Materia: Introducción a la Teoría Analítica de Números

Profesor: Pablo De Nápoli.

Cuatrimestre: primer cuatrimestre de 2009.

careeras para las que se dicta: licenciatura y doctorado en matemática / profesorado.

Descripción de la materia:

La teoría analítica de números es una rama de la matemática donde se emplean los métodos del análisis (como el análisis de variable compleja y la transformada de Fourier), para estudiar las propiedades de los números enteros. Es una disciplina de una belleza excepcional, pues ilustra de modo singular la unidad de la matemática (ya que resulta sorprendente cómo los métodos analíticos pueden utilizarse para estudiar problemas "discretos", como la distribución de los números primos).

Por otra parte, es una disciplina de gran valor formativo, ya que los métodos que se desarrollan en esta teoría sirven de inspiración en otros problemas (combinatoria, distribución de los autovalores de un operador diferencial, análisis armónico en grupos, etc.).

El objetivo del curso es ofrecer a los alumnos una introducción a la teoría analítica de números, centrada en dos de los resultados fundamentales de la teoría:

1. El teorema sobre la distribución de los números primos, que afirma que si llamamos $\pi(x)$ a la cantidad de números primos menores o iguales que x entonces se tiene la *relación asintótica*

   $$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

   lo que significa que:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\log x}\right)} = 1 \text{ cuando } x \to +\infty$$

   (en adelante lo llamaremos "el teorema de los números primos").

2. El teorema de Dirichlet que afirma que si a y b son coprimos, en la progresión aritmética $an+b$ ($n \in \mathbb{Z}$) existen infinitos primos. De hecho, existe una versión fuerte de este teorema que generaliza al teorema anterior, y que afirma que si llamamos $\pi(x; a, b)$ al número de primos menores o iguales que x de la forma $an+b$ se tiene la fórmula asintótica

$$\pi(x; a, b) \sim \frac{1}{\varphi(a)} \frac{x}{\log x} \text{ cuando } x \to +\infty$$

siendo $\varphi(a)$ la función de Euler que cuenta el número de enteros menores o iguales que a y coprimos con a (teorema de los números primos para progresiones aritméticas). Notamos que este teorema afirma que los números primos se encuentran "parejamente repartidos" en las $\varphi(a)$ clases de congruencia módulo a que corresponden a enteros b coprimos con a. En el curso, veremos esta versión del teorema.

Una crónica fascinante de la historia del teorema sobre la distribución de los primos puede leerse en el artículo de Bateman y Diamond [2].

Otro problema al que intentaremos acercarnos en el curso (si el tiempo lo permite), es el problema de las particiones (problema fundamental de la teoría aditiva):

3. Si $p(n)$ designa el número de particiones de n, esto es la cantidad de descomposiciones del entero (positivo) n como suma de enteros más pequeños (sin tener en cuenta el orden, por ej. $3 = 1 + 2$ y $3 = 2 + 1$ cuentan como la misma partición del 3), ¿cómo podemos determinar el valor de $p(n)$?. Euler obtuvo una notable fórmula recursiva para $p(n)$. Por otra parte G.H. Hardy y S. Ramanujan, obtuvieron una fórmula asintótica, que establece que:

$$p(n) \sim \frac{e^{K\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}} \quad K = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ cuando } n \to +\infty$$

También es posible estudiar por métodos similares otros tipos de particiones. Hardy, Littlewood y Ramanujan desarrollaron un potente método ("el método del círculo") para estudiar problemas en la teoría aditiva de números (utilizando el cuál dedujeron su fórmula asintótica).

Si bien ya existe una optativa regular de teoría de números, esta materia cubrirá otros temas, ya que el programa habitual de dicha optativa regular consiste en una introducción a la teoría algebraica de números (aritmética en los anillos de números algebraicos). Por otra parte, esta materia está pensada para ser relativamente elemental de manera que resulte también accesible a los estudiantes de licenciatura.

Obviamente existen profundas conexiones entre los aspectos algebraico y analítico de la teoría de números[1] pero no desarrollaremos estas conexiones en nuestro curso, pues para poder hacerlo se requerirían conocimientos de la teoría algebraica de números que no presuponemos.

Breve descripción del desarrollo del curso:

A continuación describiré el desarrollo de los temas previsto para el curso. El mismo puede sufrir algunas modificaciones, adaptándose en función de los intereses de los alumnos que asistan al curso o sus conocimientos previos, y del tiempo que demande desarrollar cada tema.

