1. Sea (ξ_n) una sucesión iid de varaibles aleatorias que toman valores en un espacio finito S.

   a) Probar que $X_n = \max(\xi_i, i \leq n)$ e $Y_n = \min(\xi_i, i \leq n)$ son cadenas de Markov.
   b) En cada caso hallar (F, Z) que la generen.
   c) Determinar las probabilidades de transición.
   d) Implementar un algoritmo que genere estas cadenas.
   e) Tienen medida invariante π? Cuál es? Es cierto que $\mu_n \to \pi$?
   Moraleja: No siempre conviene generar una cadena basandose en la matriz de transición y la inversa generalizada de las distribuciones condicionales.

2. Bajar el archivo `hipercubo.m` de la página de la materia que simula la cantidad de unos en el paseo al azar en el hipercubo.

   a) Interpretar el programa. Es correcto lo que hace?
   b) Probar que $X_n =$ cantidad de unos en el paso n del paseo es una cadena de Markov. Hallar P
   c) Ejecutar el programa con distintos valores de `x(1)`, `N` y `n` para analizar el comportamiento asintótico de la cadena.
   d) Hallar (numéricamente) la distribución invariante π de X_n.
   e) Hallar (teóricamente) la distribución invariante π.

   Sugerencias:

   a) Para N chico se puede usar el comando `eig` o `eigs` para matrices esparsas. Qué pasa si N es grande?
   b) Tener en cuenta el siguiente Teorema ergódico que probaremos mas adelante: para toda $f\colon \{0, \dots N\} \to \mathbb{R}$ se tiene

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1} f(X_i) = \sum_{x=1}^{N} f(x)\pi(x) = \mathbb{E}_\pi(X_1).$$

   c) Hacer (tal vez) primero el ejercicio que sigue.

3. Qué pasa si lo que queremos en realidad es una muestra (exacta o aproximada) de π? Comparar ambos métodos.

4. Bajar el archivo `markov.m` y `rando.m` de la pagina de la materia. Usarlos para simular la cadena con matriz P cargada en el mismo o cambiar por otra que le guste más. Calcular (numéricamente) la medida invariante de la cadena con los dos métodos mencionados en el ejercicio anterior.

5. Implementar un algoritmo que simule el paseo al azar en hipercubo. Usar distintas F. Para la función F vista en clase que acopla cadenas con distintas distribuciones iniciales graficar ambas trayectorias juntas y reportar el tiempo en que se juntan. Estimar la distribución de este tiempo.