet (1976).

Otras referencias: Krizek, Al Shenk, Dobrowolski, Apel, Nicaise, Formaggia, Perotto, Acosta, D., etc..

OBS.: EN 3D ES MÁS COMPLICADO!

EL CASO DE CUADRILÁTEROS ES MÁS COMPLICADO

VARIAS CONDICIONES SUFICIENTES HAN SIDO INTRODUCIDAS

- Ciarlet-Raviart (1972): Regularidad y no degeneración de los ángulos (no puede degenerar a un triángulo)
- Jamet (1977): Regularidad (permite que degenera a un triángulo pero no anisotropía)
- Zenizek-Vanmaele (1995), Apel (1998): Permiten anisotrópicos pero alejados de triángulos (esencialmente los lados largos son casi paralelos)

LA QUE PERMITE ELEMENTOS MÁS GENERALES PARECE SER LA

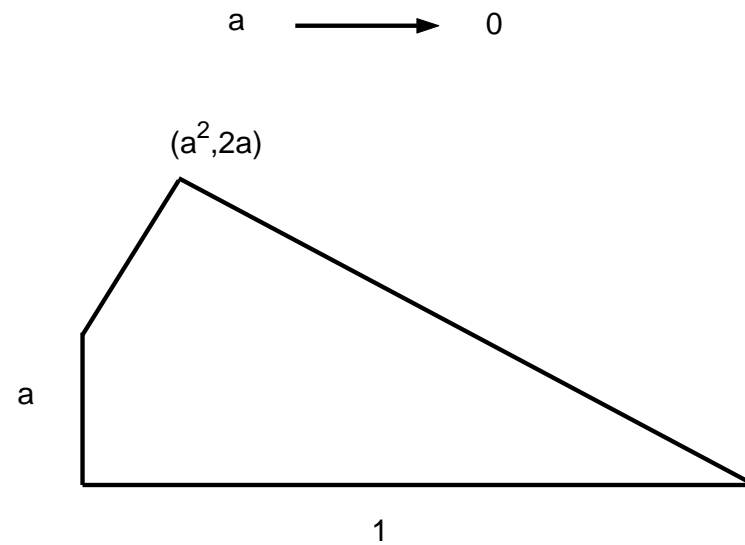
“PROPIEDAD DE DESCOMPOSICIÓN REGULAR” (G. Acosta, R.D, SIAM J. Numer. Anal. 2000)

PDR: K cuadrilátero convexo. Lo partimos por una de sus diagonales d_1 . Entonces la constante en la estimación de error depende del cociente $|d_2|/|d_1|$ y del máximo ángulo de los triángulos en que se divide K .

OBSERVACIÓN: En particular la propiedad del ángulo máximo resulta suficiente para que valga la estimación del error.

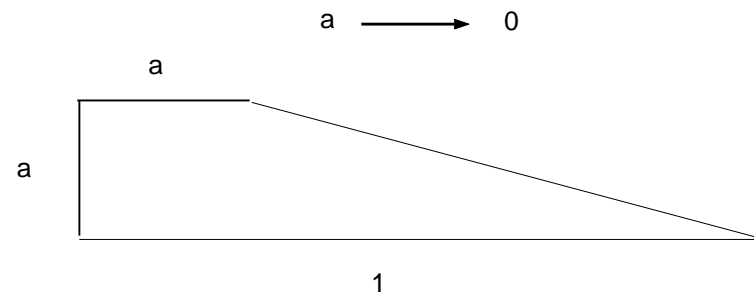
Pero la PDR es más general!

Esto se ve mediante el siguiente ejemplo:



El siguiente ejemplo muestra que no basta que se cumpla la propiedad del ángulo máximo en ambos triángulos al dividir el cuadrilátero por una de sus diagonales

OBSERVACIÓN: en este caso no se cumple la PDR porque el cociente entre las diagonales tiende a infinito.



NOS RESTRINGIMOS AHORA AL CASO DE ELEMENTOS RECTANGULARES CON EL OBJETIVO DE

1- DAR UNA IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN DE LA ESTIMACIÓN DEL ERROR

2- MOSTRAR LAS DIFERENCIAS CON EL CASO 3D

3- DAR ALGUNA APLICACIÓN (APROXIMACIÓN DE CAPAS LÍMITES)

K ELEMENTO DE REFERENCIA

Obtenemos primero una estimación del error en K y luego cambiamos variables.

