Métodos probabilísticos en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales

Homenaje a Pedro E. Zadunaisky

(Feliz Cumpleaños)

Métodos de Monte Carlo

Queremos calcular cierta cantidad θ

Métodos de Monte Carlo

Queremos calcular cierta cantidad θ
Buscamos una variable aleatoria X tal que $\theta = \mathbb{E}(X)$

Métodos de Monte Carlo

Queremos calcular cierta cantidad θ
Buscamos una variable aleatoria X tal que $\theta = \mathbb{E}(X)$
Sean $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ i.i.d, $X_n \sim X$

Métodos de Monte Carlo

Queremos calcular cierta cantidad θ
Buscamos una variable aleatoria X tal que $\theta = \mathbb{E}(X)$
Sean $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ i.i.d, $X_n \sim X$
Si la Ley de los Grande Números vale para esta sucesión, entonces

$$\theta = \mathbb{E}(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{con probabilidad 1}$$

Métodos de Monte Carlo

Queremos calcular cierta cantidad θ
Buscamos una variable aleatoria X tal que $\theta = \mathbb{E}(X)$
Sean $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ i.i.d, $X_n \sim X$
Si la Ley de los Grande Números vale para esta sucesión, entonces

$$\theta = \mathbb{E}(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{con probabilidad 1}$$

Más aún, si

$$\frac{\overline{X_n} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \to Z \sim N(0,1)$$

entonces

$$|\overline{X_n} - \theta| \leq \frac{C(\omega)\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo: cálculo de integrales

$$\theta = \int_D f(x)\,dx, \qquad D \text{ medible y acotado}, f \text{ continua}$$

Ejemplo: cálculo de integrales

$$\theta = \int_D f(x)\,dx, \qquad D \text{ medible y acotado}, f \text{ continua}$$

Sea X con distribución uniforme en D, entonces

$$\theta = \mathbb{E}(f(X)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)$$

Ejemplo: cálculo de integrales

$$\theta = \int_D f(x)\,dx, \qquad D \text{ medible y acotado}, f \text{ continua}$$

Sea X con distribución uniforme en D, entonces

$$\theta = \mathbb{E}(f(X)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)$$

Orden de convergencia muy malo en dimensión 1 ($1/\sqrt{n}$), pero muy bueno en dimensiones muy grandes o en dominios "feos".

Ecuaciones Diferenciales

El problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ en } D$$

$$u = f \text{ en } \partial D$$

$$D \text{ un dominio suave de } \mathbb{R}^d$$

Ecuaciones Diferenciales

El problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ en } D$$

$$u = f \text{ en } \partial D$$

$$D \text{ un dominio suave de } \mathbb{R}^d$$

$$u(x) = \mathbb{E}(?)$$

Ecuaciones Diferenciales

El problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ en } D$$

$$u = f \text{ en } \partial D$$

$$D \text{ un dominio suave de } \mathbb{R}^d$$

$$u(x) = \mathbb{E}(?)$$

Prblema:

$$\Delta u = 0 \text{ en } D$$

$$u = f \text{ en } \partial D$$

$$D \text{ un dominio suave de } \mathbb{R}^d$$

$$u(x) = \mathbb{E}(?)$$

Prblema:

- Conseguir ?

Ecuaciones Diferenciales

El problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ en } D$$

$$u = f \text{ en } \partial D$$

$$D \text{ un dominio suave de } \mathbb{R}^d$$

$$u(x) = \mathbb{E}(?)$$

Prblema:

- Conseguir ?
- Dar una forma de simular una muestra de ?

