Final de Probabilidades y Estadística (Matemática) al 2 de junio de 2016

El final tendrá 14 ejercicios elegidos entre los siguientes. Cada ejercicio vale 1 punto.
De los 14 ejercicios propuestos habrá que elegir 10. Se aprueba con 6 de esos 10 bien hechos.

Probabilidad definición y enunciados

1. Enuncie los axiomas de probabilidad. Demuestre a partir de los axiomas que $P(A^c) = 1 - P(A)$ y que si $B \subset A$ entonces $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

2. Demuestre usando los axiomas de probabilidad que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

3. Demuestre usando los axiomas de probabilidad que $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

4. Demuestre usando los axiomas de probabilidad que si $A_n \supset A_{n-1}$ y $A = \cup_n A_n$, entonces $P(A) = \lim_n P(A_n)$.

5. Demuestre usando los axiomas de probabilidad que si $A_n \subset A_{n-1}$ entonces $P(\cap_n A_n) = \lim_n P(A_n)$.

Probabilidad condicional e independencia

6. En una muestra de 100 personas hay 13 enfermos y no vacunados, 2 enfermos y vacunados, 75 sanos y vacunados, 10 sanos y no vacunados. Elegimos una persona al azar y vemos que está enfermo. Cual es la probabilidad que no se haya vacunado?

7. Una familia tiene dos hijos. Sabemos que el primer hijo es varón. Cual es la probabilidad que el segundo hijo sea también varón?

8. Sabemos que una familia con dos hijos tiene por lo menos un hijo varón. Cual es la probabilidad que los dos sean varones?

9. Visitamos una familia con dos hijos. Tocamos el timbre y un chico varón abre la puerta. Cual es la probabilidad que el otro chico sea varón?

10. Demueste la regla de multiplicación de las probabilidades condicionales:

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$$

11. Una urna tiene 4 bolas negras y 3 rojas. Sacamos tres bolas sin reposición. Cual es la probabilidad que la primera bola salga negra y la tercera salga roja?

12. Enuncie y demuestre la fórmula de la probabilidad total.

13. Enuncie y demuestre el Teorema de Bayes.

14. Hay tres puertas cerradas y un premio atras de una de las puertas. Elijo una puerta y el presentador abre una de las otras dos que no tiene premio. Me da la opcion de cambiar de puerta. Conviene cambiar? Justifique.

15. Defina independencia para una familia $(A_i, i \in I)$, donde A_i son eventos e I es un conjunto cualquiera. Dé un ejemplo de tres eventos independientes dos a dos pero no independientes.

Variables aleatorias

16. Defina la función de distribución acumulada de una variable aleatoria X y enuncie y demuestre sus propiedades.

17. Demuestre que para una variable aleatoria X discreta, $P(X = x) = F(x) - F(x-)$.

18. Sea $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ una función continua, estrictamente creciente y tal que $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Demuestre que hay una variable aleatoria X que tiene a F como función de distribución.

19. Sean F_X e F_Y las funciones de distribución acumulada de las variables discretas X e Y, respectivamente. Demuestre que $P(X = x) = P(Y = x)$ para todo x si y solo si $F_X = F_Y$.

20. Sea S_n una variable aleatoria Binomial$(n, \lambda/n)$. Demuestre que $\lim_n P(S_n = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

21. Demuestre que si $S_n \sim$ Binomial(n, p) y $Y_k \sim$ Binomial-negativa(k, p), entonces $P(S_n \geq k) = P(Y_k \leq n)$.

22. Sea $U_n \sim$ Uniforme$\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$. Demuestre que U_n converge en distribución a $U \sim$ Uniforme$[0, 1]$.

23. Sea Y_n una geometrica de parametro $p_n = \lambda/n$. Calcule el límite en distribución de Y_n/n, cuando $n \to \infty$.

24. Demuestre que si $N(t) \sim$ Poisson(λt) y $Y_n \sim$ Gama(n, λ). Entonces $P(N(t) \geq n) = P(Y_n \leq t)$ para todo entero no negativo n y real positivo t.

25. Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, para $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, la densidad de la Normal(μ, σ^2).

26. Demuestre que $X \sim$ Normal(μ, σ^2) si y solo si $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim$ Normal$(0, 1)$.

Vectores Aleatorios

27. Sean X, Y variables aleatorias discretas. Demuestre que son equivalentes: (1) X e Y son independientes. (2) existen funciones g y h tales que $p_{X,Y}(x, y) = g(x)h(y)$. (3) Existen funciones G y H tales que $F_{(X,Y)}(x, y) = G(x)H(y)$.