Recordemos la notación usual

$$\|v\|_{L^2(K)}^2 = \int_K |v(x, y)|^2 dx dy$$

Dada $u(x, y)$, sea $p(x, y) = a + bx + cy$ tal que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}(u - p) \right\|_{L^2(K)} \leq C \left\| \nabla \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(K)}$$

Por ejemplo: p un promedio de polinomios de Taylor de grado 1.

O sea,

$$p(x, y) = \frac{1}{|K|} \int_K \left\{ u(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial u}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) \right\} d\bar{x}d\bar{y}$$

Queremos una estimación análoga para el error de interpolación.

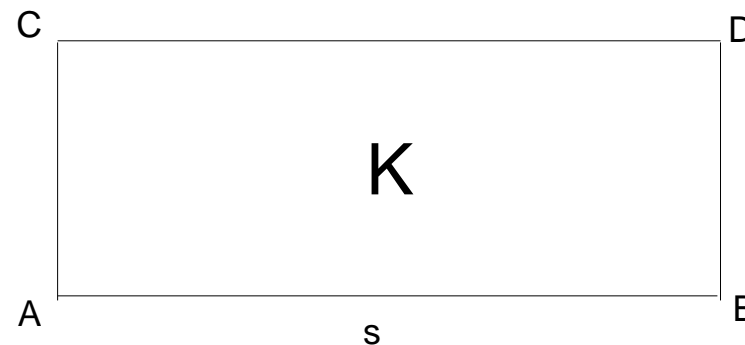
Pero

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}(u - u_I) \right\|_{L^2(K)} \leq \left\| \frac{\partial}{\partial x}(u - p) \right\|_{L^2(K)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x}(p - u_I) \right\|_{L^2(K)}$$

Y por lo tanto es suficiente acotar

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} (p - u_I) \right\|_{L^2(K)}$$

Usaremos: para $v = p - u_I = a + bx + cy + dxy$



$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(K)}^2 \sim |v(B) - v(A)|^2 + |v(D) - v(C)|^2$$

$$\begin{aligned}
|v(B) - v(A)| &= |(p(B) - u(B)) - (p(A) - u(A))| \\
&= \left| \int_s \frac{\partial}{\partial x} (p - u) \right| \leq C \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial x} (p - u) \right\|_{L^2(K)} + \left\| \nabla \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(K)} \right\}
\end{aligned}$$

donde hemos usado un teorema de traza (o sea, acotar una integral en el borde por una de área con un orden de derivada más).

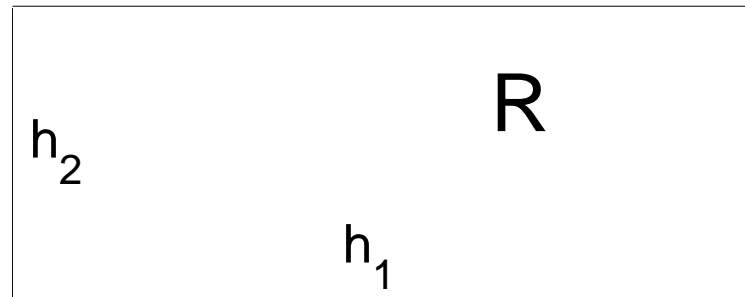
De manera análoga acotamos $|v(D) - v(C)|$ y entonces obtenemos:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} (u - u_I) \right\|_{L^2(K)} \leq C \left\| \nabla \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(K)}$$

Lo importante de esta estimación es que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{NO APARECE!!}$$

y por lo tanto, reescalando en cada variable, se obtiene para un rectángulo R :



$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} (u - u_I) \right\|_{L^2(R)} \leq C \left\{ h_1 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L^2(R)} + h_2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|_{L^2(R)} \right\}$$

LA CONSTANTE C ES INDEPENDIENTE DE h_1 Y h_2 !

UNA ESTIMACIÓN ANÁLOGA EN 3D NO VALE!!

QUE FALLA EN EL ARGUMENTO?

