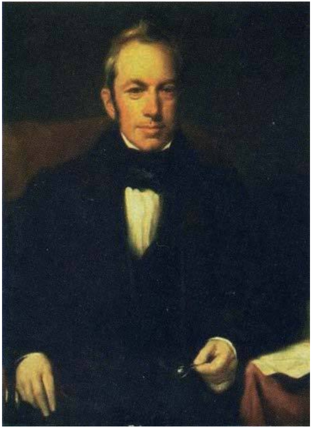
¿Para qué sirven las urnas y las bolitas?

Pablo Groisman

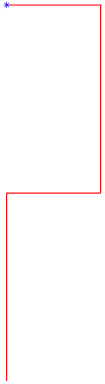
Universidad de Buenos Aires

Robert Brown, botánico (1773-1858)

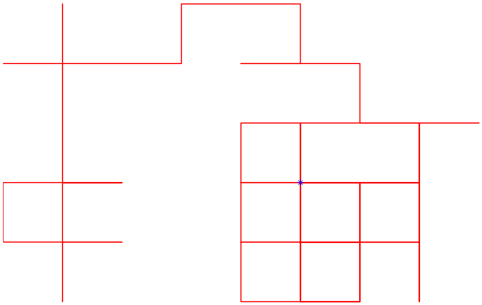


En 1827 observa lo que luego se denominó Movimiento Browniano.

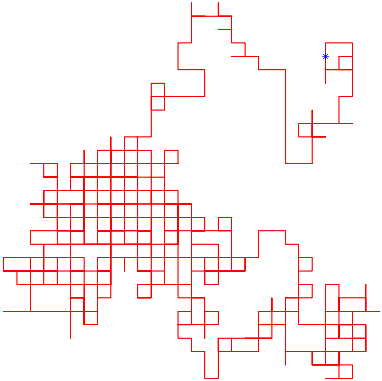
Paseos al azar - Movimiento Browniano



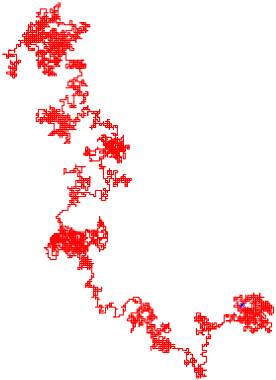
Paseos al azar - Movimiento Browniano



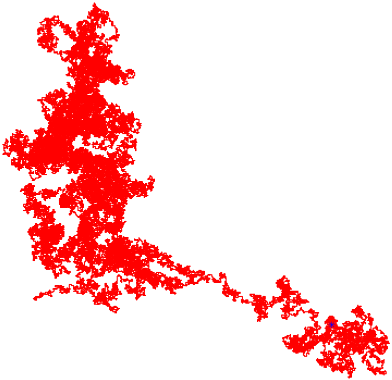
Paseos al azar - Movimiento Browniano



Paseos al azar - Movimiento Browniano



Paseos al azar - Movimiento Browniano



El Movimiento Browniano es un proceso $B(t)$ límite de los paseos al azar reescalando adecuadamente tiempo y espacio .

$$\frac{X(Nt)}{\sqrt{N}} \to B(t)$$

Verifica

El Movimiento Browniano es un proceso $B(t)$ límite de los paseos al azar reescalando adecuadamente tiempo y espacio .

$$\frac{X(Nt)}{\sqrt{N}} \to B(t)$$

Verifica

- $B(t) - B(s) \sim N(0, t-s), \quad (0 \leq s < t).$

El Movimiento Browniano es un proceso $B(t)$ límite de los paseos al azar reescalando adecuadamente tiempo y espacio .

$$\frac{X(Nt)}{\sqrt{N}} \to B(t)$$

Verifica

- $B(t) - B(s) \sim N(0, t-s), \quad (0 \leq s < t)$.
- Los incrementos son independientes

El Movimiento Browniano es un proceso $B(t)$ límite de los paseos al azar reescalando adecuadamente tiempo y espacio .

$$\frac{X(Nt)}{\sqrt{N}} \to B(t)$$

Verifica

- $B(t) - B(s) \sim N(0, t-s), \quad (0 \leq s < t).$
- Los incrementos son independientes
- Inumerables propiedades interesantísimas...