Ecuaciones Diferenciales

El problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ en } D$$

$$u = f \text{ en } \partial D$$

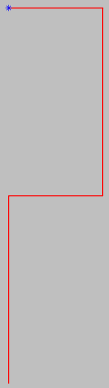
$$D \text{ un dominio suave de } \mathbb{R}^d$$

$$u(x) = \mathbb{E}(?)$$

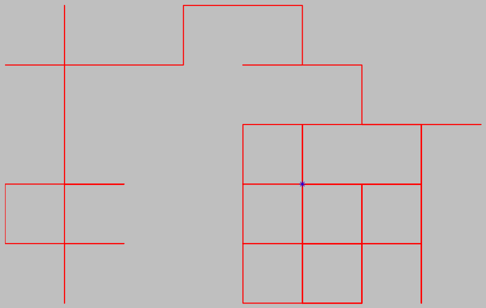
Prblema:

- Conseguir ?
- Dar una forma de simular una muestra de ?
- El algoritmo para simular ? debe ser computacionalmente eficiente

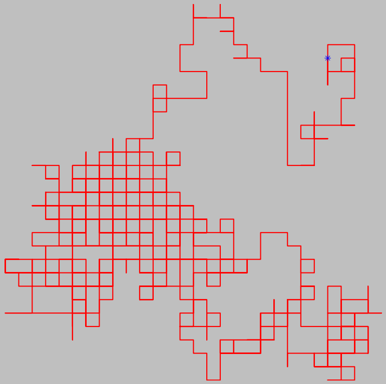
Paseos al azar - Movimiento Browniano



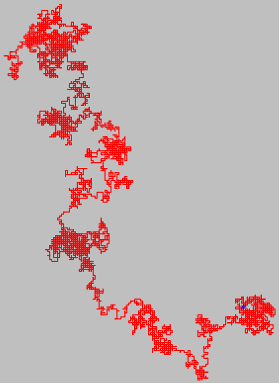
Paseos al azar - Movimiento Browniano



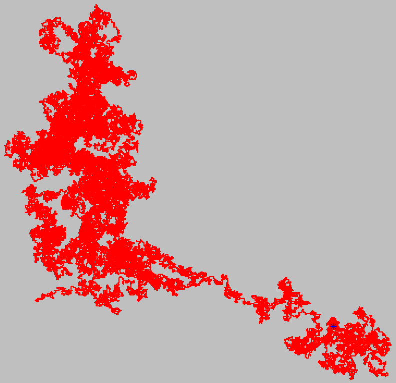
Paseos al azar - Movimiento Browniano



Paseos al azar - Movimiento Browniano



Paseos al azar - Movimiento Browniano



Movimiento Browniano

El Movimiento Browniano es un proceso $B(t)$ límite de los paseos al azar reescalando adecuadamente tiempo y espacio.

$$\frac{X(Nt)}{\sqrt{N}} \to B(t)$$

Verifica

Movimiento Browniano

El Movimiento Browniano es un proceso $B(t)$ límite de los paseos al azar reescalando adecuadamente tiempo y espacio.

$$\frac{X(Nt)}{\sqrt{N}} \to B(t)$$

Verifica

- $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s), \quad (0 \leq s < t).$

Movimiento Browniano

El Movimiento Browniano es un proceso $B(t)$ límite de los paseos al azar reescalando adecuadamente tiempo y espacio.

$$\frac{X(Nt)}{\sqrt{N}} \to B(t)$$

Verifica

- $B(t) - B(s) \sim N(0, t-s), \quad (0 \leq s < t).$
- Los incrementos son independientes

Movimiento Browniano

El Movimiento Browniano es un proceso $B(t)$ límite de los paseos al azar reescalando adecuadamente tiempo y espacio.

$$\frac{X(Nt)}{\sqrt{N}} \to B(t)$$

Verifica

- $B(t) - B(s) \sim N(0, t-s), \quad (0 \leq s < t).$
- Los incrementos son independientes
- Inumerables propiedades interesantísimas...

Volviendo a la ecuación diferencial...

$$\tau_x = inf\{t \geq 0,\ B(t) + x \notin D\}$$

Volviendo a la ecuación diferencial...

$$\tau_x = inf\{t \geq 0,\ B(t) + x \notin D\}$$

$$u(x) := \mathbb{E}(f(B(\tau_x)))$$

Volviendo a la ecuación diferencial...

$$\tau_x = inf\{t \geq 0,\ B(t) + x \notin D\}$$

$$u(x) := \mathbb{E}(f(B(\tau_x)))$$

u verifica la propiedad del valor medio y $u|_{\partial D} = f$ por lo tanto es la solución del problema de Dirichlet.