EL TEOREMA DE TRAZA:

$$\|u\|_{L^2(s)} \leq C \|u\|_{H^1(R)},$$

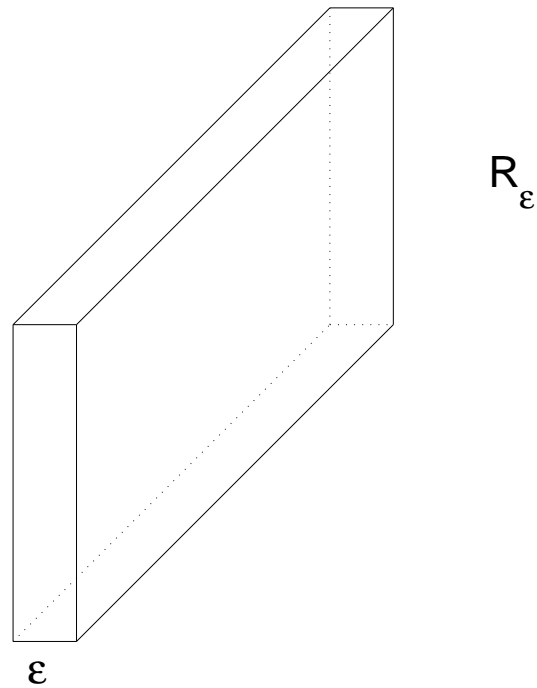
DONDE s ES UNA ARISTA DE R , NO VALE!

Contraejemplos para la desigualdad del error de interpolación los dieron:

Apel-Dobrowolski (Computing 1992), Al Shenk (Math. Comp. 1994).

$$\int_{R_\varepsilon} |\nabla(u - u_I)|^2 \leq C_\varepsilon h_{R_\varepsilon}^2 \int_{R_\varepsilon} |D^2 u|^2$$

goes to ∞ when $\varepsilon \rightarrow 0$



¿POR QUÉ NOS INTERESA EL ERROR DE INTERPOLACIÓN?

Supongamos que queremos resolver un problema de la forma

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H$$

donde B es una forma bilineal continua

La teoría de elementos finitos dice que si vale la condición inf sup:

$$\inf_{U \in H_{FE}} \sup_{V \in H_{FE}} \frac{B(U, V)}{\|U\| \|V\|} \geq \alpha > 0$$

entonces

$$\|u - U_{FE}\| \leq C(\alpha)\|u - V\| \quad \forall V \in H_{FE}$$

Es decir, que salvo una constante (independiente de la malla!) la aproximación calculada por el método de elementos finitos es como la mejor aproximación.

Por eso, para acotar el error basta acotar el error de cualquier aproximación por una función del espacio de Elementos Finitos. Usualmente se utiliza la interpolación de Lagrange por ser la aproximación más natural.

Sin embargo, en el caso de elementos 3D “angostos”, según mencionamos antes, la interpolación de Lagrange no se comporta bien.

HABRÁ OTRA APROXIMACIÓN MEJOR?

SÍ !!

INTERPOLACIONES DE PROMEDIOS

Originalmente se introdujeron para aproximar funciones no regulares (por ejemplo discontinuas, para las cuales la interpolación de Lagrange no esta bien definida) (P. Clement, 1976).

UNA INTERPOLACIÓN DE PROMEDIOS

(A. Lombardi- R.D., Math. Comp 2005)

Consideramos mallas de rectángulos (en 2D o 3D).

HIPÓTESIS: En cada dirección lados vecinos comparables:

R, S elementos vecinos

$$\frac{h_{R,i}}{h_{S,i}} \leq \sigma \quad 1 \leq i \leq n.$$

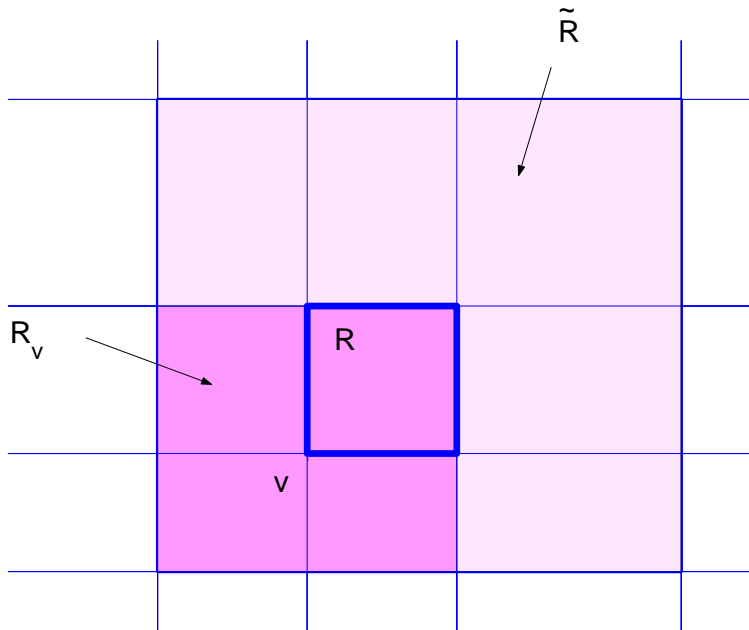
NUESTRA COTA DEL ERROR DEPENDE SÓLO DE σ .

\mathcal{N}_{in} nodos interiores. Para $v \in \mathcal{N}_{in}$

$$\tilde{R} = \bigcup \{S \in \mathcal{T} : S \text{ es vecino de } R\}.$$

y

$$R_v = \bigcup \{S \in \mathcal{T} : v \text{ es un nodo de } S\}.$$



Consideremos el polinomio de Taylor de grado 1 desarrollado en (\bar{x}, \bar{y}) :

$$p_{\bar{x}, \bar{y}}(x, y) = u(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial u}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$$

Dado un nodo V hacemos un promedio regularizado de $p_{\bar{x}, \bar{y}}(x, y)$ alrededor de V obteniendo el polinomio $q(x, y)$:

$$q(x, y) = \frac{1}{|R_V|} \int_{R_V} p_{\bar{x}, \bar{y}}(x, y) d\bar{x} d\bar{y}$$

En realidad hacemos un promedio regularizado.

Ahora, si

$$V = (x_0, y_0)$$

definimos la interpolada u_I (o aproximación) de u , de manera que

$$u_I(x_0, y_0) = q(x_0, y_0)$$

ESTIMACIONES DE ERROR

Análogas a las de la interpolación de Lagrange salvo:

1- El error depende también de la función en los elementos vecinos.

2- Valen en 3D.

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_j} (u - u_I) \right\|_{L^2(R)} \leq C \sum_{i=1}^n h_{R,i} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\tilde{R})}$$

APLICACIONES

Elementos de este tipo aparecen en la aproximación de capas límites.

Consideremos el problema de Convección-Difusión

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u + b \cdot \nabla u + cu &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

$$b_i < -\gamma \quad \text{with} \quad \gamma > 0 \quad \text{for} \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Se sabe que si se aplica el método de elementos finitos con una malla uniforme aparecen oscilaciones a menos que la malla sea demasiado fina.

¿SOLUCIONES?

Se han introducido muchos métodos especiales: up-wind, streamline diffusion, Petrov-Galerkin, etc.

Pero, ¿Se puede aplicar el método standard utilizando mallas adecuadas?

Nuestro objetivo es demostrar que se pueden obtener estimaciones de error válidas uniformemente en ε si se construyen mallas adecuadas.

¿Cuál es el problema desde el punto de vista del análisis?

Recordemos la teoría de estimación de error:

Dado el problema:

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

Si

$$B(u, v) \leq M \|u\| \|v\|$$

y

$$\alpha \|u\|^2 \leq B(u, u)$$

entonces,

$$\|u - U_{FE}\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - V\| \quad \forall V \in H_{FE}$$

En este problema la forma bilineal es:

$$B(v, w) = \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla v \cdot \nabla w + b \cdot \nabla v w + c v w) dx.$$

Considerando la norma

$$\|v\|_{\varepsilon}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

y suponiendo

$$c - \frac{\operatorname{div} b}{2} \geq \mu > 0$$

se cumple la condición de coercitividad con un α independiente de ε .

¿Qué es lo que falla si se quiere aplicar la teoría?

Dos cosas:

1- La constante M de la continuidad de la forma depende de ε .

2- Las derivadas segundas que aparecen en la cota del error de interpolación también dependen de ε .