Paul y Tatiana Ehrenfest

Urna de Ehrenfest (1907)

Y_n = Vector de dimensión N que indica dónde esta cada bolita.

$$Y_n = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0)$$

Es un proceso reversible!

...y recurrente

Urna de Ehrenfest (1907)

$X_n =$ Cantidad de bolas blancas en la urna A.
Es un paseo al azar con probabilidades

$$p_{i,i+1} = \frac{i}{n}, \quad p_{i,i-1} = \frac{N-i}{N}, \quad i = 0, \ldots, N$$

Urna de Ehrenfest (1907)

$X_n =$ Cantidad de bolas blancas en la urna A.
Es un paseo al azar con probabilidades

$$p_{i,i+1} = \frac{i}{n}, \quad p_{i,i-1} = \frac{N-i}{N}, \quad i = 0, \dots, N$$

Distribución estacionaria (límite)

$$\pi_i = \binom{N}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

Urna de Ehrenfest (1907)

X_n = Cantidad de bolas blancas en la urna A.
Es un paseo al azar con probabilidades

$$p_{i,i+1} = \frac{i}{n}, \quad p_{i,i-1} = \frac{N-i}{N}, \quad i = 0, \dots, N$$

Distribución estacionaria (límite)

$$\pi_i = \binom{N}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

Tiempo medio de recurrencia

$$\mu_i = \frac{1}{\pi_i}$$

Urna de Ehrenfest (1907)

$$i = 0, \quad \mu_0 = 2^{20.000}$$

Edad del universo.

$$14 * 10^9 \text{ años} = 14 * 10^9 * 365 * 24 * 60 * 60\text{seg} \sim 10^{19}\text{seg}.$$

$$\mu_0 \sim 10^{6.000} \text{ años}$$

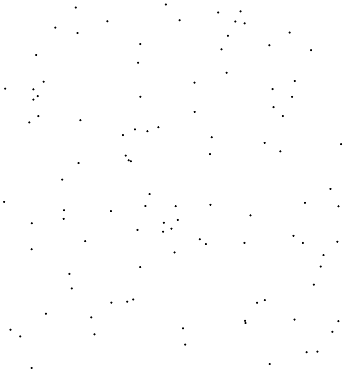
En cambio
$i = N/2, \quad \mu_{N/2} \sim 175 seg \sim 3 min$

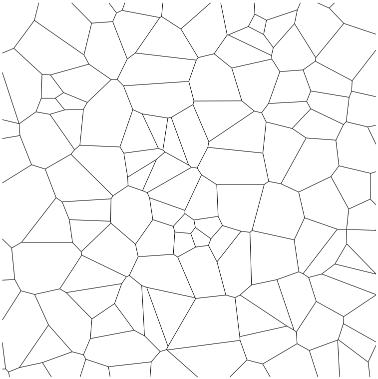
Entropía

Grafos de Delaunay-Poisson, funciones armónicas, paseos al azar y el principio de invariancia de Donsker

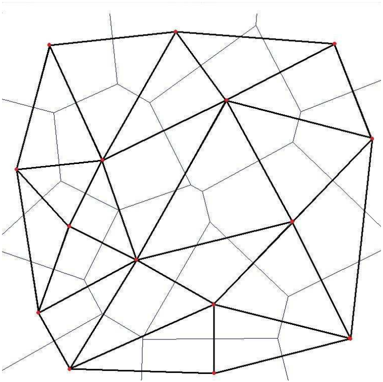
Trabajo conjunto con Pablo A. Ferrari y Rafael Grisi