28. Sean X, Y variables aleatorias continuas. Demuestre que son equivalentes: (1) X e Y son independientes. (2) existen funciones g y h tales que $f_{X,Y}(x, y) = h(x)g(y)$. (3) Existen funciones G y H tales que $F_{(X,Y)}(x, y) = H(x)G(y)$.

29. Sea (X, Y) con X, Y normales standard independientes: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$. Calcule la distribución de $X^2 + Y^2$ y de $\arctan(Y/X)$.

30. Sean $X_1, X_2, \dots$ positivas, independientes con la misma esperanza finita, N asume valores en $\{1, \dots, k\}$ y es independiente de los X_i. Calcule $E(\prod_{i=1}^{N} X_i)$.

31. Sean X Y variables aleatorias independientes $N(0, 1)$. Sea $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Calcule $P(R \leq r)$ para $R \geq 0$.

32. Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad $f_{X,Y}$. Calcule la distribución de $X + Y$.

33. Sean X e Y variables aleatorias continuas independientes con densidades marginales f_X y f_Y, respectivamente. Calcule la densidad de $X+Y$.

34. Sean X e Y variables aleatorias independientes y g, h funciones medibles Borel. Demuestre que $g(X)$ y $h(Y)$ son independientes.

Esperanza

35. Para un vector aleatorio discreto X y una función medible g demuestre que $Eg(X) = \sum_x g(x)P_X(x)$.

36. Demuestre que si $X \geq 0$, entonces $EX = \int_0^\infty (1 - F(x))dx$ para el caso continuo y discreto.

37. Demuestre que si $X \geq 0$ y $EX = 0$, entonces $P(X = 0) = 1$.

38. Demuestre que $EX = \arg \operatorname{mín}_c E(X-c)^2$.

39. Demuestre que (1) $VX \geq 0$; (2) $VX = 0 \Leftrightarrow X = EX$; (3) $V(X+b) = VX$; (4) $V(aX) = a^2 VX$.

40. Demuestre que $|\mathrm{cov}(X,Y)|^2 \leq VX\,VY$ (Cauchy-Schwarz).

41. Demuestre que (1) $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - EX\,EY$; (2) $\mathrm{cov}(X,X) = VX$; (3) $|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq VX + VY$; (4) $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$; (5) $\mathrm{cov}(aX+bY,Z) = a\,\mathrm{cov}(X,Z) + b\,\mathrm{cov}(Y,Z)$.

42. Demuestre (a) $V(X+Y) = VX + VY + 2\mathrm{cov}(X,Y)$ y
(b) X, Y independientes implica $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

43. De un ejemplo de variables no independientes con covarianza 0.

44. Demuestre que si a, b, c y d son números reales, $a \neq 0$, $c \neq 0$ y X e Y variables aleatorias con varianza positiva, entonces $\rho(aX+b, cY+d) = \mathrm{sg}(ac)\,\rho(X,Y)$, donde sg denota la función signo.

45. Pruebe que el coeficiente de correlación $\rho(X,Y)$ tiene módulo menor o igual a 1. Cual es la relación entre X e Y cuando $\rho(X,Y) = 1$?

Esperanza condicional

46. Sea X resultado de un dado, $Y := \mathbf{1}\{\text{dado par}\}$. Calcule la probabilidad que $E(X|Y)$ sea igual a 4.

47. Sea $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ y $P(X = k|N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$. Calcule la probabilidad que $E(X|N)$ sea menor que 2.

48. Sea (X,Y) un vector continuo en $\mathbb{R}^2$ con densidad $f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}\,\mathbf{1}\{0 < x < y\}$. Demuestre que X e $Y - X$ son variables aleatorias independientes Exponencial(λ).

49. Usando la definición formal de esperanza condicional, demuestre que si $X = f(Y)$, entonces $E(X|Y) = X = f(Y)$.

50. Usando la definición formal de esperanza condicional, demuestre que si X, Y son independientes, $E(X|Y) = EX$.

51. Usando la definición formal de esperanza condicional, demuestre que si $E|X_i| < \infty$ y a_i son constantes, entonces $E\Big(\sum_{i=1}^k a_i X_i \Big| Y\Big) = \sum_{i=1}^k a_i E(X_i|Y)$.