Ecuaciones elípticas (lineales)

$$\mathcal{L}u = 0 \text{ en } D$$

$$u = f \text{ en } \partial D$$

$$\mathcal{L}u(x) = \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}, \quad \text{definida positiva}$$

Difusiones de Itô

$X = (X(t))_t$ un proceso (Markov homogéneo) que verifica

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x(w(X(t)) - w(x))}{t} = \mathcal{L}w(x)$$

entonces

$$u(x) := \mathbb{E}^x(f(X(\tau)))$$

resuelve nuestro problema

Difusiones de Itô

$X = (X(t))_t$ un proceso (Markov homogéneo) que verifica

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x(w(X(t)) - w(x))}{t} = \mathcal{L}w(x)$$

entonces

$$u(x) := \mathbb{E}^x(f(X(\tau)))$$

resuelve nuestro problema

¿Existe un tal X?

Respuesta (Itô - 1942)

Respuesta (Itô - 1942)

SI

(Con condiciones de regularidad en los coeficientes)

Respuesta (Itô - 1942)

SI

(Con condiciones de regularidad en los coeficientes)

$X = (X_1, \ldots, X_d)$, solución de la
Ecuación Diferencial Estocástica (SDE)

$$dX_i(t) = b_i(X(t))\,dt + (A^{1/2}(X(t))\,dB)_i$$

Respuesta (Itô - 1942)

SI

(Con condiciones de regularidad en los coeficientes)

$X = (X_1, \dots, X_d)$, solución de la

Ecuación Diferencial Estocástica (SDE)

$$dX_i(t) = b_i(X(t))\,dt + (A^{1/2}(X(t))\,dB)_i$$

entonces

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x(w(X(t)) - w(x))}{t} = \mathcal{L}w(x)$$

y

$$u(x) := \mathbb{E}^x(f(X(\tau))) \quad \text{Resuelve el problema de Dirichlet}$$

Cómo se calcula (numéricamente) $u(x)$

Cómo se calcula (numéricamente) $u(x)$

1. Resolver numéricamente la SDE con dato inicial x hasta tiempo τ

Cómo se calcula (numéricamente) $u(x)$

1. Resolver numéricamente la SDE con dato inicial x hasta tiempo τ
2. Calcular $f(X(\tau))$

Cómo se calcula (numéricamente) $u(x)$

1. Resolver numéricamente la SDE con dato inicial x hasta tiempo τ
2. Calcular $f(X(\tau))$
3. Repetir n veces hasta que la varianza sea aceptable

Cómo se calcula (numéricamente) $u(x)$

1. Resolver numéricamente la SDE con dato inicial x hasta tiempo τ
2. Calcular $f(X(\tau))$
3. Repetir n veces hasta que la varianza sea aceptable
4. Promediar los resultados

Cómo se calcula (numéricamente) $u(x)$

1. Resolver numéricamente la SDE con dato inicial x hasta tiempo τ
2. Calcular $f(X(\tau))$
3. Repetir n veces hasta que la varianza sea aceptable
4. Promediar los resultados

Fuentes de error

Cómo se calcula (numéricamente) $u(x)$

1. Resolver numéricamente la SDE con dato inicial x hasta tiempo τ
2. Calcular $f(X(\tau))$
3. Repetir n veces hasta que la varianza sea aceptable
4. Promediar los resultados

Fuentes de error

- Error estadístico (por aproximar a la esperanza)

Cómo se calcula (numéricamente) $u(x)$

1. Resolver numéricamente la SDE con dato inicial x hasta tiempo τ
2. Calcular $f(X(\tau))$
3. Repetir n veces hasta que la varianza sea aceptable
4. Promediar los resultados

Fuentes de error

- Error estadístico (por aproximar a la esperanza)
- Error numérico (por aproximar a X)