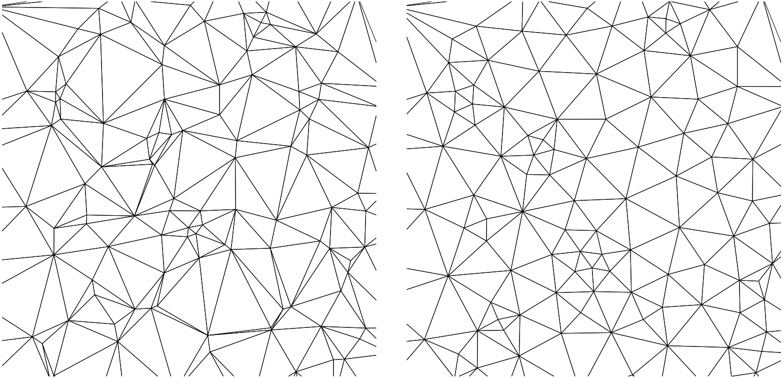
Procesos de Poisson en el plano



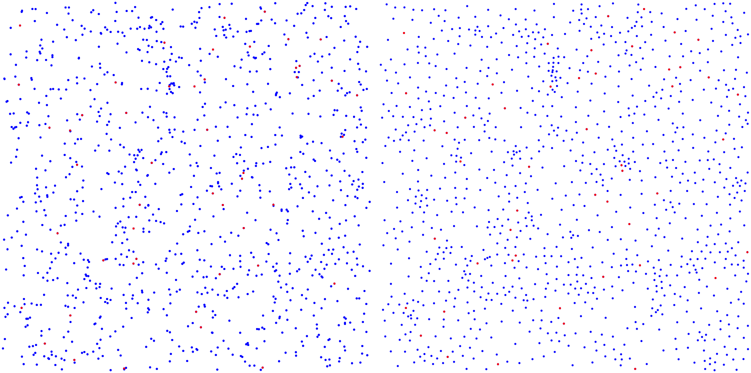


Teselación de Voronoi - Grafo de Delaunay

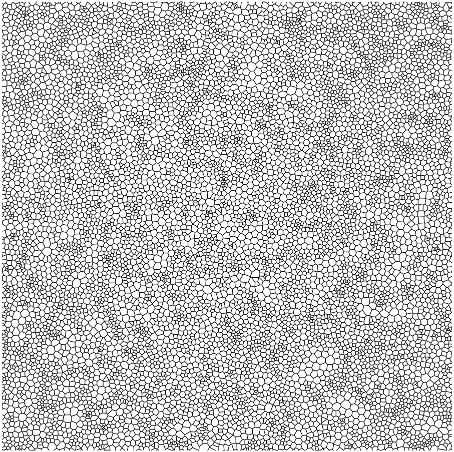




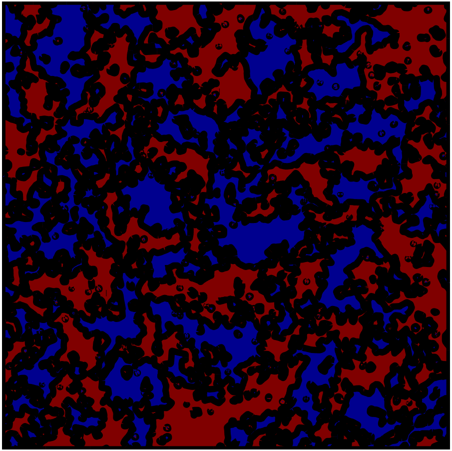
Triangulación de Delaunay de un proceso de Poisson y su deformación armónica.



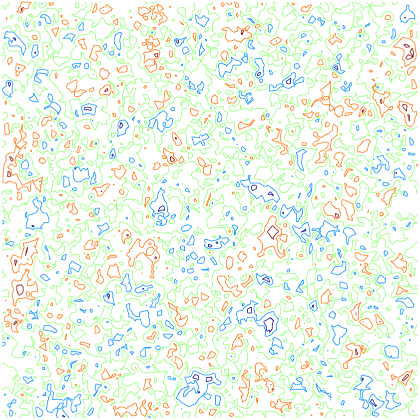
Puntos de un proceso de Poisson y su deformación armónica.



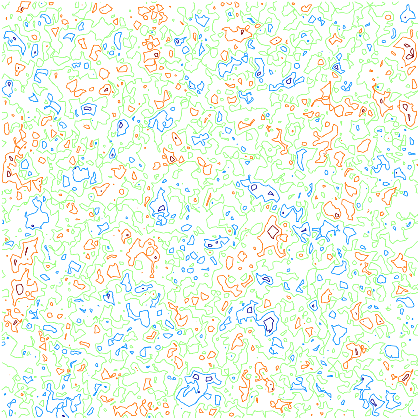
Teselación armónica de Voronoi.



Parte positiva y negativa del corrector.



Curvas de nivel del corrector.



Curvas de nivel del corrector.

FIN

Gracias