Para solucionar 2 se utiliza una malla graduada que tenga en cuenta el comportamiento de la solución.

La graduación de nuestra malla en la dirección perpendicular a la capa límite es:

Dados $h > 0$ y $\sigma > 0$ parámetros la partición $\{\xi_i\}_{i=0}^M$ del intervalo $[0, 1]$ está dada por

$$\begin{cases} \xi_0 = 0 \\ \xi_1 = \sigma h \varepsilon \\ \xi_{i+1} = \xi_i + \sigma h \xi_i & \text{for } 1 \leq i \leq M-2 \\ \xi_M = 1 \end{cases}$$

donde M es tal que $\xi_{M-1} < 1$ and $\xi_{M-1} + \sigma h \xi_{M-1} \geq 1$.

Con esta malla se obtiene

$$\|u - u_I\|_\varepsilon \leq Ch$$

con una constante C independiente de ε .

Y en consecuencia

$$\|u - u_I\|_\varepsilon \leq C \frac{\log(1/\varepsilon)}{\sqrt{N}}$$

siendo N el número de nodos de la malla.

OBSERVACIÓN: El orden respecto del número de nodos es óptimo en el sentido de que coincide con el que se obtiene en un problema con solución suave y mallas uniformes.

El problema 1 (o sea que la constante M depende de ϵ puede resolverse pero aparece otro factor logaritmico (omitimos detalles porque es muy técnico). Se obtiene la estimación de error

$$\|u - U_{FE}\|_{\epsilon} \leq C \frac{(\log(1/\epsilon))^2}{\sqrt{N}},$$

siendo U_{FE} la aproximación obtenida con el método standard de 4 nodos con la malla graduada.

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Resolvimos

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u + b \cdot \nabla u + cu &= f && \text{in } \Omega \\ u &= u_D && \text{in } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g && \text{in } \Gamma_N, \end{aligned}$$

con diferentes coeficientes y datos.

1. $b = (0, -1)$, $c = 0$, $\Gamma_D = [0, 1] \times \{0, 1\}$, $\Gamma_N = \{0, 1\} \times [0, 1]$,
 $u_D = 0$, $g = 0$ and $f = 1$,

2. $b = (0, -1)$, $c = 0$, $\Gamma_D = [0, 1] \times \{0, 1\}$, $\Gamma_N = \{0, 1\} \times [0, 1]$,
 $u_D = 0$ on $\{0\} \times [0, 1]$ and $u_D = 1$ on $\{1\} \times [0, 1]$, $g = 0$ and
 $f = 0$,

3. $b = (-\frac{1}{2}, -1)$, $c = 2$, $\Gamma_D = \partial\Omega$, $u_D = 0$, and $f = 1$,

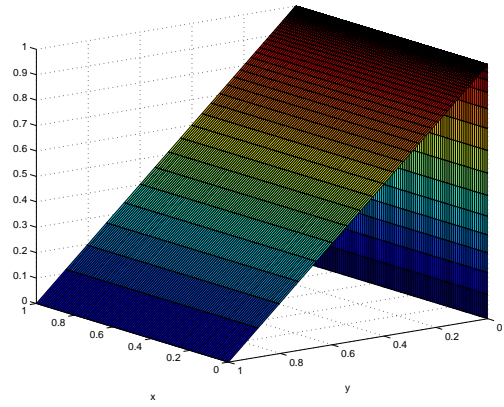
4. $b = (1 - 2\varepsilon)(-1, -1)$, $c = 2(1 - \varepsilon)$, $\Gamma_D = \partial\Omega$, $u_D = 0$ and

$$f(x, y) = - \left[x - \left(\frac{1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \right) + y - \left(\frac{1 - e^{-\frac{y}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \right) \right] e^{x+y}.$$

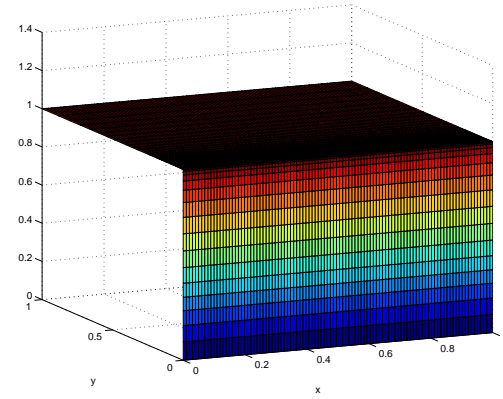
Consideramos distintos valores del parámetro σ y se observó que los resultados no variaban significativamente si son del orden de la unidad, por lo tanto tomamos $\sigma = 1$.