Cómo se calcula (numéricamente) $u(x)$

1. Resolver numéricamente la SDE con dato inicial x hasta tiempo τ
2. Calcular $f(X(\tau))$
3. Repetir n veces hasta que la varianza sea aceptable
4. Promediar los resultados

Fuentes de error

- Error estadístico (por aproximar a la esperanza)
- Error numérico (por aproximar a X)
- Error de redondeo

Cómo se calcula (numéricamente) $u(x)$

1. Resolver numéricamente la SDE con dato inicial x hasta tiempo τ
2. Calcular $f(X(\tau))$
3. Repetir n veces hasta que la varianza sea aceptable
4. Promediar los resultados

Fuentes de error

- Error estadístico (por aproximar a la esperanza)
- Error numérico (por aproximar a X)
- Error de redondeo

Otros problemas

Cómo se calcula (numéricamente) $u(x)$

1. Resolver numéricamente la SDE con dato inicial x hasta tiempo τ
2. Calcular $f(X(\tau))$
3. Repetir n veces hasta que la varianza sea aceptable
4. Promediar los resultados

Fuentes de error

- Error estadístico (por aproximar a la esperanza)
- Error numérico (por aproximar a X)
- Error de redondeo

Otros problemas

- Generación de números aleatorios

Observaciones

- Se puede calcular $u(y)$ sin necesidad de calcular $u(x)$ para todo $x \in D$

Observaciones

- Se puede calcular $u(y)$ sin necesidad de calcular $u(x)$ para todo $x \in D$
- La complejidad del problema crece linealmente con la dimensión

Más ecuaciones elípticas (lineales)

Kakutani, 1944

$$\mathcal{L}u(x) - c(x)u(x) = g(x) \text{ en } D, \quad c(x) \geq 0$$

$$u(x) = f(x) \text{ en } \partial D$$

$$u(x) := \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\int_0^t c(X(s))\, ds} g(X(t))\, dt + f(X(\tau)) \right]$$

Ecuaciones parabólicas (lineales)

Fórmula de Feynman-Kac (1949)

$$v_t(x,t) = \mathcal{L}v(x,t) - q(x)v(x,t) \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^d$$
$$u(x,0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

$$v(x,t) = \mathbb{E}^x \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t q(X(s))\, ds} f(X(t)) \right].$$

Dem:
Fórmula de Itô y tomar esperanza

Ecuaciones no lineales

Ecuaciones no lineales

No hay un método general para dar representaciónes probabilísticas de las soluciones.

Ecuaciones no lineales

No hay un método general para dar representaciónes probabilísticas de las soluciones.
Existen representaciones para ecuaciones específicas.

Ecuaciones no lineales

No hay un método general para dar representaciónes probabilísticas de las soluciones.
Existen representaciones para ecuaciones específicas.

Ecuaciones de reacción difusión no lineales

Mc Kean (1975)

$$u_t = \Delta u + u^2 - u \quad \text{en } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Ecuaciones de reacción difusión no lineales

Mc Kean (1975)

$$u_t = \Delta u + u^2 - u \quad \text{en } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Branching Brownian Motion

Ecuaciones de reacción difusión no lineales

Mc Kean (1975)

$$u_t = \Delta u + u^2 - u \quad \text{en } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Branching Brownian Motion

- Una partícula empieza un Movimiento Browniano B en el origen.

Ecuaciones de reacción difusión no lineales

Mc Kean (1975)

$$u_t = \Delta u + u^2 - u \quad \text{en } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Branching Brownian Motion

- Una partícula empieza un Movimiento Browniano B en el origen.
- Espera un tiempo exponencial T independiente de B

Ecuaciones de reacción difusión no lineales

Mc Kean (1975)

$$u_t = \Delta u + u^2 - u \quad \text{en } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Branching Brownian Motion

- Una partícula empieza un Movimiento Browniano B en el origen.
- Espera un tiempo exponencial T independiente de B
- En tiempo T la partícula se divide en dos y cada una de ellas comienza un Movimiento Browniano en $X(T)$ (independientes)

Ecuaciones de reacción difusión no lineales

Mc Kean (1975)

$$u_t = \Delta u + u^2 - u \quad \text{en } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Branching Brownian Motion

- Una partícula empieza un Movimiento Browniano B en el origen.
- Espera un tiempo exponencial T independiente de B
- En tiempo T la partícula se divide en dos y cada una de ellas comienza un Movimiento Browniano en $X(T)$ (independientes)
- Cada una de estas partículas esta sujeta a la misma regla.