Como hilo conductor del curso, planeo utilizar el libro de T. Apostol [1] y las notas del curso de B. Green (ver en la bibliografía).

Comenzaremos desarrollando algunos métodos elementales para estudiar la distribución de los números primos, y problemas relacionados. Aprenderemos a estimar el valor asintótico de sumas que involucran *funciones aritméticas*: por ejemplo, probaremos el teorema de Dirichlet que afirma que:

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} d(n) \sim \log x$$

donde $d(n)$ designa la cantidad de divisores de n (Está fórmula dice que un número menor o igual que x tiene "en promedio" $\log x$ divisores[2]. También estableceremos la equivalencia entre distintas formas del teorema de los números primos.

Para conectar las propiedades de las funciones aritméticas con los métodos del análisis, en la teoría analítica de números se emplean *funciones generatrices*: esto es funciones en cuyo desarrollo en serie aparecen como coeficientes los valores de la función que uno quiere estudiar.

[1] De hecho muchos de los resultados que veremos en el curso, se generalizan a los anillos de enteros algebraicos en los cuerpos numéricos, permitiendo por ejemplo estudiar la distribución de los ideales primos en dichos anillos. También cabe mencionar que Dirichlet dedujo originalmente su teorema utilizando en un punto clave del razonamiento la fórmula para el número de clases de formas cuadráticas binarias, o lo que es equivalente al número de clases de de ideales en los cuerpos cuadráticos (ver [5] o por ejemplo [7]).

[2] En realidad, Dirichlet demostró una fórmula más precisa, pero por simplicidad en este artículo sólo mencionamos esta versión.

En la teoría multiplicativa (donde se estudian propiedades relacionadas con la estructura multiplicativa de los enteros y los números primos) se emplean con frecuencia las series de Dirichlet de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

mientras que en la teoría aditiva suelen utilizarse series de potencias.

La serie de Dirichlet más sencilla es la función zeta de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

(convergente si $s > 1$). Esta función juega un papel fundamental en la teoría de los números primos, a consecuencia de una identidad descubierta por Euler:

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}} \ (s > 1) \tag{2}$$

donde el producto infinito recorre los números primos. Esta identidad puede considerarse una versión analítica del teorema fundamental de la aritmética.

Como ejemplo de función generatriz en la teoría aditiva, podemos mencionar la identidad (también debida a Euler):

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n \quad (|z| < 1)$$

donde $p(n)$ designa el número de particiones de n (y ponemos $p(0) = 1$).

Un paso decisivo para demostrar el teorema de los números primos fue dado por Riemann quien en su célebre trabajo [11] publicado en 1859 (¡de apenas ocho páginas!), tuvo la brillante idea de estudiar la función zeta como una función de la variable compleja s.

Es fácil ver que la serie serie (1) converge en el semiplano del plano complejo definido por la relación $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ y que la función zeta resulta analítica en él. Pero Riemann demostró en este trabajo que la función zeta podía de hecho extenderse a una función meromorfa en todo el plano complejo, cuya única singularidad resulta ser un polo simple en el punto $s = 1$. Además mostró que la función zeta satisface una notable ecuación funcional del todo inesperada:

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)$$

(Aquí $\Gamma(s)$ designa la función gama de Euler).

En consecuencia, es fácil ver que la función zeta así extendida resulta anularse en los enteros pares negativos (estos son los llamados ceros triviales de la función zeta). Por otra parte, la ecuación funcional implica que todos los demás ceros de la función zeta se encuentran en la denominada *banda crítica* $0 \leq \mathrm{Re} \leq 1$ (ya que como es fácil ver, a consecuencia del producto de Euler (2), la función zeta no se anula en el semiplano $\mathrm{Re}\,(s) > 1$), y son simétricos respecto de la "recta crítica" $\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$.

Riemann mostró entonces que la distribución de los números primos está íntimamente relacionada con los ceros de la función zeta en la banda crítica (los llamados *ceros no triviales*) De hecho, es posible expresar la función $\pi(x)$ y muchas otras funciones relacionadas, en función de dichos ceros no triviales, mediante *fórmulas explícitas*.

También dio una fórmula asintótica para la densidad de los ceros en la banda crítica, y enunció una conjetura sobre la distribución de los ceros de la función zeta, que continua siendo uno de los problemas abiertos de mayor importancia en la matemática actual (ver [3]):

Hipótesis de Riemann: Todos los ceros no triviales de la función zeta se encuentran sobre la recta crítica $\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$.