No se observan oscilaciones

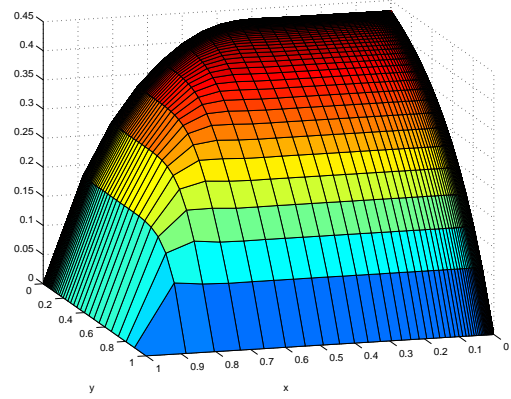
En las figuras se muestran los resultados para los cuatro ejemplos con $\varepsilon = 10^{-6}$.



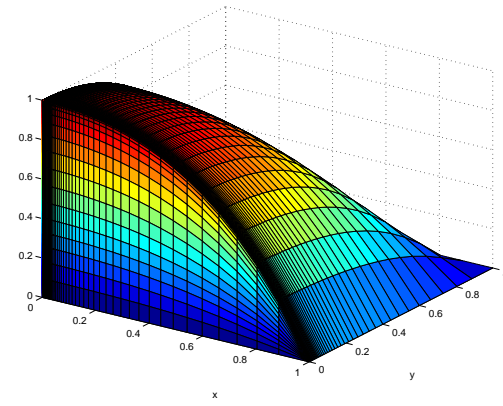
(1)



(2)



(3)



(4)

Para el ejemplo (4) conocemos la solución exacta

$$u(x, y) = \left[\left(x - \frac{1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \right) \left(y - \frac{1 - e^{-\frac{y}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \right) \right] e^{x+y},$$

y podemos entonces calcular el orden de convergencia respecto del número de nodos.

La tabla muestra la norma del error para diferentes valores de N para el problema (4) con $\varepsilon = 10^{-4}$ y $\varepsilon = 10^{-6}$. Los ordenes calculados son 0.513738 y 0.507040 coincidiendo con lo que predice la teoría

N	Error
324	0.16855
961	0.097606
3249	0.052696
12100	0.025912
45796	0.013419

$$\varepsilon = 10^{-4}$$

N	Error
676	0.16494
2025	0.094645
6889	0.050256
25281	0.026023
96100	0.013427

$$\varepsilon = 10^{-6}$$

Con los siguientes resultados queremos mostrar una ventaja de nuestras mallas con las conocidas mallas de Shishkin.:

Las mallas graduadas diseñadas para un ε dado dan buenos resultados para valores más grandes de ε . De hecho, esto se sigue de los resultados teóricos.

No pasa lo mismo con las mallas de Shishkin como muestra el ejemplo siguiente.

Esta ventaja puede ser interesante en problemas con ε variable.

La tabla muestra la norma del error para diferentes valores de ε resolviendo el problema con la malla correspondiente a $\varepsilon = 10^{-6}$, usando mallas graduadas y mallas de Shishkin.