Ecuaciones de reacción difusión no lineales

Mc Kean (1975)

$$u_t = \Delta u + u^2 - u \quad \text{en } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Branching Brownian Motion

- Una partícula empieza un Movimiento Browniano B en el origen.
- Espera un tiempo exponencial T independiente de B
- En tiempo T la partícula se divide en dos y cada una de ellas comienza un Movimiento Browniano en $X(T)$ (independientes)
- Cada una de estas partículas esta sujeta a la misma regla.
- A tiempo $t > 0$ tenemos n partículas ubicadas en $B_1, \dots, B_n$, con $\mathbb{P}(n = k) = \mathrm{e}^{-t}(1 - \mathrm{e}^{-t})^{k-1}$.

Branching Brownian Motion

Branching Brownian Motion

Representación probabilística

$$u(x,t) = \mathbb{E}[u_0(B_1 + x) \cdots u_0(B_n + x)]$$

Representación probabilística

$$u(x,t) = \mathbb{E}[u_0(B_1 + x) \cdots u_0(B_n + x)]$$

Dem: Condicionando a si $T \leq t$ o no obtenemos

$$u(x,t) =$$

$$\mathbb{P}(T > t) S_t u_0(x) + \int_0^t \mathbb{P}(T \in ds) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(B(s) + x \in dy) u^2(t-s,y)$$

$$= \mathbb{P}(T > t) S_t u_0(x) + \int_0^t \mathrm{e}^{-s} S_s u^2(t-s,x)\, dx$$

$$= \mathrm{e}^{-t} \left[S_t u_0(x) + \int_0^t \mathrm{e}^{s} S_{t-s} u^2(s,x)\, dx \right] \Rightarrow$$

Representación probabilística

$$u(x,t) = \mathbb{E}[u_0(B_1 + x) \cdots u_0(B_n + x)]$$

Dem: Condicionando a si $T \leq t$ o no obtenemos

$$u(x,t) =$$

$$\mathbb{P}(T > t) S_t u_0(x) + \int_0^t \mathbb{P}(T \in ds) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(B(s) + x \in dy) u^2(t-s, y)$$

$$= \mathbb{P}(T > t) S_t u_0(x) + \int_0^t \mathrm{e}^{-s} S_s u^2(t-s, x)\, dx$$

$$= \mathrm{e}^{-t} \left[S_t u_0(x) + \int_0^t \mathrm{e}^{s} S_{t-s} u^2(s,x)\, dx \right] \Rightarrow$$

$$u_t = \Delta u + u^2 - u.$$

Problemas de autovalores

D un dominio suave y acotado de $\mathbb{R}^d$

Problemas de autovalores

D un dominio suave y acotado de $\mathbb{R}^d$
$B_1(t), \ldots, B_n(t), \ldots$ Branching Brownian Motion en D

Problemas de autovalores

D un dominio suave y acotado de $\mathbb{R}^d$
$B_1(t), \ldots, B_n(t), \ldots$ Branching Brownian Motion en D
Cuando una partícula toca el borde de D, se muere.

Problemas de autovalores

D un dominio suave y acotado de $\mathbb{R}^d$
$B_1(t), \dots, B_n(t), \dots$ Branching Brownian Motion en D
Cuando una partícula toca el borde de D, se muere.
Le asociamos la medida empírica

$$\mu_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{B_i(t)}$$

Problemas de autovalores

D un dominio suave y acotado de $\mathbb{R}^d$
$B_1(t), \ldots, B_n(t), \ldots$ Branching Brownian Motion en D
Cuando una partícula toca el borde de D, se muere.
Le asociamos la medida empírica

$$\mu_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{B_i(t)}$$

Entonces

$$\mu_t \to \mu$$

μ es absolutamente continua en D y su densidad resuelve

$$\Delta u = \lambda_1 u \quad \text{en } D$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial D$$

Nuestro interés...

