1. Si $f\colon S_0^{\mathbb{Z}^d}$ es $\mathcal{F}_\Lambda-$ medible existe $g\colon S_0^\Lambda \to \mathbb{R}$ tal que
$$f(\sigma) = g(\sigma_\Lambda).$$
Acá $\sigma_\Lambda = X_\Lambda(\sigma)$ es la proyección de σ en Λ ($X_\Lambda\colon S_0^{\mathbb{Z}^d} \to S_0^\Lambda$, $X_\Lambda(\sigma)(x) = \sigma(x)$ para $x \in \Lambda$).

2. Sea $\mathbb{P}_p$ la medida asociada al proceso de percolación en $\mathbb{Z}^d$ de parámetro $0 \le p \le 1$. Es decir, bajo $\mathbb{P}_p$, $(\eta(e), e \in E(\mathbb{Z}^d))$ son variables aleatorias i.i.d con
$$\mathbb{P}_p(\eta(e) = 1) = 1 - \mathbb{P}_p(\eta(e) = 0) = p.$$
Probar que el evento $A =$“Existe un camino infinito abierto” es medible respecto de la $\sigma-$álgebra cola y por lo tanto
$$\mathbb{P}_p(A) = \begin{cases} 1 & p > p_c, \\ 0 & p < p_c \end{cases}$$

3. Probar las propiedades de la esperanza condicional enunciadas en clase.

4. Si S es finito o numerable y μ y ν son medidas de probabilidad en S entonces
$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} = \frac{1}{2}\sum_{s\in S} |\mu(s) - \nu(s)|.$$

5. Probar “a mano” que $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ es compacto. Idem para $S = S_0^{\mathbb{Z}^d}$ si S_0 es compacto.

6. Sea (S_0, d_0) un espacio métrico acotado, separable y completo. Sea $\mathcal{B}(S_0)^{\mathbb{Z}^d}$ la $\sigma-$álgebra producto en $S = S_0^{\mathbb{Z}^d}$ y $\mathcal{B}(S)$ la $\sigma-$álgebra de Borel en (S, d), donde
$$d(\sigma, \sigma') = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{-|x|} d_0(\sigma(x), \sigma'(x)).$$
Probar que $\mathcal{B}(S_0)^{\mathbb{Z}^d} = \mathcal{B}(S)$. Ojo! Esto no es cierto si S_0 no es separable.

7. Asumir S_0 finito. En $(S, \mathcal{B}(S))$ se define para cada $\beta > 0$, $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ y $\eta \in S$ la medida de probabilidad
$$\mu^\eta_{\Lambda,\beta}(\sigma) = \frac{1}{Z^\eta_{\Lambda,\beta}} e^{-\beta H^\eta_\Lambda(\sigma)} \mathbf{1}\{\sigma(x) = \eta(x), \forall\, x \notin \Lambda\},$$
donde
$$H^\eta_\Lambda(\sigma) = \sum_{x\sim y\colon x\in\Lambda} U(\sigma(x), \sigma(y)) + \sum_{x\in\Lambda} V(\sigma(x)),$$
y $\frac{1}{Z^\eta_{\Lambda,\beta}}$ es la constante de normalización. Probar que si f es continua entonces $\eta \mapsto \mu^\eta_{\Lambda,\beta}(f)$ es cuasi-local.

8. Usar la desigualdad de Holley para probar que en modelo de Ising (i.e. $S_0 = \{-1, 1\}$, $U(s, s') = -ss'$, $V(s) = hs$) se tiene

   a) $\mu^\eta_{\Lambda,\beta,h_1} \preceq_{\mathrm{st}} \mu^{\eta'}_{\Lambda,\beta,h_2}$ si $\eta \preceq \eta'$ y $h_1 \le h_2$.
   b) $\mu^\eta_{\Delta,\beta} \preceq_{\mathrm{st}} \mu^\eta_{\Lambda,\beta}$ si $\Lambda \subset \Delta$ y $\eta \equiv 1$.

9. Considerar la medida del modelo de hardcore dada por $S_0 = \{0, 1\}$, $U(s, s') = \infty \cdot s \cdot s'$, $V(s) = -s$.

   a) Interpretar el modelo.
   b) ¿Vale $\mu^\eta_{\Lambda,\beta} \preceq_{\mathrm{st}} \mu^\eta_{\Delta,\beta}$ si $\Lambda \subset \Delta$ y $\eta \equiv 1$? Sugerencia: considerar $\Lambda = \{(0, 0)\}$ y $\Delta = \Lambda \cup \{(1, 0)\}$. ¿Y para algún otro valor de η?