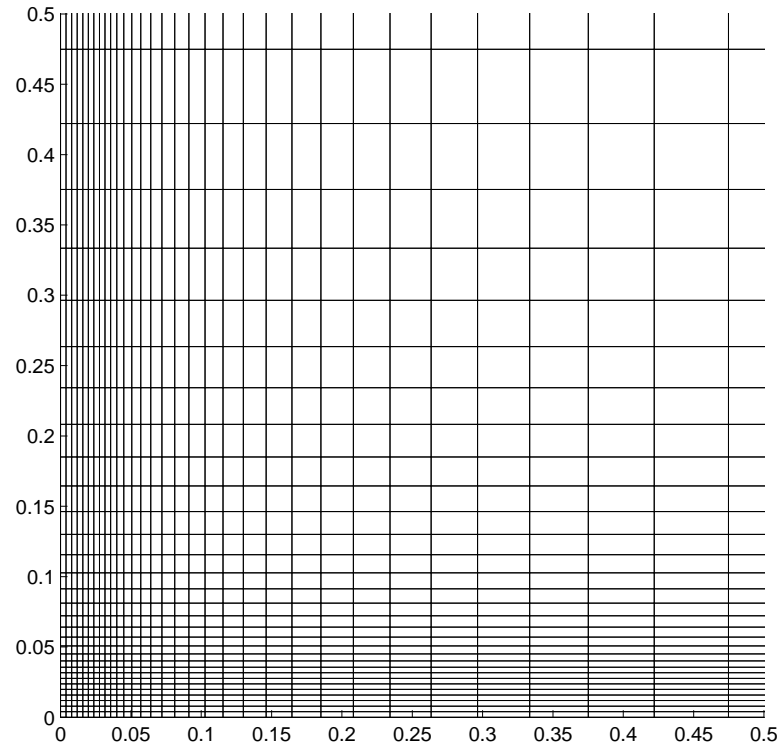
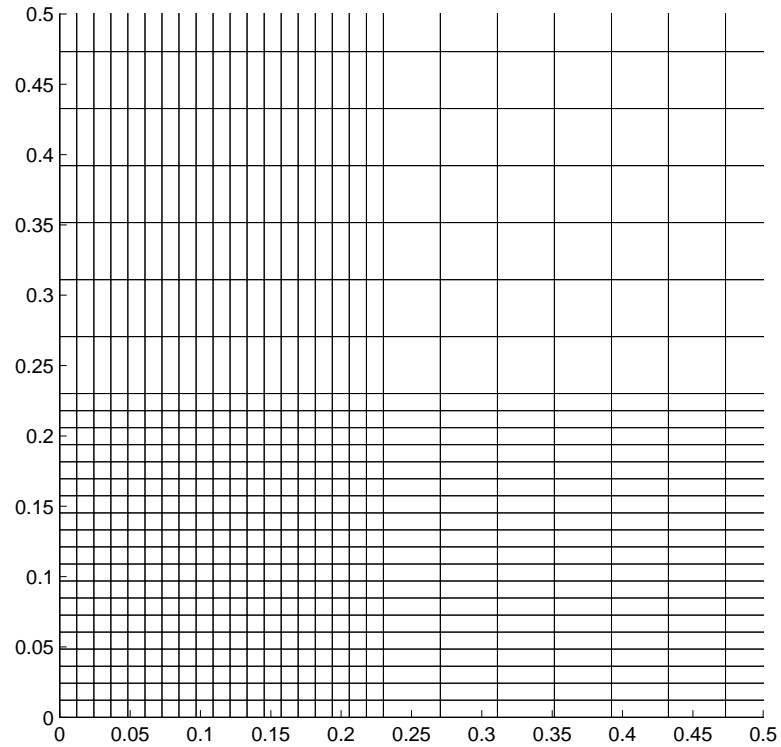
ε	Error
10^{-6}	0.040687
10^{-5}	0.033103
10^{-4}	0.028635
10^{-3}	0.024859
10^{-2}	0.02247
10^{-1}	0.027278

Graded meshes, $N = 10404$

ε	Error
10^{-6}	0.0404236
10^{-5}	0.249139
10^{-4}	0.623650
10^{-3}	0.718135
10^{-2}	0.384051
10^{-1}	0.0331733