Muchas de las demostraciones de los resultados enunciados por Riemann estaban incompletas o eran imprecisas, y debieron pasar cuarenta y dos años, hasta que en 1986 Jacques Hadamard y Charles-Jean de la Vallée Poussin pudieran dar una demostración completamente rigurosa del teorema de los números primos.

En el curso veremos dos demostraciones del teorema de los números primos: primero una versión simplificada de D. J. Newman [13] (que se basa en un teorema tauberiano, que se demuestra utilizando tan sólo la integral de Cauchy; y que sólo depende de la analiticidad y no anulación de la función zeta sobre la recta Re(s)=1, para $s \neq 1$), y después una versión más sofisticada donde obtendremos una acotación para el error, a partir de la determinación de una región libre de ceros para la función zeta (demostración original de J. Hadamard- de la Valée Poussin). Esta segunda demostración nos permitirá además comprender el significado de la hipótesis de Riemann.

Para poder exponer dicha demostración, necesitaremos desarrollar la teoría de Hadamard sobre la factorización de las funciones enteras de variable compleja en producto infinito y estudiar la función gama de Euler. También deduciremos la ecuación funcional de Riemann para la función zeta.

Por otra parte, estudiaremos los resultados análogos para la distribución de los primos en las progresiones aritméticas. Para ello, necesitaremos estudiar la estructura del grupo $\mathbb{Z}_a^*$ (de clases de enteros módulo a que son coprimos con a), y los caracteres de Dirichlet módulo a (que pueden pensarse como los morfismos de grupo de $\mathbb{Z}_a^*$ en $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$).

La teoría de los caracteres de Dirichlet puede pensarse como una versión del análsis armónico para el grupo[3] $\mathbb{Z}_a^*$. Entre otras aplicaciones, los caracteres permiten una deducción elegante de la ley de reciprocidad cuadrática de Gauss (por medio del estudio de las llamadas sumas de Gauss, que son como una versión finita de las series de Fourier).

Un caracter de Dirichlet módulo a $\chi : \mathbb{Z}_a^* \to S^1$ puede pensarse también como una función $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ que es periódica módulo a y completamente multiplicativa[4], definiendo $\chi(n) = 0$ si n no es coprimo con a. Entonces, al estudiar la distribución de los números primos en las progresiones aritméticas, el papel análogo a la función zeta de Riemann lo juegan las L-series de Dirichlet:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

En consecuencia, nos proponemos desarrollar el mismo tipo de resultados para las L-series: su prolongación al plano complejo, ecuación funcional y regiones libres de ceros. Esta teoría permite obtener una versión del teorema de los números primos en las progresiones aritméticas con acotación del término de error[5] (teorema de Siegel-Walfisz, ver [9] o [10]).

Finalmente (si el tiempo lo permite), nos proponemos estudiar el problema de las particiones, deduciendo la fórmula recursiva para $p(n)$ a partir del teorema de los números pentagonales de Euler, y la fórmula asintótica

[3] Dado un grupo abeliano G localmente compacto se definen los caracteres de G como los morfismos de G en S^1. Estas funciones juegan el papel de las exponenciales en el análisis armónico en dichos grupos.

[4] lo que significa que $\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)\ \forall\, n, m \in \mathbb{Z}$

[5] También es posible dar una demostración más elemental del teorema de los números primos en progresiones aritméticas, siguiendo las lineas de la prueba de D.J. Newman. Esta prueba se debe a I. Soprounov [14].

de Hardy-Ramanujan (tenemos previsto exponer una prueba simplificada de D.J. Newman [12]).

Un tema extra (que no creo que lleguemos a desarrollar, aunque seria interesante) podría ser el del método del círculo. Este método permite estudiar diversos problemas de la teoría aditiva. Por ejemplo, puede usarse para probar el teorema de Vinogradov (sobre el problema de Golbach impar) que afirma que todo entero impar suficientemente grande puede escribirse como suma de tres números primos (ver [10]).

Modalidad de evaluación / aprobación:

1. Para aprobar los trabajos prácticos los alumnos deberán entregar ejercicios de una lista (Como punto de partida pienso utilizar los ejercicios del libro de Apostol). Los ejercicios podrán incluir problemas que requieran la utilización de algún software de álgebra computacional.

2. Para aprobar el examen final, los alumnos deberán exponer sobre algún tema relacionado con los contenidos del curso.

Carga horaria: 4 horas semanales.
Horario probable: mates y jueves de 14 a 16hs.