52. Usando la definición formal de esperanza condicional, demuestre que $X \geq 0$ implica $E(X|Y) \geq 0$.

53. Usando la definición formal de esperanza condicional, demuestre que $|E(X|Y)| \leq E(|X|\,|Y)$. Demuestre que esa desigualdad implica $E|E(X\,|Y)| \leq E|X|$

54. Usando la definición formal de esperanza condicional, demuestre que si $\phi(y) := \sum_x g(x,y)\,P(X = x|Y = y)$, entonces $E(g(X,Y)|Y) = \phi(Y)$.

55. Usando la definición formal de esperanza condicional, demuestre que si $\phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,f_{X|Y=y}(x)dx$, entonces $E(g(X,Y)|Y) = \phi(Y)$.

56. Sea X una variable aleatoria con esperanza finita. Hallar $E(X|e^X)$ (y probarlo).

57. Sea $X \sim$ Geométrica (p) y defina $Y := 1\{X = 1\}$. Calcule la distribución de $E(X|Y)$ y use el resultado para demostrar que $EX = 1/p$.

58. Demuestre la identidad de Wald: Sean X_i identicamente distribuídas y N variable aleatoria entera, no negativa, independiente de los X_i. Si $EN < \infty$ y $E|X_i| < \infty$, entonces $E\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) = EN\,EX_1$.

59. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes Bernoulli(p). Sea $N \sim$Poisson(λ) independiente de $(X_1, X_2, \ldots)$. Calcule $P(E(X_1 + \ldots + X_N|N) \leq 1)$ en función de p y λ.

60. Suponga que Y es Bernoulli (1/5), que X asume valores en $\{0,1\}$ y que $P(X = 1|Y = 0) = 1/3$ mientras $P(X = 1|Y = 1) = 1/4$ y $g(x) = x^2$. Calcule $P(E(g(X)|Y) > 1/2)$.

61. Un minero está en el fondo de una mina y ve tres túneles: 1, 2 y 3. El tunel 1 lleva a la salida en una hora. El tunel 2 vuelve a la misma encrucijada en 2 horas y el tunel 3 vuelve a la encrucijada en 3 horas. Cada vez que el minero está en la encrucijada, elige uno de los túneles con probabilidad 1/3, independientemente de lo que eligió antes. Sea T el tiempo que tarda en salir de la mina. Calcule ET.

Generación de variables aleatorias

62. Sea F una función de distribución acumulada. Defina la función inversa generalizada F^{-1} y demuestre que si $U \sim$ Uniforme$[0,1]$, entonces $Y := F^{-1}(U)$ tiene distribución F.

63. Sean $p_1 < p_2$. Construya un vector (X_1, X_2) tal que $X_i \sim$ Bernoulli(p_i) y $P(X_1 \leq X_2) = 1$.

64. Encuentre un vector $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aleatorias con marginales $X_i \sim$ Uniforme$(0,i)$ y tal que $P(X_1 \leq \ldots \leq X_n) = 1$.

65. Encuentre un vector $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aleatorias con marginales $X_k \sim$ Exponencial$(1/k)$ y tal que $P(X_1 \leq \ldots \leq X_n) = 1$.

66. Sea $U \sim$ Uniforme$[0,1]$. Demuestre que $\frac{-\log(1-U)}{\lambda} \sim$ Exponencial(λ).

67. Suponga que f y g son densidades y c es una constante positiva tales que $f(x) \leq cg(x)$ para todo x. Sean $(Y_1, U_1), (Y_2, U_2), \ldots$ una sucesion de vectores independientes con coordenadas independientes. $Y_i \sim g$, $U_i \sim$ Uniforme$[0,1]$, $A := \Big\{(x,u) : u \leq \frac{f(x)}{cg(x)}\Big\}$, $T := \text{mín}\{n : (Y_n, U_n) \in A\}$. Demuestre que $X := Y_T$. tiene distribución f.

Convergencia de variables aleatorias

68. Enunciar y demostrar el Lema de Borel Cantelli.

69. Sean X_i Bernoulli(a_i). De condiciones sobre la sucesión a_i para que el evento $\{X_n$ infinitas veces$\}$ ocurra (a) con probabilidad 1, (b) con probabilidad 0.

70. Demuestre que $X_n \stackrel{c.s.}{\to} X$ si y sólo si $\lim_{k\to\infty} P\Big(\bigcup_{n\geq k}\Big\{|X_n - X| \geq \frac{1}{\ell}\Big\}\Big) = 0$ para todo $\ell > 0$.

71. Demuestre que $X_n \stackrel{c.s.}{\to} X$ implica $X_n \stackrel{P}{\to} X$ (si una sucesión converge casi seguramente a X, entonces también converge en probabilidad a X.