Shishkin meshes, $N = 10609$

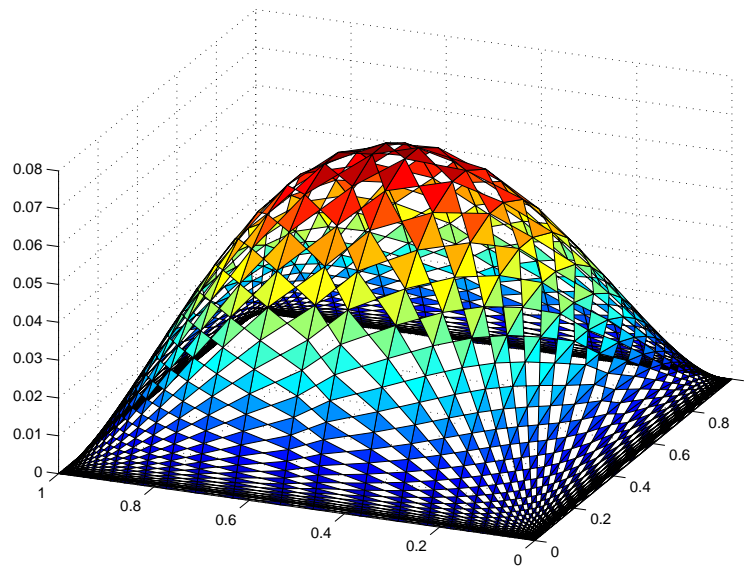
La figura siguiente muestra las diferentes estructuras de las mallas graduadas y las de Shishkin



EJEMPLO DE CUARTO ORDEN

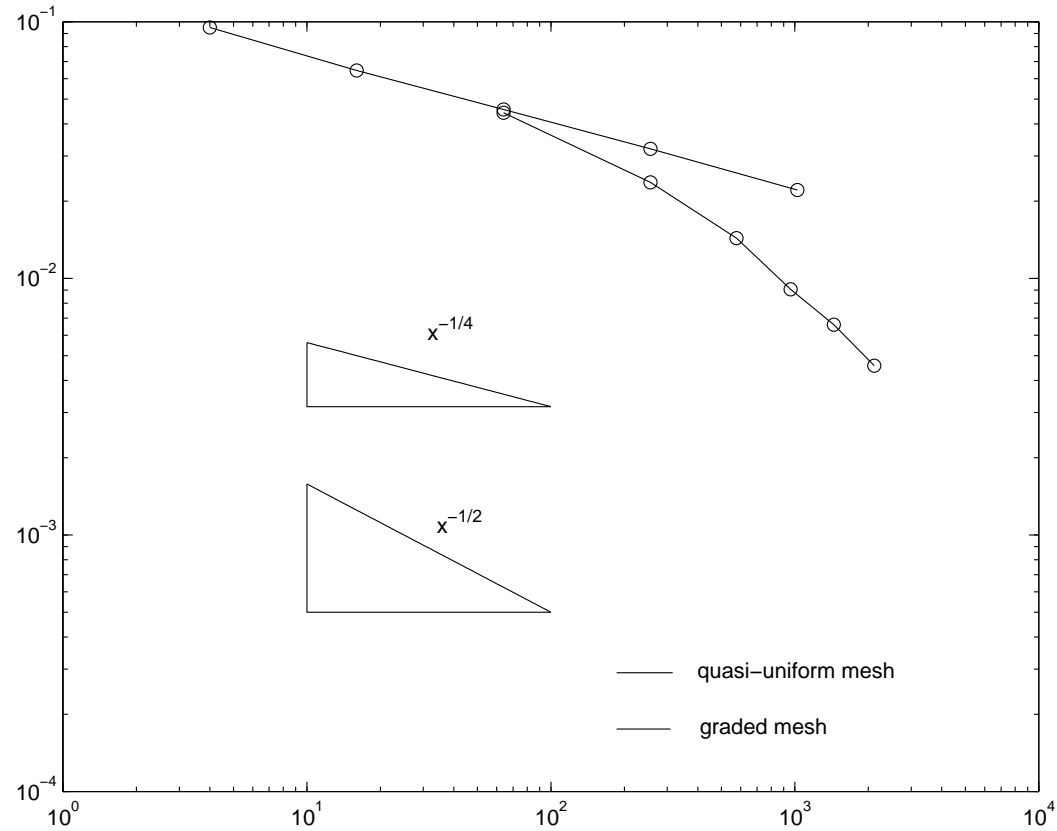
$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta^2 u + \Delta u &= 1 && \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{on } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

Solución con elemento de Adini



$$\varepsilon = 0.001$$

Órdenes de convergencia con mallas graduadas y uniformes



$$\varepsilon = 0.001$$

Mallas uniformes:

$$\|u - u_h\|_\varepsilon \leq \frac{C}{\sqrt[4]{N}}$$

Mallas graduadas:

$$\|u - u_h\|_\varepsilon \leq \frac{C}{\sqrt{N}}$$