Blow-up

$$u_t = \Delta u + f(u)$$

Nuestro interés...

Blow-up

$$u_t = \Delta u + f(u)$$

Las soluciones pueden desarrollar una singularidad en un tiempo finito T

$$\lim_{t \nearrow T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \to \infty$$

Nuestro interés...

Blow-up

$$u_t = \Delta u + f(u)$$

Las soluciones pueden desarrollar una singularidad en un tiempo finito T

$$\lim_{t \nearrow T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \to \infty$$

El tiempo y el lugar donde se desarrolla la singularidad dependen de la solución y no de los datos del problema.

Nuestro interés...

Blow-up

$$u_t = \Delta u + f(u)$$

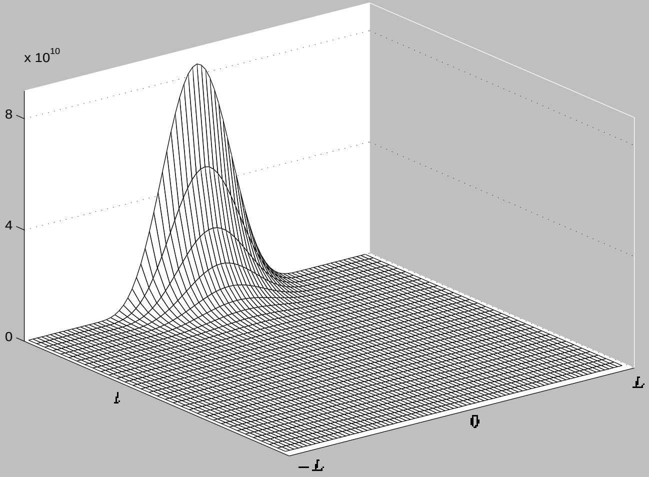
Las soluciones pueden desarrollar una singularidad en un tiempo finito T

$$\lim_{t \nearrow T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \to \infty$$

El tiempo y el lugar donde se desarrolla la singularidad dependen de la solución y no de los datos del problema.

¿Cómo se comportan estos métodos en presencia de singularidades de este tipo?

Blow-up



Algunas preguntas...

Algunas preguntas...

- ¿Hay blow-up?

Algunas preguntas...

- ¿Hay blow-up?
- ¿Cuándo?

Algunas preguntas...

- ¿Hay blow-up?
- ¿Cuándo?
- ¿Dónde?

Algunas preguntas...

- ¿Hay blow-up?
- ¿Cuándo?
- ¿Dónde?
- ¿Cómo?

Algunas preguntas...

- ¿Hay blow-up?
- ¿Cuándo?
- ¿Dónde?
- ¿Cómo?
- ¿Qué pasa cuando se perturba el problema?

Algunas preguntas...

- ¿Hay blow-up?
- ¿Cuándo?
- ¿Dónde?
- ¿Cómo?
- ¿Qué pasa cuando se perturba el problema?
- ¿Qué pasa después de la explosión?

Algunas preguntas...

- ¿Hay blow-up?
- ¿Cuándo?
- ¿Dónde?
- ¿Cómo?
- ¿Qué pasa cuando se perturba el problema?
- ¿Qué pasa después de la explosión?
- ¿Cómo se calcula?

Observación:

Algunas preguntas...

- ¿Hay blow-up?
- ¿Cuándo?
- ¿Dónde?
- ¿Cómo?
- ¿Qué pasa cuando se perturba el problema?
- ¿Qué pasa después de la explosión?
- ¿Cómo se calcula?

Observación:

- Si sabemos dónde va a ocurrir la explosión podemos calcularla numéricamente sin necesidad de calcular la solución en todo el dominio.

FIN