72. Demuestre que si $\sum_{n\geq 1} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$ para todo $\varepsilon > 0$ entonces $X_n \stackrel{c.s.}{\to} X$.

73. De un ejemplo donde se vea que convergencia en probabilidad no implica convergencia casi segura.

74. Demuestre que si $X_n \stackrel{P}{\to} X$, entonces $X_n \stackrel{D}{\to} X$.

75. De un ejemplo donde se vea que convergencia en distribución no implica convergencia en probabilidad.

76. Demuestre que si $X_n \stackrel{P}{\to} X$, entonces existe una subsucesión X_{n_k} tal que $X_{n_k} \stackrel{c.s.}{\to} X$.

77. Demuestre la desigualdad de Markov: si $X \geq 0$ entonces $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{EX}{\varepsilon}$. Deduzca la desigualdad de Chevichev.

78. Enuncie y demuestre la ley debil de grandes números para variables aleatorias con segundo momento finito.

79. Enuncie y demuestre la ley fuerte de grandes números para variables aleatorias con segundo momento finito.

80. Enuncie y demuestre el Teorema de la convergencia acotada.

81. Demuestre el Teorema de Weierstrass usando la ley de grande números y convergencia acotada: Los polinomios son densos en $\mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ continua}\}$.

82. Demuestre que si $X_n \stackrel{D}{\to} c$ y todas las variables están definidas en el mismo espacio, entonces $X_n \stackrel{P}{\to} c$.

83. De un ejemplo de variables aleatorias que convergen en distribución pero no convergen casi seguramente. Demuestre convergencia en un caso y no convergencia en el otro.

84. Enuncie y pruebe el teorema de Skorohod.

85. Demuestre que si $X_n \stackrel{D}{\to} X$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua entonces $g(X_n) \stackrel{D}{\to} g(X)$.

86. Demuestre que $X_n \stackrel{D}{\to} X$ si y sólo si $Ef(X_n) \to Ef(X)$ para toda f continua y acotada.

87. Slutsky. Demuestre que si X_n converge en distribución a X y Y_n converge en probabilidad a una constante c entonces $X_n + Y_n \stackrel{D}{\to} X + c$.

Funciones características

88. Demuestre que si $X_1, \dots, X_n$ son independientes, entonces $\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\dots\varphi_{X_n}(t)$.

89. Demuestre que $\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at)e^{itb}$.

90. Enuncie el Teorema de inversión de la función característica.

91. Demuestre la fórmula de inversión de la función característica de X cuando $P(X \in \mathbb{N}) = 1$.

92. Enuncie el Teorema de Continuidad de Paul Levy.

93. Calcule Ee^{sZ} para $Z \sim \text{Normal}(0,1)$.

94. Defina función característica y calcule la función característica de la variable Poisson(λ). Use ese cálculo para probar que suma de v.a. Poisson independientes es Poisson. Justifique sus pasos.

Teorema Central del Límite

95. Demuestre el Teorema Central del Límite usando las funciones características y el teorema de Levy.

96. Sean X_i, $i = 1, 2, \dots$ variables aleatorias independientes con distribución $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 1/2$. Sea $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} P(\frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}} = 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Use Stirling.

97. Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias independientes con distribución $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 1/2$. Sea $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Demuestre que si existe una variable aleatoria Z tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \varphi_Z(t)$, para todo t, entonces $\varphi_Z(t) = (\varphi_Z(t/\sqrt{2}))^2$.

Procesos Bernoulli y Poisson

98. Defina el proceso de Bernoulli y el proceso Binomial y demuestre que el proceso Binomial tiene incrementos independientes y estacionarios.

99. Demuestre que el instante de la primera llegada del proceso Bernoulli tiene distribución geométrica.

100. Demuestre que el instante de la k-ésima llegada del proceso Bernoulli tiene distribución binomial negativa.

101. Demuestre la dualidad entre la Binomial y la Binomial negativa. (borrar, igual al 101))

102. Sea Y_k el instante de la k-ésima llegada del proceso Bernoulli. Demuestre que los instantes entre llegadas sucesivas definidos por $T_i := Y_i - Y_{i-1}$, $i \geq 1$ son variables aleatorias independientes con distribución geométrica.

103. Describa las condiciones que caracterizan a un proceso de Poisson en $\mathbb{R}$.

104. Usando la dualidad Gama-Poisson, demuestre que la distribución de la n-ésima llegada de un proceso de Poisson tiene distribución Gama(n, λ).