Correlatividades: Análisis Complejo.
Pueden también ser de utilidad algunos conocimientos elementales de álgebra (al nivel de álgebra II, pero no se pide como correlativa).

Programa Oficial de la materia

1. Funciones aritméticas: ejemplos (las funciones d(n) y $\sigma(n)$, φ de Euler y μ de Möbius).La convolución de Dirichlet. La fórmula de inversión de Moëbius. Medias de funciones aritméticas. Fórmulas de sumación de Euler y de Abel.

2. Métodos elementales para estudiar la distribución de los números primos: Funciones de Chevishev. Distintas formas equivalentes del teorema de los números primos.

3. Funciones generatrices. Teoría aditiva: particiones. Teoría multiplicativa: Series de Dirichlet. Productos de Euler. Ejemplos.

4. Algunos temas de variable compleja (necesarios para estudiar la función zeta y las L-series de Dirichlet): Funciones enteras de orden finito. Fórmula de Jensen. Teorema de factorización de Hadamard. Función Gama.

5. La función zeta de Riemann. Su prolongación al plano complejo como función meromorfa. Ecuación funcional. Región clásica libre de ceros de la función zeta y demostración del teorema de los números primos.

6. Relación entre la distribución de los ceros de la función zeta y la distribución de los números primos ("fórmulas explícitas"). Teorema de los números primos con error. Hipótesis de Riemann.

7. Caracteres de grupos abelianos finitos. Los caracteres de Dirichlet y sus sumas de Gauss. L-Series de Dirichlet: prolongación analítica y ecuación funcional. Teorema de Dirichlet sobre la infinitud de los primos en progresiones aritméticas.

Bibliografía

[1] T. Apostol, *Introducción a la Teoría Analítica de Números.* Ed. Reverté (1980).
Disponible en Biblioteca central. Ubicación: Depósito 511.3 A645

[2] P. T. Bateman; H. G. Diamond. *A Hundred Years of Prime Numbers*. The American Mathematical Monthly, Vol. 103, No. 9. (Nov., 1996), pp. 729-741.

[3] E. Bombieri. *The Riemann Hypothesis: Millenium problems. Clay Mathematics Institute. official problem description* . Disponible en: `http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/riemann.pdf`

[4] A. Córdoba. *Lecciones de Teoría de los Números.* Publicaciones del Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura / Asociación Matemática Española. (1987) [Disponible en hemeroteca]

[5] P. G. L. Dirichlet. *Lectures on number theory.* American Mathematical Society. Providence, R.I. 1999. Disponible en hemeroteca.

[6] G. H. Hardy, E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*.

[7] C. Ivorra. *Teoría de Números*. Disponible en `http://www.uv.es/ivorra/Libros/Numeros.pdf`

[8] C. Ivorra. *Funciones de Variable compleja (con aplicaciones a la teoría analítica de números)*. Disponible en `http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Varcom.pdf`

[9] Notas del curso sobre números primos de Ben Green. Disponibles en `http://www.dpmms.cam.ac.uk/~bjg23/primenumbers.html`

[10] A.A. Karatzuba. *Fundamentos de la teoría analítica de los números*, Editorial Mir, Moscú (1975)

[11] B. Riemann. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Gröse* (Sobre el número de números primos que son menores que una cantidad dada). Monatsberichte der Berliner Akademie, (Nov. 1859). Disponible en:
http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/
(hay una traducción al inglés)

[12] D.J. Newman. *A simplified proof of the partition formula*. Michigan Math. J. Volume 9, Issue 3 (1962), 283-287. Disponible en http://www.projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf_1&handle=euclid.mmj/1028998729

[13] D. J. Newman. *Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 9 (Nov., 1980), pp. 693-696.

[14] I. Soprounov. *A short proof of the Prime Number Theorem for Arithmetic Progressions*. Disponible en

http://www.math.umass.edu/~isoprou/pdf/primes.pdf

[15] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemman Zeta Function*. Science Publications. Oxford (1986). Disponible en hemeroteca.

[16] A. Zaccagnini. *Introduzione alla Teoria Analitica dei Numeri* (en italiano). Disponible en http://www.math.unipr.it/~zaccagni/psfiles/lezioni/tdn2005.pdf

[17] D. Zagier, *Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem*. The Ameican Mathematical Monthly, Vol. 104, No. 8. (Oct., 1997), pp. 705-708.