105. Demuestre que las distribuciones finito-dimensionales de proceso Binomial convergen a las análogas del proceso de Poisson. Es decir $(S^\ell_{t_i} - S^\ell_{s_i},\ i = 1, \dots, k)$ converge en distributión al vector $(N_{t_i} - N_{s_i},\ i = 1, \dots, k)$, donde $S^\ell_t = \sum_{i=1}^{\ell t} X^\ell_i$, para $X^\ell_i \sim \text{Bernoulli}(\lambda/\ell)$, iid. Haga las cuentas solamente para $k = 2$.

106. Sea T_k^ℓ el tiempo entre la $(k-1)$-ésima y k-esima llegadas en un proceso de Bernoulli, donde el i-ésimo ensayo ocurre en el instante i/ℓ con proba de éxito λ/ℓ. Demuestre que

$$\lim_{\ell\to\infty} P(T_1^\ell > t_1, \dots, T_k^\ell > t_k) = e^{-\lambda t_1} \dots e^{-\lambda t_k}$$

para reales positivos $t_1, \dots, t_k$.

107. Los clientes llegan a un banco de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro 3, cual es la probabilidad que los tres primeros clientes lleguen antes de los 3 primeros minutos?

108. Defina las propiedades que caracterizan un proceso de Poisson de parámetro λ (incrementos estacionarios e independientes, etc). Calcule la probabilidad que ocurran simultaneamente los eventos $A = \{\text{hay 3 llegadas en el intervalo } [0,3]\}$ y $B = \{\text{hay 4 llegadas en el intervalo } (3,4]\}$.

Cadenas de Markov

109. Defina proceso de Markov con matriz de transición Q. Demuestre que $P(X_2 = y|X_0 = x) = Q^2(x, y)$.

110. Sea Q una matriz de transición en un espacio de estados S finito. Para cada $x \in S$ definimos una partición $\mathcal{J}_x = (J(x,y), y \in S)$ del intervalo $[0,1]$, de tal manera que $|J(x,y)| = Q(x,y)$. Defina $F : S \times [0,1] \to S$ por $F(x,u) = \sum_{y\in S} y\,\mathbf{1}\{u \in J(x,y)\}$. definido por $X_0 = x$ y $X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$ con U_n iid Uniforme[0,1]. Demuestre que el proceso X_n es un proceso de Markov con matriz de transición Q y estado inicial x.

111. Demuestre las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.

112. Defina la medida invariante para una cadena de Markov con matriz Q y calcule la medida invariante de la urna de Ehrenfest con $N = 2$.

Estadística

113. Defina los estimadores de momentos y calcule el estimador de momentos de la media de la distribución Exponencial(λ) y de la Uniforme$[0, \theta]$.

114. Defina los estimadores de momentos y calcule el estimador de momentos de θ para la distribución Uniforme$[-\theta, \theta]$.

115. Sea $X \sim$ Gama(α, λ). Plantee las ecuaciones para los estimadores de momentos de α y λ.

116. Defina el estimador de máxima verosimilitud y calcule el estimador de máxima verosimilitud de p para la variable $X \sim$ Bernoulli(p).

117. Defina el estimador de máxima verosimilitud y calcule el estimador de máxima verosimilitud de λ para la variable $X \sim$ Exponencial(λ).

118. Defina el estimador de máxima verosimilitud y calcule el estimador de máxima verosimilitud de θ para la variable $X \sim$ Uniforme$[\theta, 0]$.

119. Defina sesgo de un estimador, estimador insesgado y estimador asintoticamente insesgado. Clasifique los siguientes estimadores de acuerdo a su sesgo y/o sesgo asintótico. (1) Proporción muestral $\hat{p}_n$ para p de la Bernoulli; (b) media muestral $\bar{X}$ para la media μ de una variable aleatoria; (c) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - \bar{X})^2$ para la varianza σ^2.

120. Decida si los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud de θ para $X \sim Uniforme[0, \theta]$ son insesgados y/o asintoticamente insesgados.

121. Construya un intervalo de confianza para la media de una distribución normal con varianza conocida. Describa la relación entre el coeficiente de confianza, el tamaño de la muestra y el radio del intervalo. Interprete con sus propias palabras.

122. Describa el método del pivote para obtener un intervalo de confianza.

123. Construya un intervalo de confianza para el parámetro p de la distribución Bernoulli, cuando el tamaño de la muestra n es grande, usando la aproximación normal. Describa la relación entre el coeficiente de confianza, el tamaño de la muestra y el radio del intervalo. Interprete con sus propias palabras.